

Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: *Сходимость знакпеременных рядов*

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§16. Сходимость знакопеременных рядов

1. Знакопередающиеся ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки, называется **знакопередающимся**.

Будем считать, что 1-й член знакопередающегося ряда положителен.

⇒ знакопередающийся ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum (-1)^{n+1} \cdot u_n, \quad (1)$$

где $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1 (признак сходимости Лейбница).

Пусть знакочередующийся ряд $\sum (-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет условиям:

1) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине,

$$\text{т.е. } u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Тогда ряд $\sum (-1)^{n+1} \cdot u_n$ сходится, причем его сумма S положительна и не превосходит первого члена ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечания.

- 1) Ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ будет сходиться и в том случае, когда условие 1 теоремы Лейбница выполняется, начиная с некоторого номера N . Но утверждение о сумме ряда в этом случае не будет иметь места.
- 2) Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то погрешность, получаемая при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n , не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, т.е.

$$|R_n| = |S - S_n| < u_{n+1}$$

- 3) Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ не удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, то он расходится (т.к. не выполнено необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, но не удовлетворяет ее 1-му условию, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

2. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Пусть $\sum u_n$ – знакопеременный ряд.

Рассмотрим ряд $\sum |u_n|$.

ТЕОРЕМА 2 (признак абсолютной сходимости).

Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечание. Признак абсолютной сходимости достаточный, но не необходимый. Т.е. существуют сходящиеся знакопеременные ряды $\sum u_n$, для которых $\sum |u_n|$ – расходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд $\sum u_n$ называют **абсолютно сходящимся**, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.

Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют **условно сходящимся**.

СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1) ТЕОРЕМА 3.

Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum (\alpha u_n \pm \beta v_n)$ тоже сходится абсолютно ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

СЛЕДСТВИЕ теоремы 3.

Если ряд $\sum u_n$ – сходятся абсолютно,

$\sum v_n$ – сходятся условно,

то ряд $\sum (\alpha u_n \pm \beta v_n)$ сходится условно ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) ТЕОРЕМА 4 (о перестановке членов ряда).

а) Если ряд $\sum u_n$ сходится абсолютно, то ряд, полученный из него в результате перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

б) Если ряд $\sum u_n$ сходится условно, то можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу.

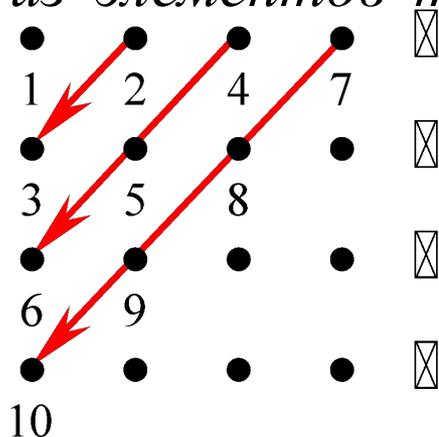
Более того, можно так переставить члены ряда, что получившийся ряд будет расходиться (теорема Римана).

Пусть даны два ряда: $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

Составим таблицу из всевозможных парных произведений членов этих рядов:

$$\begin{array}{cccccc}
 u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \dots & u_1 v_n & \dots \\
 u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \dots & u_2 v_n & \dots \\
 u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & \dots & u_3 v_n & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \dots & u_1 v_n & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \dots & u_2 v_n & \dots \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & \dots & u_3 v_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}} \right\} (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением рядов* $\sum u_n$ и $\sum v_n$ называют ряд, составленный из элементов таблицы (2) в следующем порядке:



$$\text{Итак: } \sum u_n \cdot \sum v_n = u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 + \dots$$



3) ТЕОРЕМА 5 (о сходимости произведения рядов).

Пусть ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны U и V соответственно.

Тогда ряд $\sum u_n \cdot v_n$ тоже сходится абсолютно и его сумма равна $U \cdot V$.

ТЕОРЕМА 6 (признак Дирихле).

Пусть 1) последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

2) последовательность частичных сумм ряда $\sum b_n$ ограничена.

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ – сходится .

ТЕОРЕМА 7 (признак Абеля).

Пусть 1) $\{a_n\}$ монотонная и ограниченная;

2) ряд $\sum b_n$ – сходится.

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ – сходится

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно