

Чётные и нечётные функции. Периодические функции.

Фомина Л.В.

Чётная функция

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$

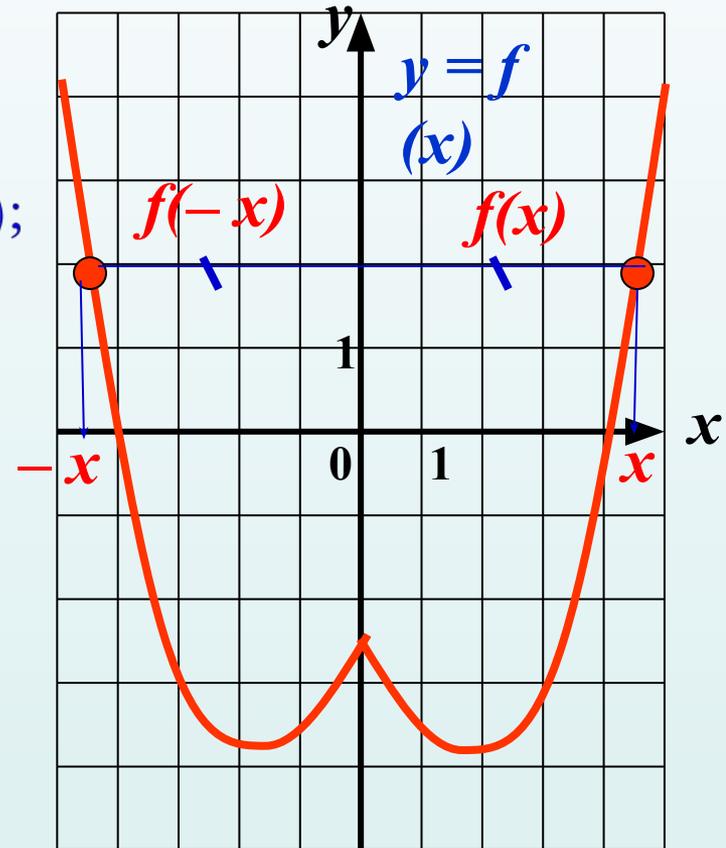
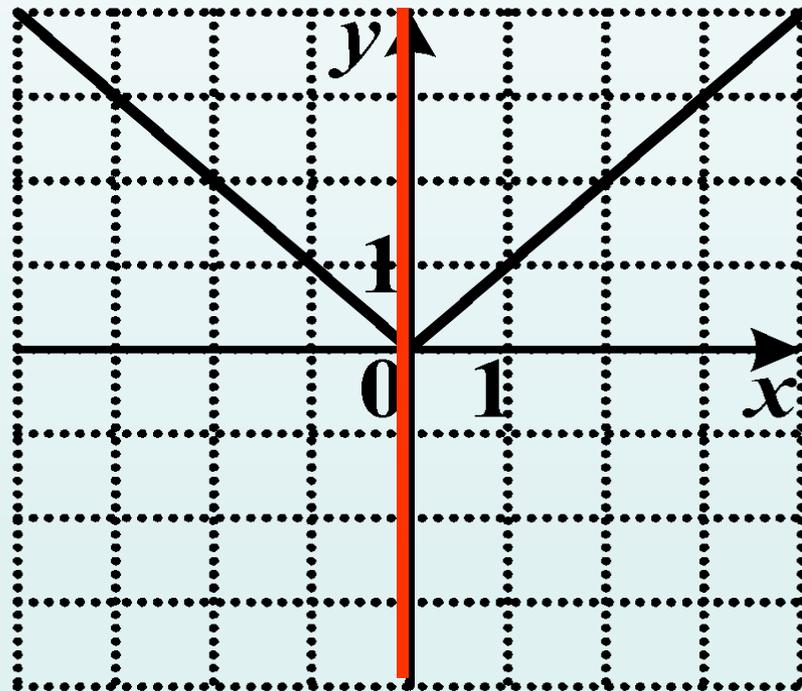
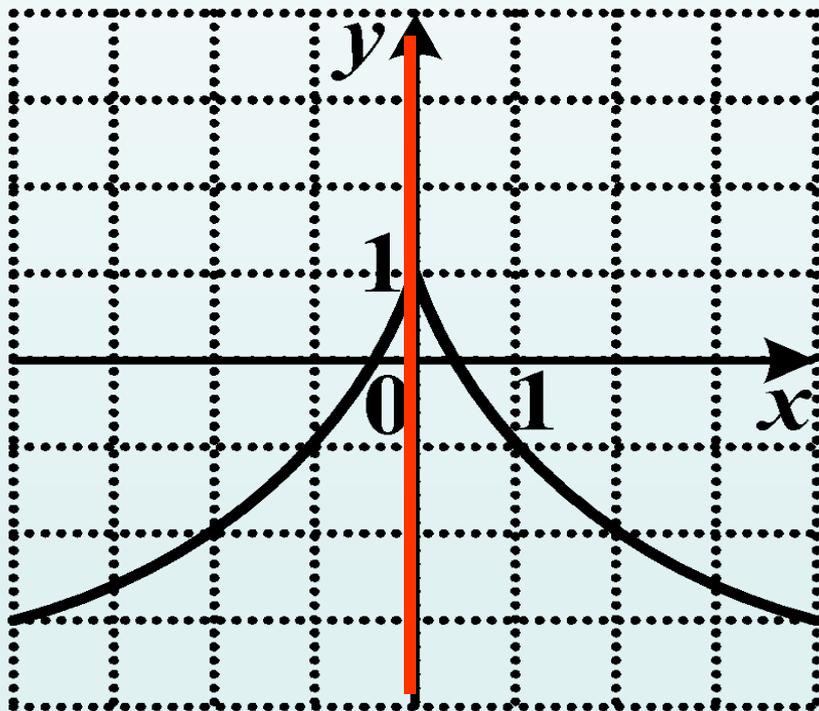


График чётной функции симметричен относительно оси ординат (OY)

Четные функции

Их графики симметричны относительно оси OY .

(Мысленно перегибаем координатную плоскость по оси OY ,
ветви графика должны совпасть)



