

4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

4.1. Уравнение прямой на плоскости

Уравнением линии на плоскости XOY называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде

$$F(x, y) = 0$$

или

$$y = f(x)$$

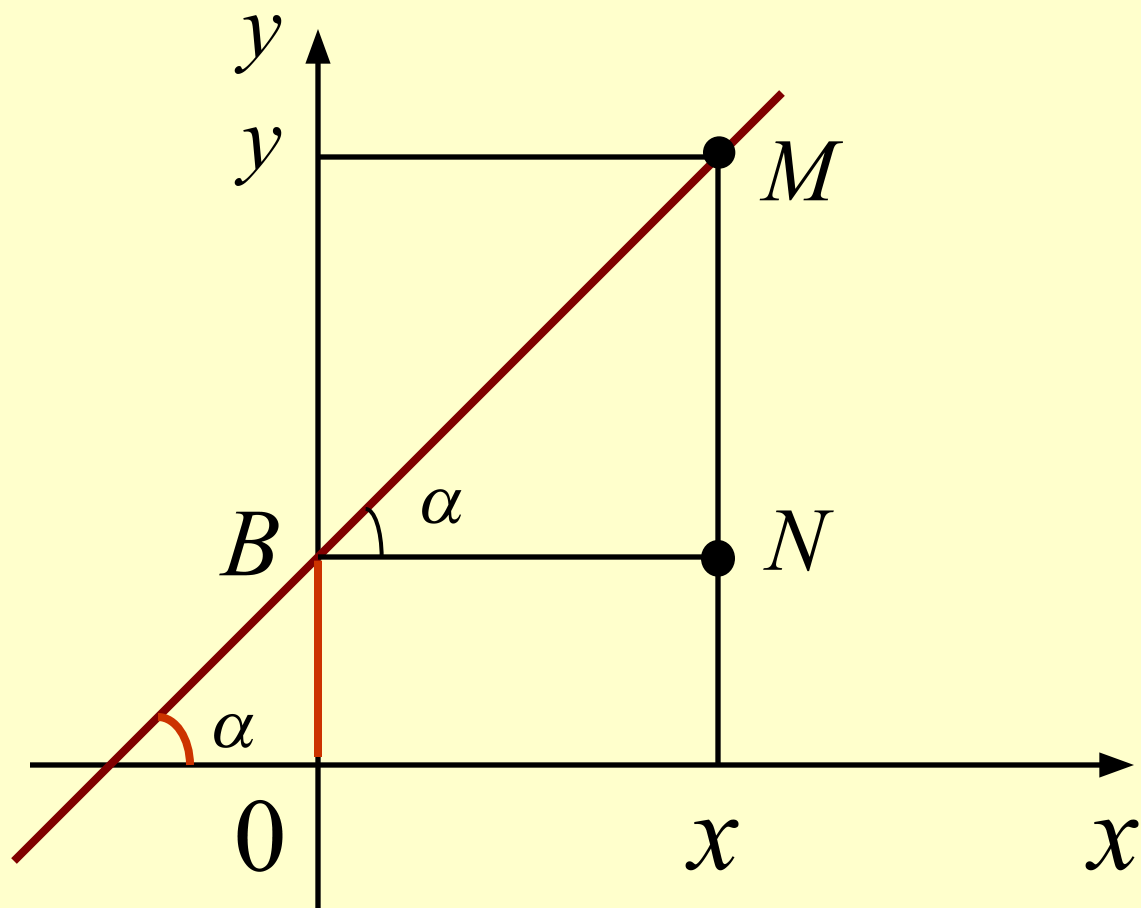
Способы задания прямой на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть задана прямая, пересекающая ось y в точке $B(0, b)$ и образующая с осью x угол α

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

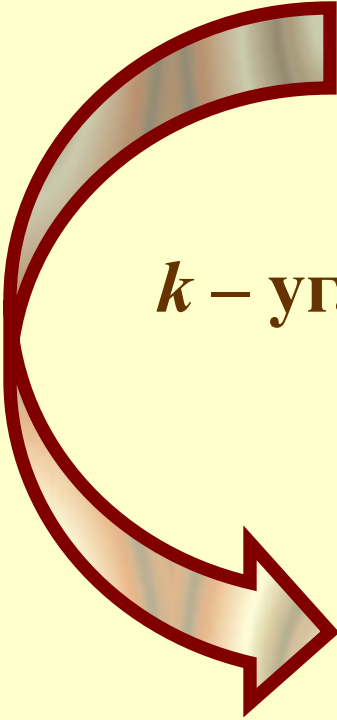
Выберем на прямой произвольную точку $M(x, y)$.



