

Лекция №14

■ Определение. Ядром линейного преобразования φ называется множество всех x пространства V , для которых $\varphi(x) = \mathbf{0}$ (обозначать будем $\text{Ker } \varphi$).

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = \mathbf{0}\}.$$

Образом линейного преобразования φ называется множество всех элементов $y \in V$, представленных в виде $y = \varphi(x)$ (обозначать будем $\text{Im } \varphi$).

$$\text{Im } \varphi = \{y \in V \mid \exists x \in V, \varphi(x) = y\}.$$

Пример 2. Пусть матрица линейного преобразования φ в базисе l_1, l_2 имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $\text{Im } \varphi$ и $\text{Ker } \varphi$.

Теорема 2. Для всякого линейного преобразования φ $\text{Im } \varphi$ и $\text{Ker } \varphi$ являются линейными подпространствами V .

■ Теорема 1. Для всякого линейного преобразования φ линейного пространства V

$$\dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\text{Ker } \varphi) = \dim V.$$

Пример 1. V – пространство многочленов степени $\leq n$,
 φ - дифференцирование.

Найти: $\text{Im } \varphi$ и $\text{Ker } \varphi$.

Операции над линейными операторами

- Определение. Пусть A и B – линейные операторы, действующие из V в W .

Суммой этих операторов называется оператор, определенный равенством:

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x).$$

Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор определяемый равенством:

$$(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x).$$

Теорема 2. Множество всех линейных операторов, действующих из V в W , является линейным пространством.

▪ Теорема 3. Если φ и ψ – линейные преобразования пространства V с матрицами A и B , в базисе $\{l_i\}$, то:

- 1) линейное преобразование $\varphi + \psi$ имеет матрицу $A + B$ в этом базисе;
- 2) линейное преобразование $\psi \cdot \varphi$ имеет матрицу $B \cdot A$ в этом базисе;
- 3) линейное преобразование I имеет матрицу E в любом базисе.

▪ Теорема 4. Пусть φ – линейное преобразование V . Тогда равносильны утверждения:

1) $Im \varphi = V$;

2) $Ker \varphi = 0$;

3) φ – взаимное однозначное отображение «на»;

4) существует φ^{-1} и φ^{-1} – линейное;

5) в любом базисе φ имеет невырожденную матрицу;

6) в некотором базисе матрица преобразования φ невырожденная.

Характеристический многочлен линейного оператора

▪ Пусть V – n -мерное линейное пространство, φ – линейный оператор и $\varphi: V \rightarrow V$.

Определение. Определителем линейного оператора φ (обозначаем $\det \varphi$) называется определитель матрицы линейного оператора φ в некотором базисе, т.е.

$$\det \varphi = \det A,$$

где A – матрица линейного оператора в некотором базисе.

Отметим, что это корректное определение.

▪ Если оператор φ имеет матрицу A в базисе $\{e_i\}$ и матрицу B в базисе $\{e'_i\}$, то $B = C^{-1}AC$, где C матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$.

$$\text{Тогда } \mathbf{det} \varphi = \mathbf{det} B = |C^{-1}||A||C| = |A| = \mathbf{det} A$$

Пусть I – тождественное преобразование.

Определение. Многочлен относительно λ $\mathbf{det}(\varphi - \lambda I) = 0$ называется характеристическим многочленом оператора φ .

Уравнение $\mathbf{det}(\varphi - \lambda I) = 0$ называется характеристическим уравнением линейного оператора φ .

Собственные значения и собственные вектора

■ Пусть φ – линейный оператор линейного пространства V : $\varphi: V \rightarrow V$.

Определение. Число λ называется собственным значением оператора φ , если существует ненулевой вектор x такой, что

$$\varphi(x) = \lambda x.$$

При этом вектор x называется собственным вектором оператора φ , отвечающим собственному числу λ .

▪ Теорема 5. Число λ является собственным значением оператора φ , если и только если λ – корень характеристического многочлена оператора φ .

Пример. Пусть матрица линейного оператора имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Найти собственные числа и собственные вектора.

Теорема 6. Матрица A линейного оператора в базисе $\{e_i\}$ диагональна, если и только если базисные вектора $e_1 \dots e_n$ являются собственными векторами оператора φ .

▪ Теорема 7. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ - линейного оператора φ различны. Тогда отвечающие им собственные вектора $u_1, u_2, \dots, u_r$ - линейно независимые.

Следствие. Если характеристический многочлен линейного оператора $\varphi, \varphi: V \rightarrow V$, имеет n различных корней и $\dim V = n$, то в некотором базисе матрица линейного оператора φ имеет диагональный вид.

Пример. Для матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ найдите базис из собственных векторов. Определите вид матрицы линейного оператора в этом базисе.