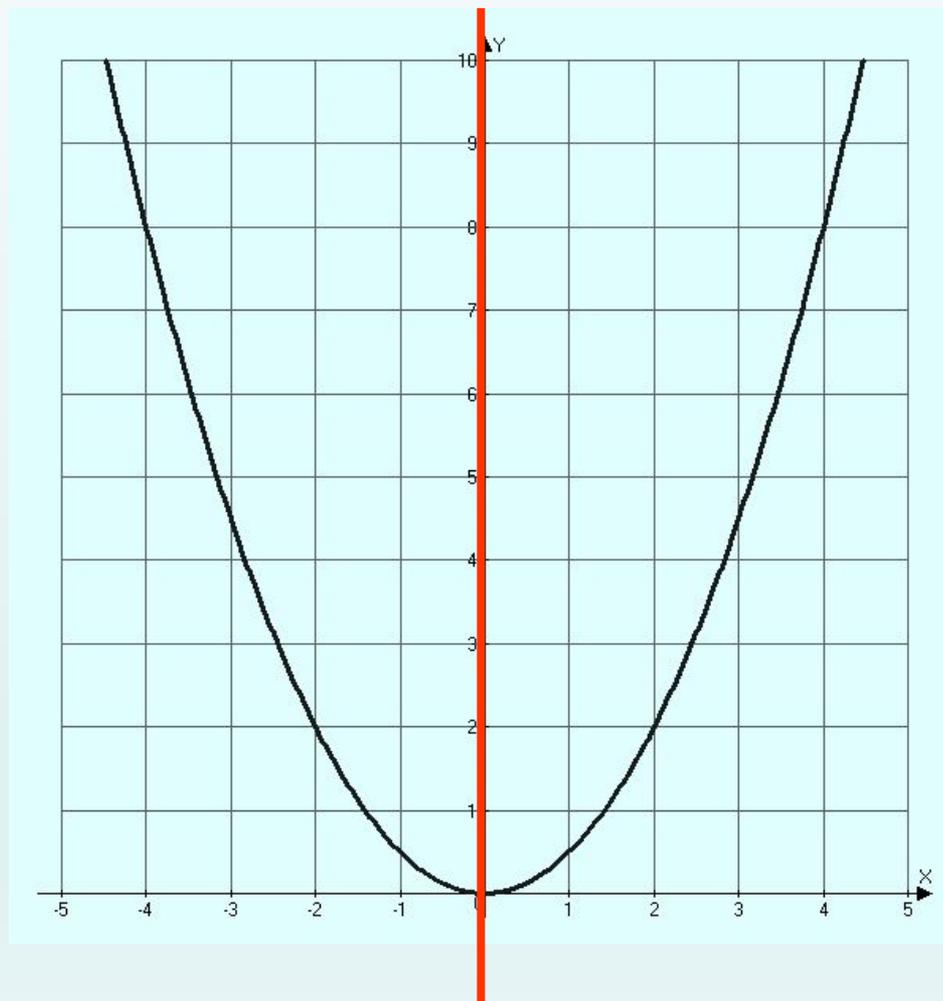
Примеры чётных функций

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$y(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$y(-x) = y(x)$$

График данной функции
симметричен относительно
оси ОУ



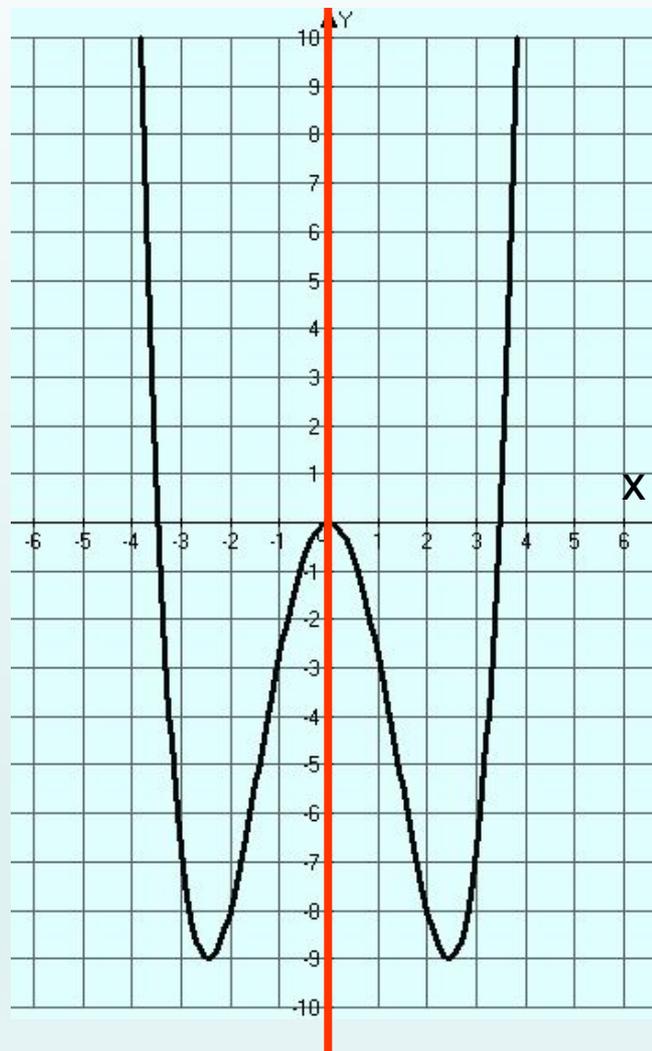
Примеры чётных функций

$$y(x) = 0,25x^4 - 3x^2$$

$$\begin{aligned} y(-x) &= 0,25(-x)^4 - 3(-x)^2 = \\ &= 0,25x^4 - 3x^2 \end{aligned}$$