Координаты точки $N(x, b)$. Из треугольника BMN :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y - b}{x} = k$$

k – угловой коэффициент прямой.


$$y = kx + b$$

1

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

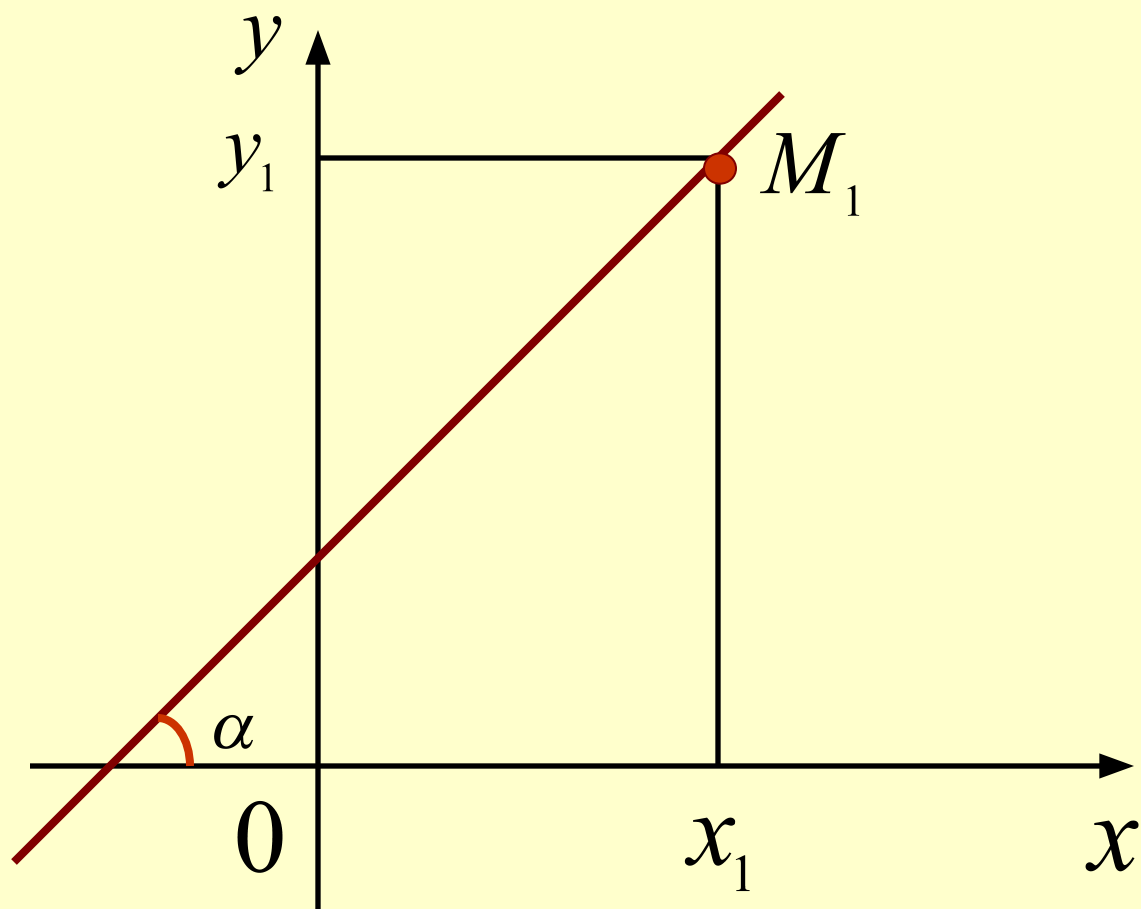
2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Пусть задана прямая, проходящая через заданную точку

$$M_1(x_1, y_1)$$

и образующая с осью x угол α

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$



Т.к. точка M_1 лежит на прямой, ее координаты должны удовлетворять уравнению (1):