$$y(-x) = y(x)$$

График данной функции
симметричен относительно
оси ОУ



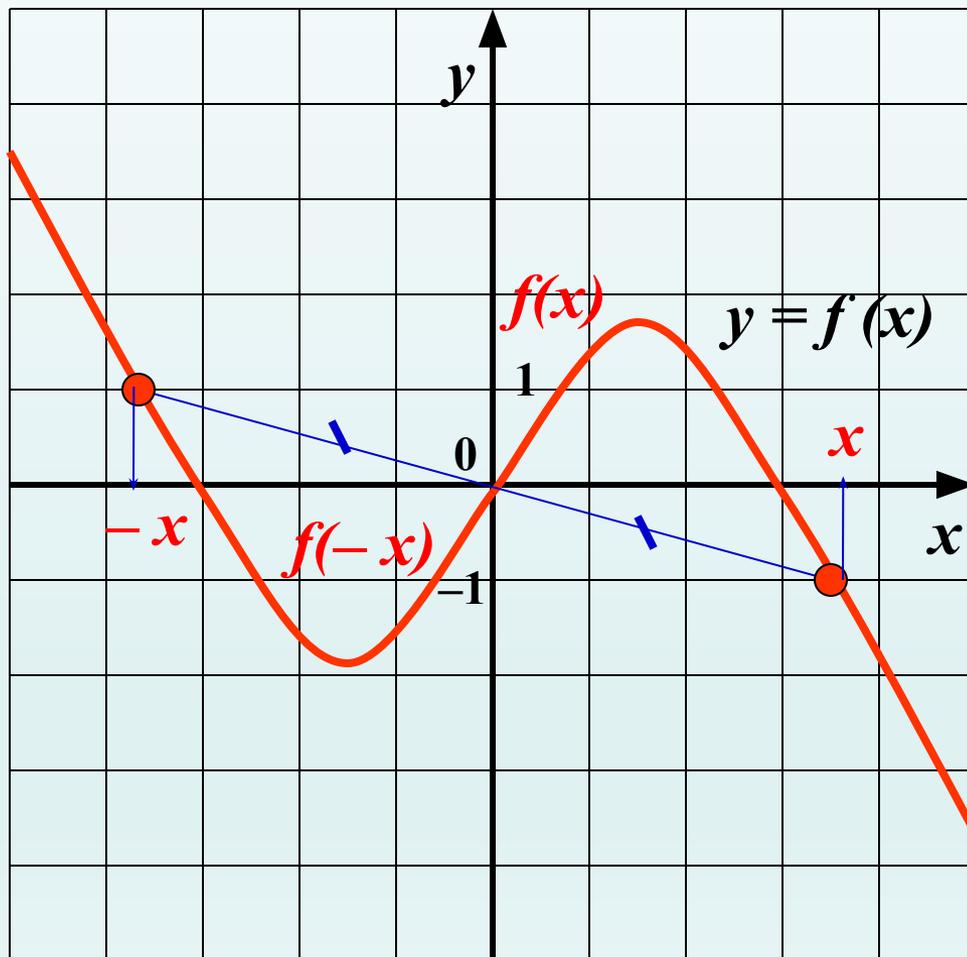
Нечётная функция

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

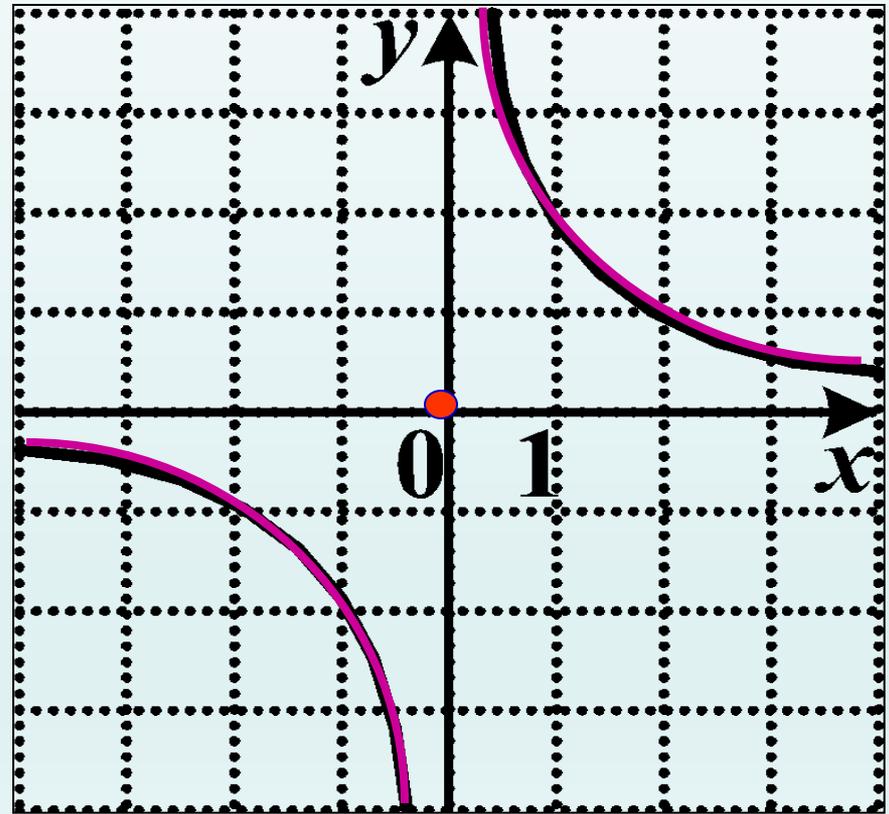
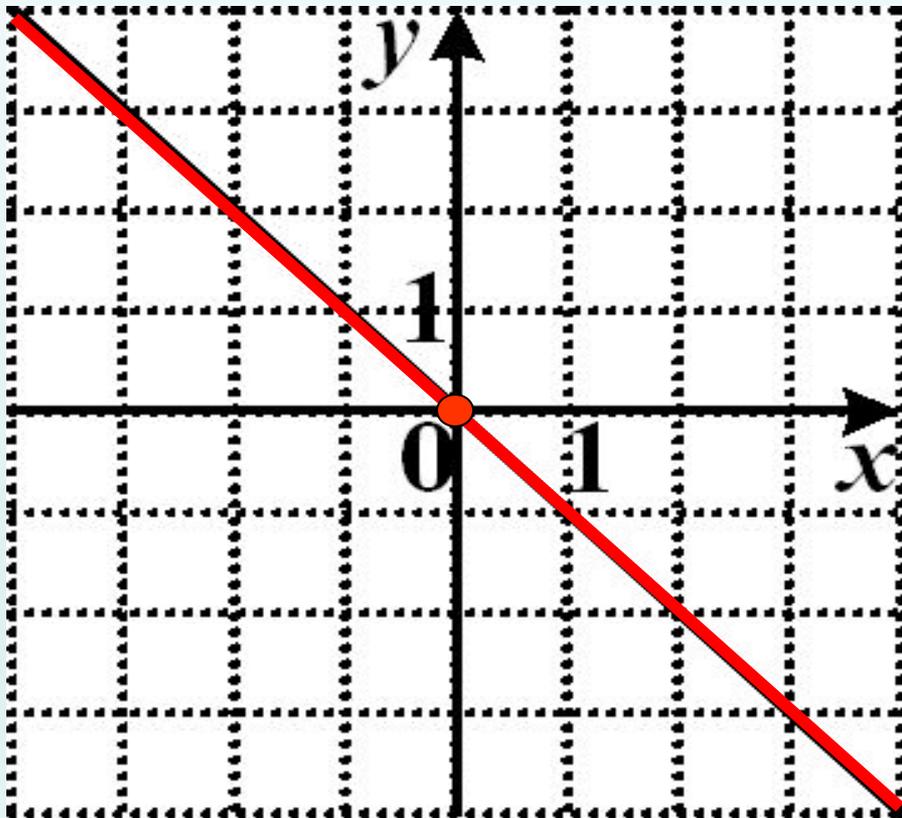
2) $f(-x) = f(x)$

График нечётной функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$



Нечетные функции

Их графики симметричны относительно начала координат.
(Мысленно «забиваем» гвоздь в точку $O(0;0)$ и поворачиваем на 180° , ветви должны совпасть)



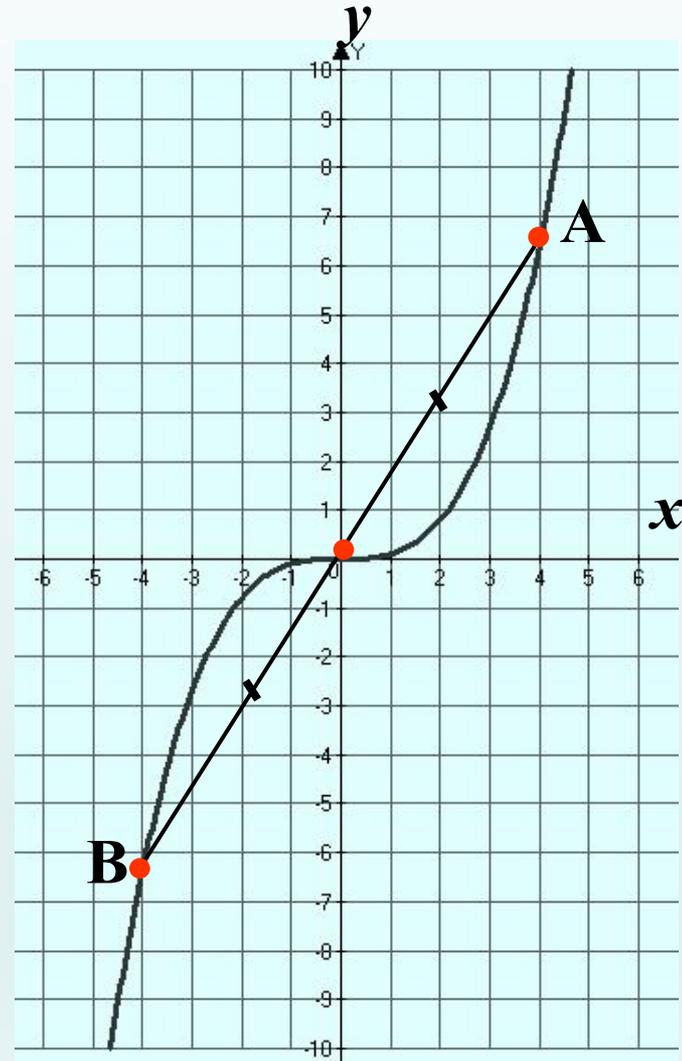
Примеры нечётных функций

$$y(x) = \frac{1}{10} x^3$$

$$y(-x) = \frac{1}{10} (-x)^3 = -\frac{1}{10} x^3$$

$$y(-x) = -y(x)$$

График данной функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$.



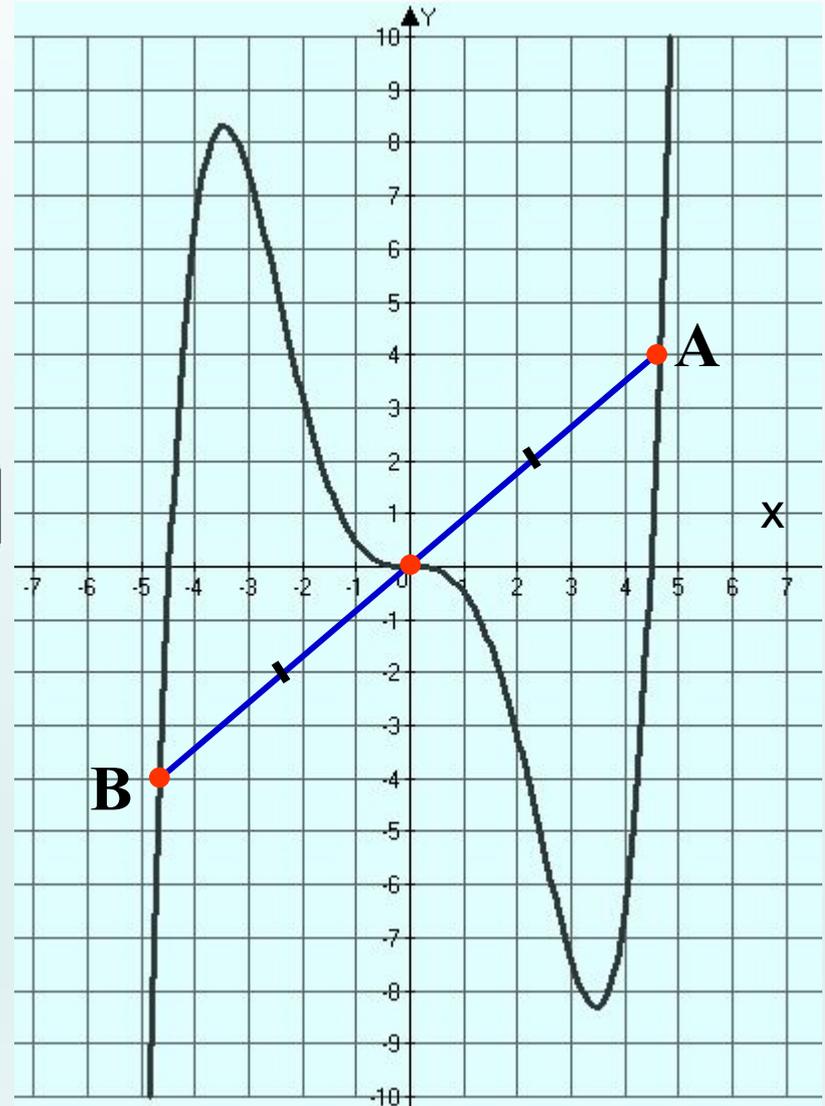
Примеры нечётных функций

$$y(x) = \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{2}x$$

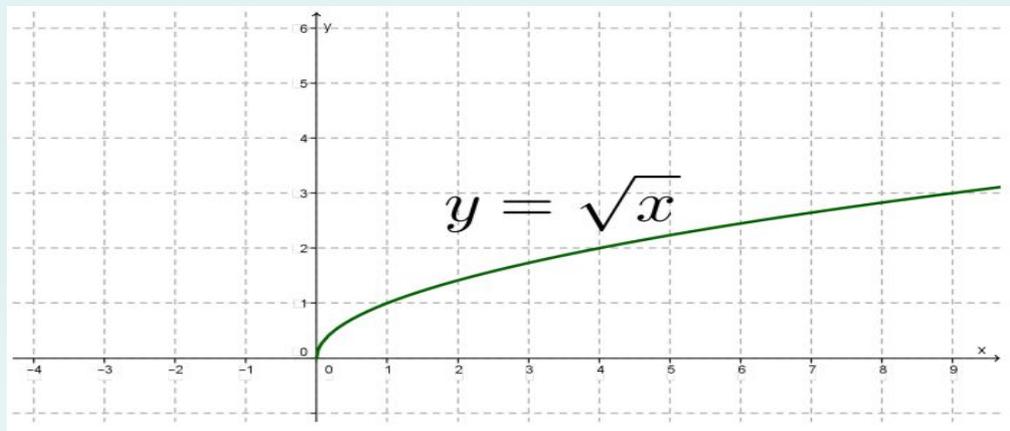
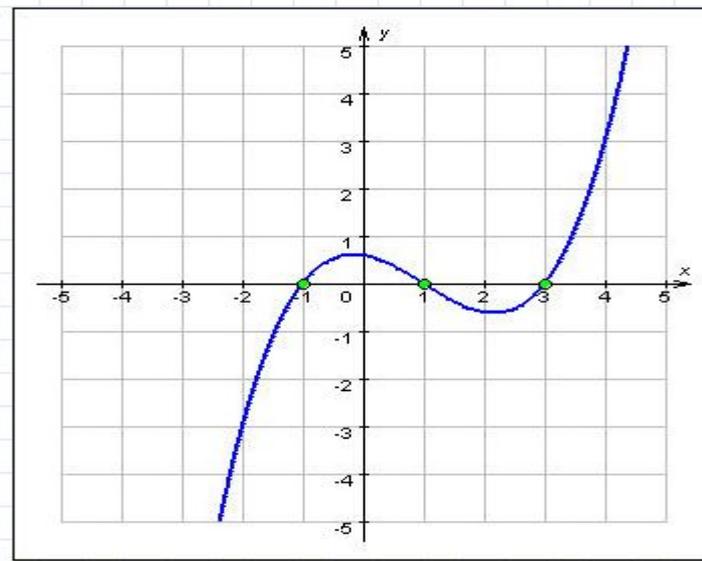
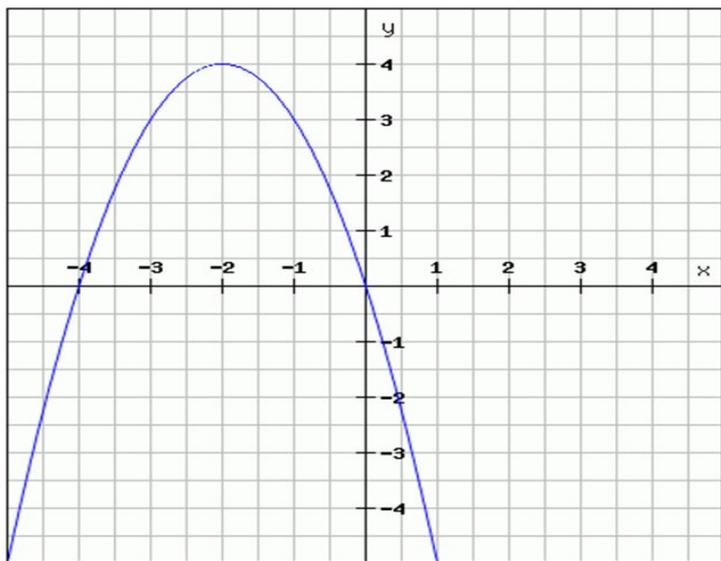
$$\begin{aligned} y(-x) &= \frac{1}{40}(-x)^5 - \frac{1}{2}(-x) = \\ &= -\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{2}x = -\left(\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

$$y(-x) = -y(x)$$

График данной функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$.