$$y_1 = kx_1 + b$$

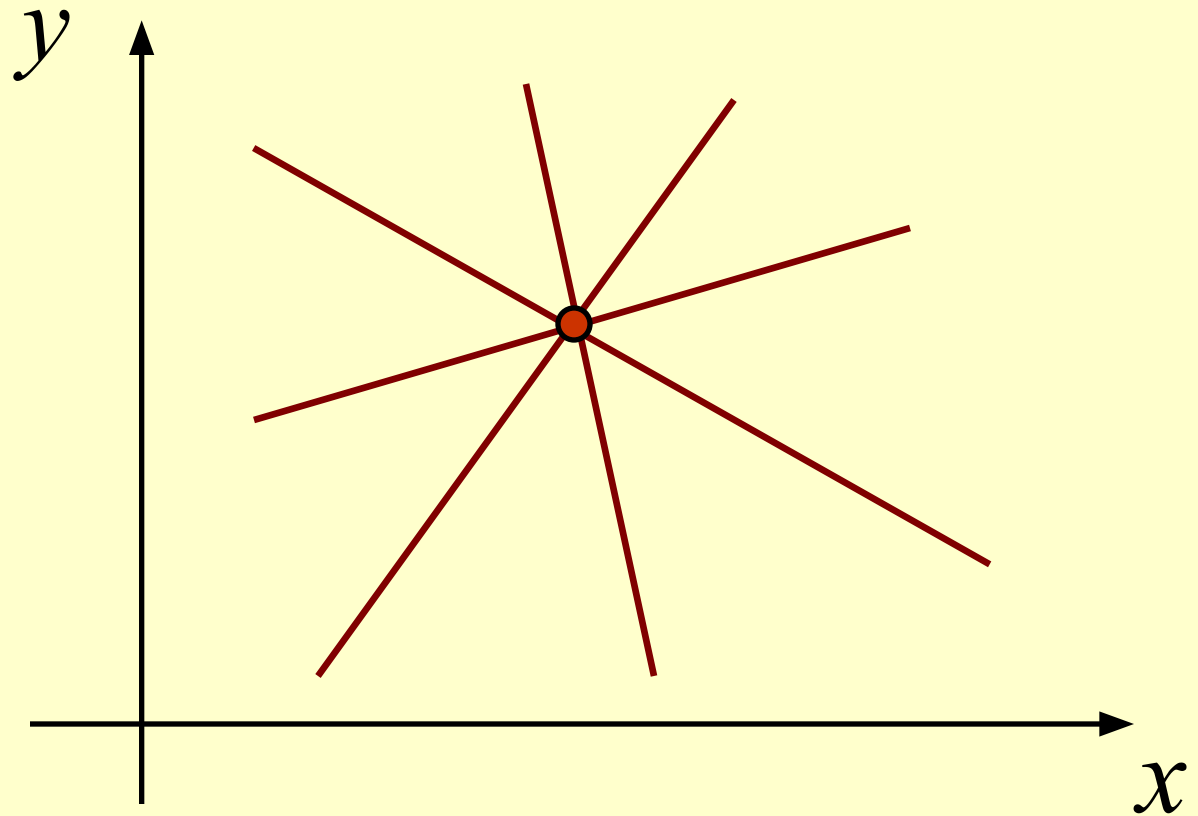
Вычитаем это уравнение из уравнения (1):

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

2

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в дан

Если в этом уравнении угловой коэффициент не определен, то оно задает пучок прямых, проходящих через данную точку, кроме прямой, параллельной оси y , не имеющей углового коэффициента.



3. Уравнение прямой, проходящей через

Пусть задана прямая, проходящая через две точки:

$$M_1(x_1, y_1)$$

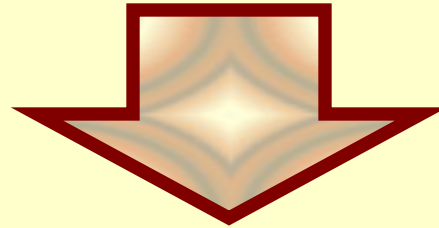
$$M_2(x_2, y_2)$$

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1 :

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Т.к. точка M_2 лежит на данной прямой, подставим ее координаты в уравнение пучка прямых:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Подставляем k в уравнение пучка прямых. Тем самым мы выделяем из этого пучка прямую, проходящую через две данные точки:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Уравнение прямой, проходящей через

ПРИМЕР.

***Составить уравнение прямой,
проходящей через точки $A(-5,4)$ и
 $B(3,-2)$.***

РЕШЕНИЕ.