Не всякая функция является четной или нечетной.
Функции **общего вида** являются ни четными, ни нечетными.



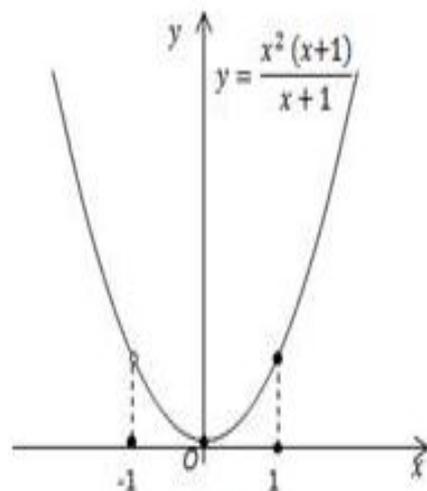
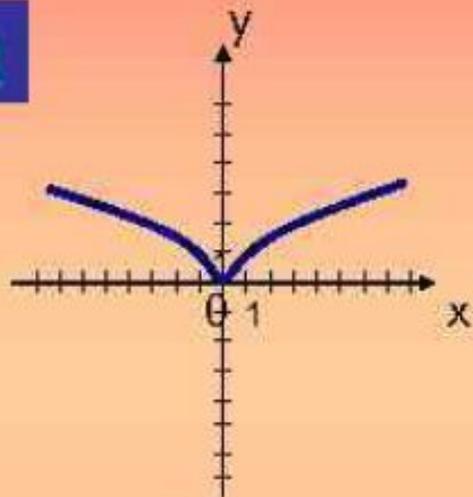


Рис.4

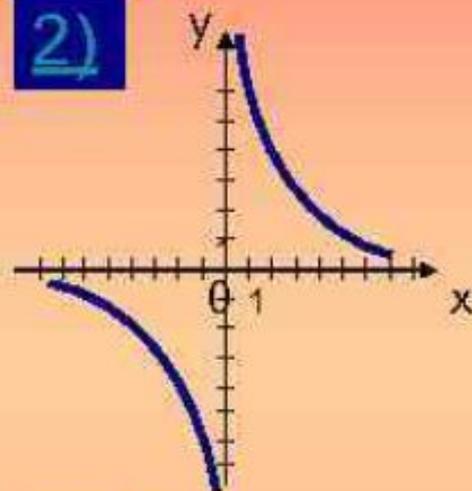
В точке $(-1; 0)$ функция не существует, а в точке $(1; 0)$ – существует. Область определения несимметрична относительно нуля, значит $y = \frac{x^2(x+1)}{x+1}$ – функция общего вида.

Задание 1: Укажите рисунок, на котором изображен график **четной** функции.

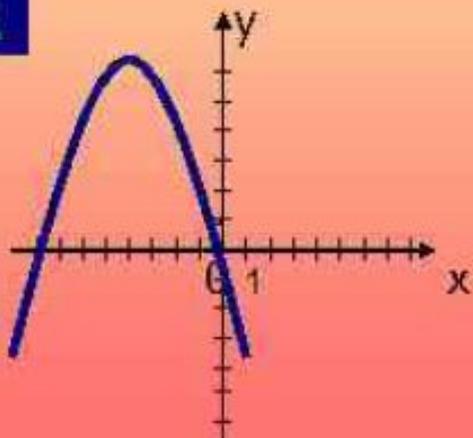
1)



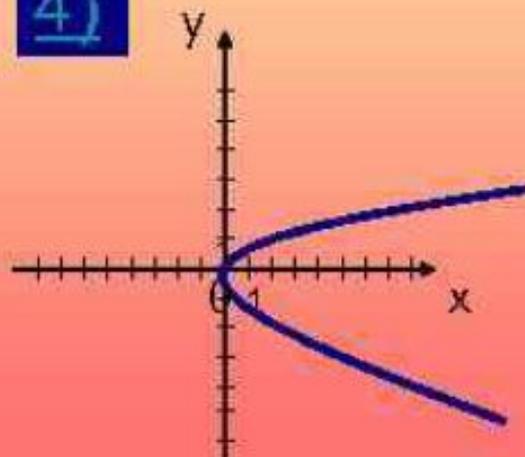
2)



3)

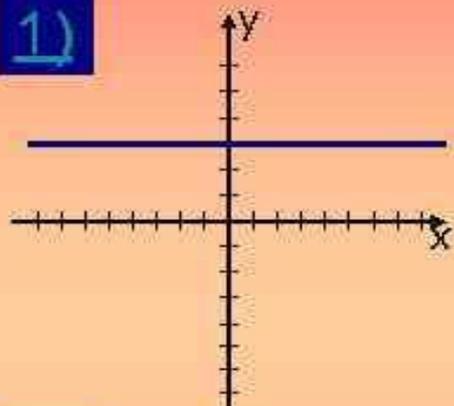


4)

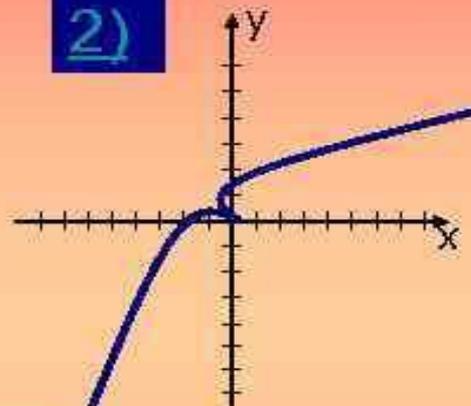


Задание 2: Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.

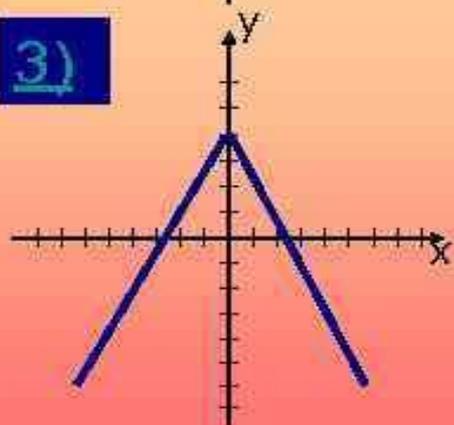
1)



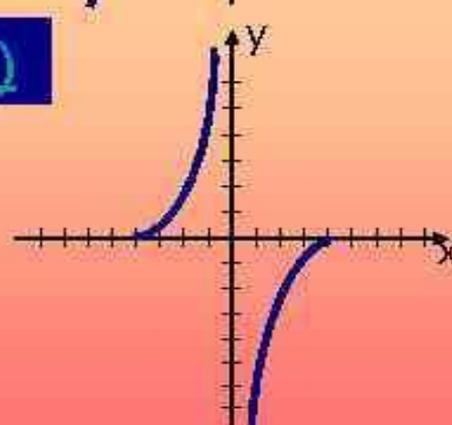
2)



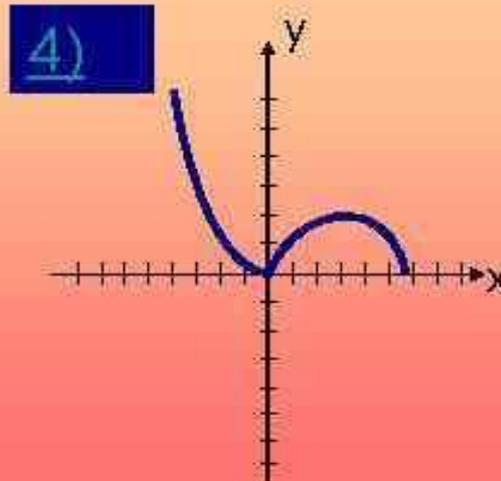
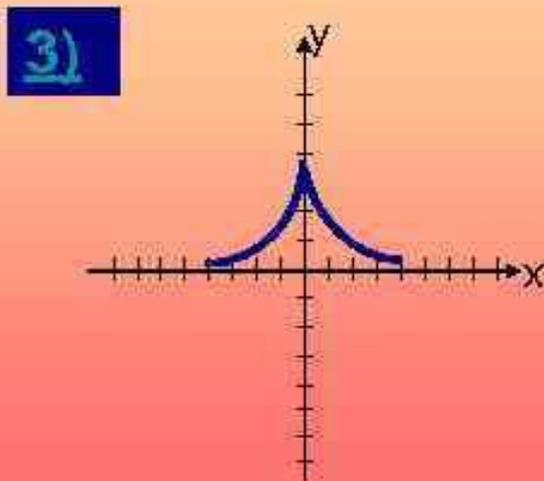
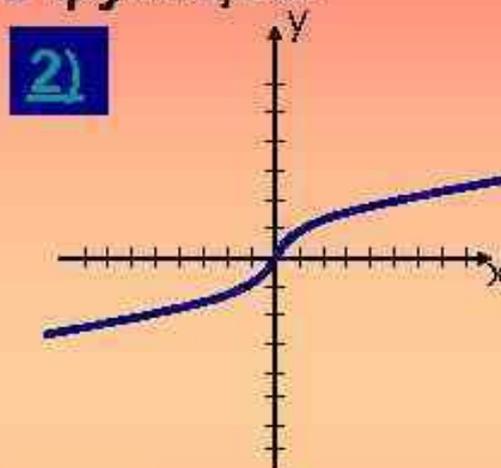
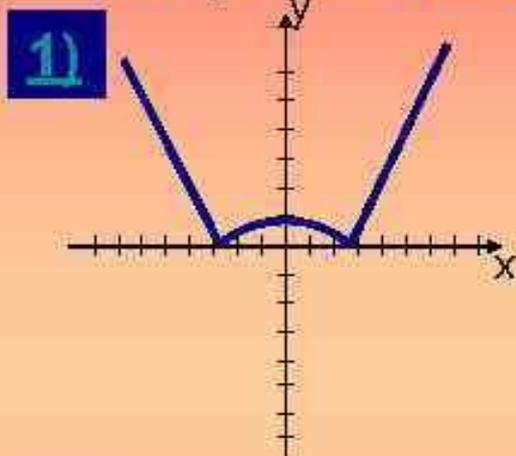
3)



4)

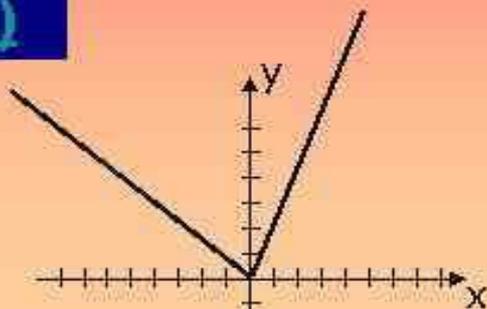


Задание 3: Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.

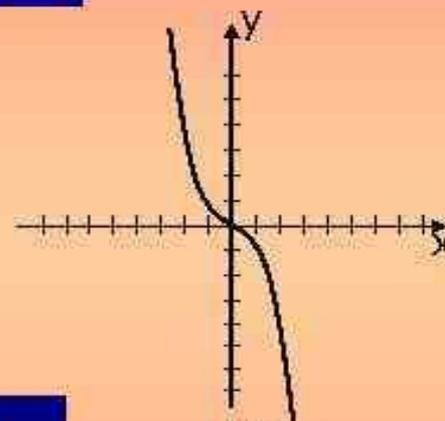


Задание 4: Укажите рисунок, на котором изображен график **четной** функции.

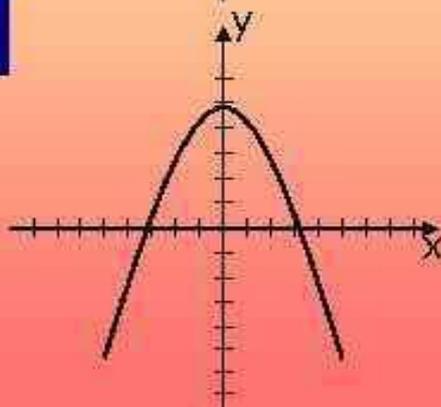
1)



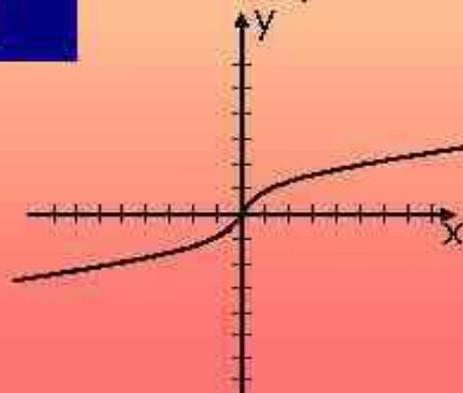
2)