Подставляем координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{y - 4}{-2 - 4} = \frac{x + 5}{3 + 5}$$



$$y - 4 = -\frac{6}{8}(x + 5)$$



$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

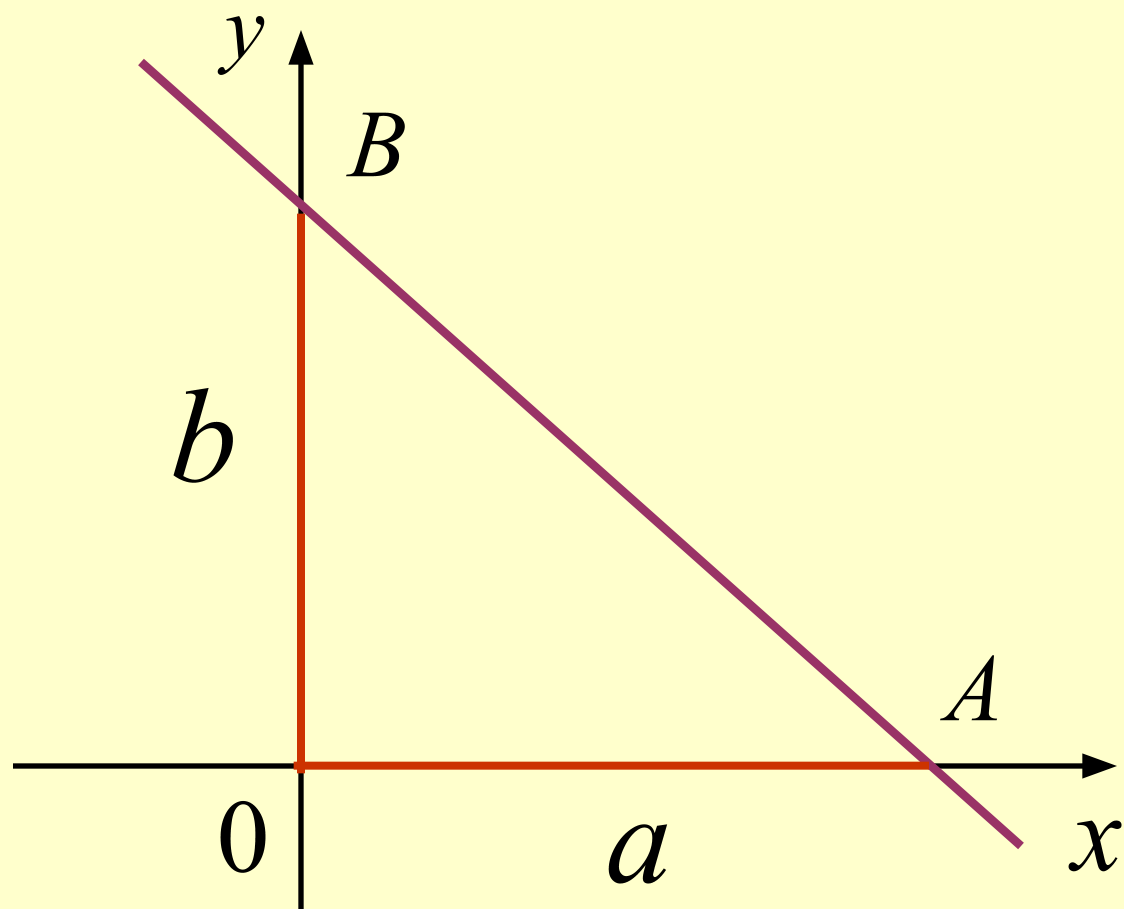
4. Уравнение прямой в от

Пусть задана прямая, отсекающая на осях координат отрезки, равные a и b .

Это значит, что она проходит через точки

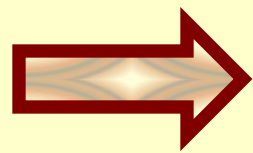
$$A(a,0) \quad B(0,b)$$

Найдем уравнение этой прямой.



Подставим координаты точек А и В в уравнение прямой, проходящей через две точки (3):

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x}{-a} + 1$$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Уравнение прямой в отрезках

5. Общее уравнение

Рассмотрим уравнение:

$$Ax + By + C = 0$$

5

Рассмотрим частные случаи этого уравнения и покажем, что при любых значениях коэффициентов A , B (не равных нулю одновременно) и C , это уравнение есть уравнение прямой на плоскости.