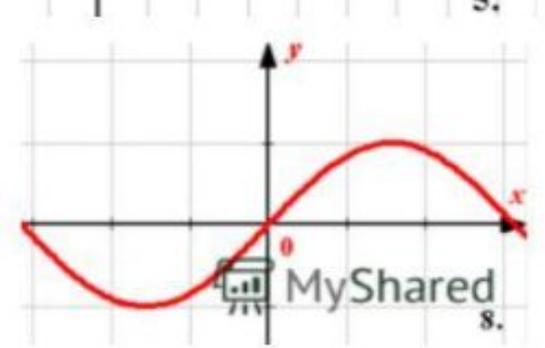
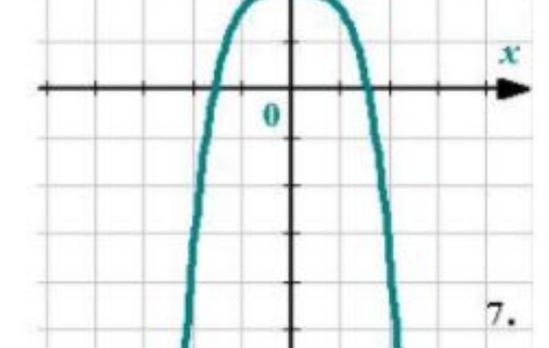
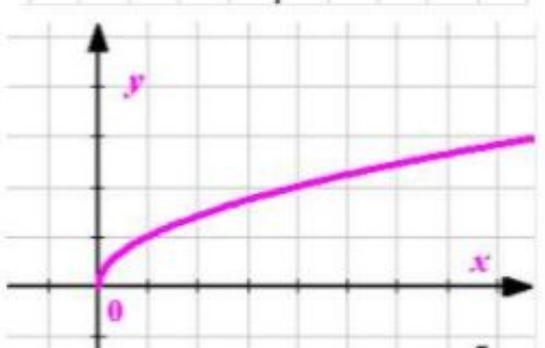
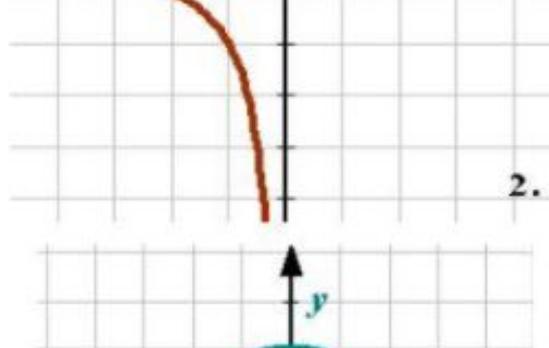
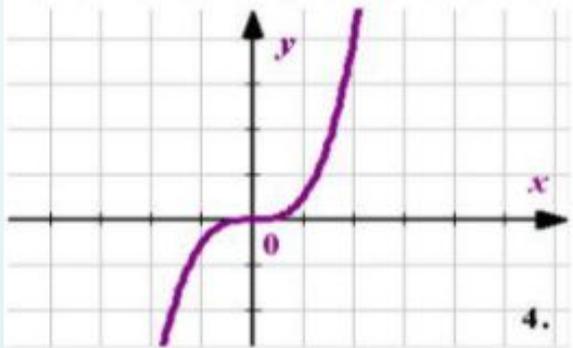
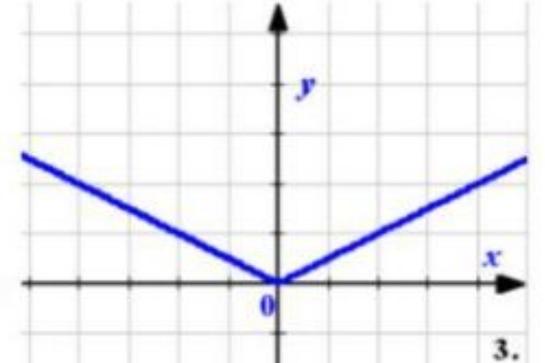
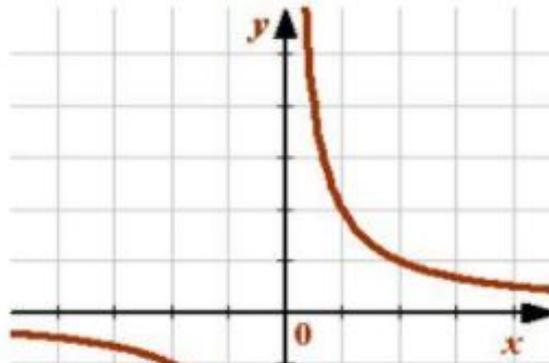
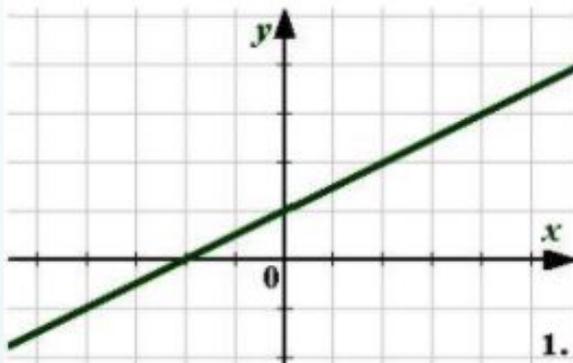
3)



4)



Укажите графики функций
I – четных. II – нечетных.



Ответ на вопросы:

- Может ли быть чётной или нечётной функция, областью определения которой является:
 - а) промежуток $[-2; 5]$;
 - б) промежуток $(-7; 7)$;
 - в) объединение промежутков $[-10; -2] \cup [2; 10]$.
- а) Функция f – чётная, $f(3) = 25$. Найти $f(-3)$.
- б) Функция f – нечётная, $f(-8) = 71$. Найти $f(8)$.

Исследовать на чётность функцию

а) $y = 3x^2 + 7$;

б) $y = x^3$;

в) $y = x^3 + 7$.

Стихотворение о четных и нечетных функциях

Жили- были 2 сестры параболы
Старшая, четная квадратичная,
Добродушная, симпатичная,
Относительно оси y
симметричная.

Младшая, нечетная кубическая,
Всегда капризная и недовольная,
Относительно точки O ,
симметричная.

Стала спрашивать квадратичная:
«Почему ты злишься, сестра
кубическая?»:

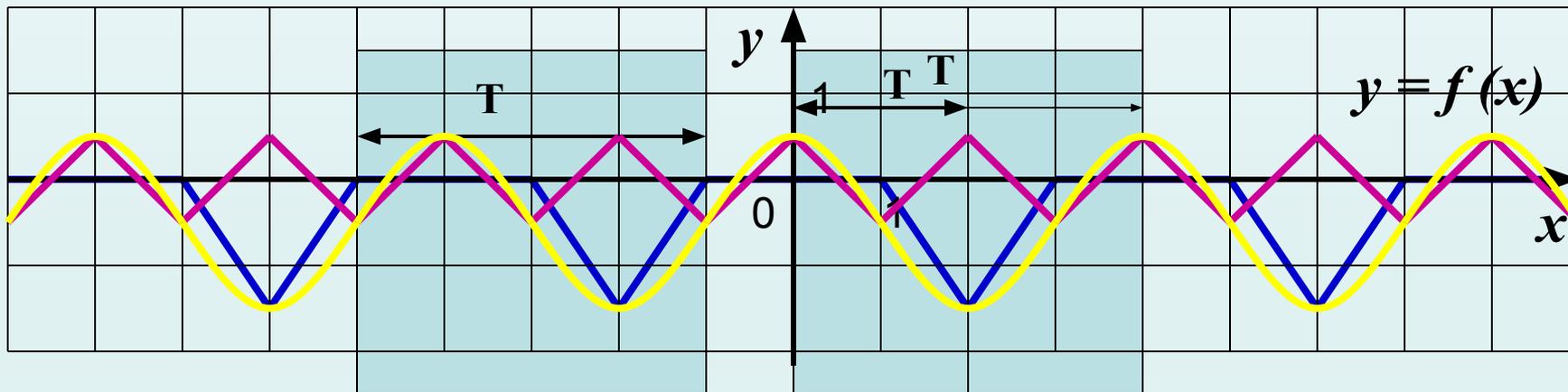
Та кричит ей: «Смотри-
ты и шире меня и полнее,
А я тоньше тебя и длиннее.»
Но ответила сестра:
«Я же старше, я четна.»
И сказала еще нежней:
«Неизвестно, кто нужней!»
Но настала ночь, и к сестре,
Пробираясь по доске, младшая
Решила: «Надо помириться.»
И относительно оси x ,
Как в зеркале, отобразиться,
И в свою сестру сразу
превратиться.

Домашнее задание:

Учебник: № 57; № 58

Периодичность функции

Графики периодических функций:



Определение

Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое отличное от нуля число T , что для любого x из области определения этой функции значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

T - период функции $y=f(x)$

У периодической функции бесконечно много периодов, если T период, то и $2T$ и $3T$ и $10T$ тоже периоды, вообще любое число вида: kT , где k - целое число.

Наименьший положительный период называется основным периодом.

$$\blacklozenge \sin(x+2\pi k)=\sin x, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\blacklozenge \cos(x+2\pi k)=\cos x, k \in \mathbb{Z}.$$

$y=\sin x, y=\cos x$ — периодические функции с
наименьшим положительным периодом 2π

$$\blacklozenge \operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x, k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacklozenge \operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x, k \in \mathbb{Z}$$

$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ — периодические функции с
наименьшим положительным периодом π



Пример №1

Найти основной период функции $y = \sin 7x$

Решение:

Пусть T основной период нашей функции, тогда:

$$\sin 7x = \sin(7(x+T)) = \sin(7x+7T).$$

мы знаем что $2\pi k$ период синуса, найдем решение нашей задачи:

$$\sin(7x+7T) = \sin(7x+ 2\pi k)$$

$$7t = 2\pi k$$

$$t = 2\pi k/7$$

Ответ: $T = 2\pi k/7$

СВОЙСТВО 1.



Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

$$2) f(-x) = f(x)$$

Пример №2.

Найти наименьший положительный период функций



Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

$$2) f(-x) = f(x)$$

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

$$2) f(-x) = f(x)$$

№62

Докажите, что число T является периодом функции f , если:

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:
1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;
2) $f(-x) = f(x)$

~ 62

a) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$; $T_1 = 4\pi$

$$T_1 = \frac{T}{|k|}$$
$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi$$

№ 63

Докажите, что функции являются нечетными:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

№ 63

a) $f(x) = 2 - \cos x$

$$f(x + T) = f(x + 2\pi) = 2 - \cos(x + 2\pi) = 2 - \cos x = f(x)$$

$$f(x - T) = f(x - 2\pi) = 2 - \cos(2\pi - x) = 2 - \cos x = f(x)$$

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x) \Rightarrow \text{периодическая}$$

b) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

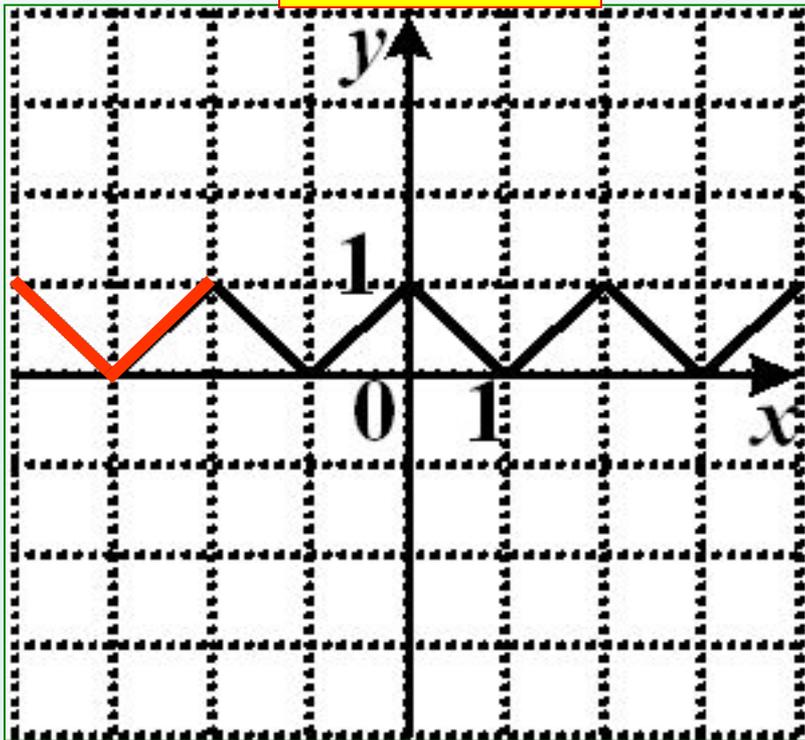
$$f(x + T) = f(x + \pi) = \operatorname{tg} 2 \cdot (x + \pi) = \operatorname{tg} 2x$$

$$f(x - T) = f(x - \pi) = \operatorname{tg} 2(x - \pi) = -\operatorname{tg} 2(\pi - x) = \operatorname{tg} 2x$$

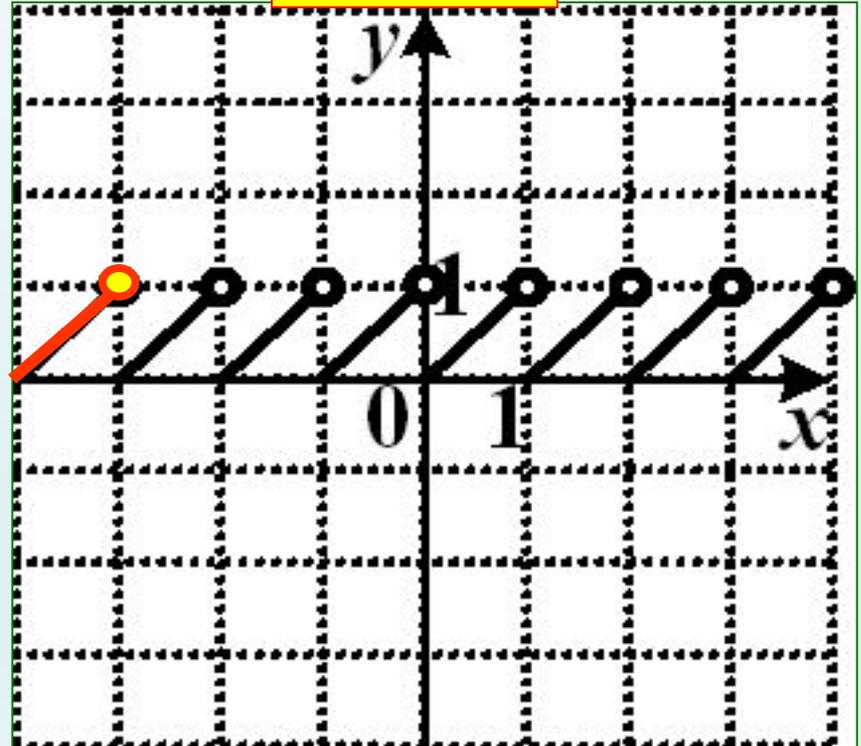
Периодические функции

График периодической функции состоит из повторяющихся одинаковых кусков, каждый из которых получается из другого параллельным переносом **вправо** или **влево** на T единиц.

$T = 2$



$T = 1$



Свойство 2.



Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

$$2) f(-x) = f(x)$$

Пример №3.



Найти период функции:

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной**, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$ с $D(f)$ называется

чётной, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно

нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$

Домашнее задание:

№ 62; №63; №64