

# Вычеты

Пусть  $z_0 \in \bar{C}$  — изолированная особая точка функции  $f(z)$ , тогда существует некоторая окрестность этой точки, в которой  $f(z)$  — аналитическая (для  $z_0 \in C$  эта окрестность имеет вид  $0 < |z - z_0| < r$ , а для  $z_0 = \infty$  —  $|z| > r$ ).

Рассмотрим произвольный контур  $\Gamma$ , принадлежащий такой окрестности и являющийся границей некоторой области, содержащей  $z_0$ .

В силу теоремы Коши значение интеграла  $\oint_{\Gamma} f(z) dz$  не зависит от вида контура  $\Gamma$ , т.е. интеграл характеризует поведение функции  $f(z)$  в особой точке  $z_0$  и, следовательно, может быть использован для исследования функции как некоторая числовая характеристика.

**Вычетом функции**  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0 \in \bar{C}$  называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

где  $\Gamma$  — контур, принадлежащий окрестности точки  $z_0$  и охватывающий ее. Обход контура — положительный (для  $z_0 \in C$  обход против часовой стрелки, а для  $z_0 = \infty$  — по часовой).

Обозначается вычет (res — residu (фр.) — вычитать):

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz, \quad \Gamma \in O(z_0) \setminus z_0, \quad O(z_0): 0 < |z - z_0| < r,$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz, \quad \Gamma \in O(\infty) \setminus \infty, \quad O(\infty): |z| > r.$$

## Основная теорема о вычетах.

Если функция  $f(z)$ -аналитическая в  $\bar{D}$  за исключением конечного числа особых точек  $z_k \in D$ , то:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z), \quad \Gamma = \partial D$$

## Обобщенная теорема о вычетах.

Сумма вычетов функции  $f(z)$  во всех ее особых точках, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0$$

Функция  $f(z)$  в окрестности изолированной особой точки разлагается в ряд Лорана. Используя формулы для коэффициентов ряда Лорана получим следующее утверждение.

Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту  $c_{-1}$  при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in C,$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad z_0 = \infty.$$

**Пример 1а.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$  в ее особых точках.

▣ Особыми точками функции  $f(z)$  являются точки  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 3$ ,  $z_3 = \infty$ .

Разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности этих точек имеют вид:

$$f(z) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}, \quad 0 < |z+1| < 4; \quad \blacktriangleright$$

$$f(z) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{z-3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+2}} (z-3)^n, \quad 0 < |z-3| < 4; \quad \blacktriangleright$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5 \cdot 3^{n-1}}{4} \cdot \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 3. \quad \blacktriangleright$$

Следовательно,  $\operatorname{res}_{-1} f(z) = c_{-1} = \frac{-1}{4}$ ;  $\operatorname{res}_3 f(z) = c_{-1} = \frac{5}{4}$ ;

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = -\left(\frac{-1 + 5 \cdot 3^0}{4}\right) = -1 \quad \text{или}$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\left(\operatorname{res}_{-1} f(z) + \operatorname{res}_3 f(z)\right) = -\left(\frac{-1}{4} + \frac{5}{4}\right) = -1. \quad \boxtimes \quad 5$$

Разложим функцию  $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = -1$ .

⊠

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{z+2}{(z+1)(z-3)} = [w = z+1] = \frac{w+1}{w(w-4)} = (*)$$

Способ 1.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{-1/4}{w} + \frac{5/4}{w-4} = \frac{-1}{4} \left( \frac{1}{w} + \frac{5}{4(1-w/4)} \right) = \left[ \begin{array}{c} \text{если} \\ 0 < |z+1| < 4 \end{array} \right] = \\ &= \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}. \end{aligned}$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{5}{w-4} \right) = \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{5}{4(1-w/4)} \right) = \left[ \begin{array}{c} \text{если} \\ 0 < |z+1| < 4 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{4^n} \right) = \frac{1}{w} - \frac{5}{4} \frac{1}{w} - \frac{5}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{4^n} = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$



Разложим функцию  $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z=3$ .

⊠

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{z+2}{(z+1)(z-3)} = [w = z-3] = \frac{w+5}{w(w+4)} = (*)$$

Способ 1.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{5/4}{w} + \frac{-1/4}{w+4} = \frac{1}{4} \left( \frac{5}{w} - \frac{1}{4(1+w/4)} \right) = \left[ \begin{array}{c} \text{если} \\ 0 < |z-3| < 4 \end{array} \right] = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{z-3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+2}} (z-3)^n; \end{aligned}$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{1}{w+4} \right) = \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{1}{4(1+w/4)} \right) = \left[ \begin{array}{c} \text{если} \\ 0 < |z-3| < 4 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^n}{4^n} \right) = \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{n-1}}{4^n} = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-3)^n}{4^{n+2}}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$



Разложим функцию  $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = \infty$ .

$$\begin{aligned}\boxtimes \quad f(z) &= \frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{z+2}{(z+1)(z-3)} = \frac{-1/4}{z+1} + \frac{5/4}{z-3} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{z(1-3/z)} = \left[ \begin{array}{l} \text{если} \\ |z| > 3 \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{5}{4 \cdot 3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5 \cdot 3^{n-1}}{4} \cdot \frac{1}{z^n}. \boxtimes\end{aligned}$$



**Пример 16.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$  в ее особых точках.

▣ Особыми точками функции  $f(z)$  являются точки  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 3$ ,  $z_3 = \infty$ .

Разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности этих точек имеют вид:

$$f(z) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{-5}{16} \cdot \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{16 \cdot 4^{n+1}}, \quad 0 < |z+1| < 4; \quad \blacktriangleright$$

$$f(z) = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+6)}{4^{n+3}} (z-3)^n, \quad 0 < |z-3| < 4. \quad \blacktriangleright$$

Из этих разложений находим:

$$\operatorname{res}_{-1} f(z) = c_{-1} = -\frac{5}{16}; \quad \operatorname{res}_3 f(z) = c_{-1} = \frac{5}{16}.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке можно найти, используя обобщенную теорему о вычетах:

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\left( \operatorname{res}_3 f(z) + \operatorname{res}_{-1} f(z) \right) = 0 \quad \square$$

Разложим функцию  $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$  в ряд Лорана в окрестности

точки  $z = -1$ .

$$\begin{aligned} \boxtimes \quad f(z) &= \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = [w = z+1] = \frac{w+1}{w^2(w-4)} = \\ &= \frac{1}{w^2} \left( 1 + \frac{5}{w-4} \right) = \frac{1}{w^2} \left( 1 - \frac{5}{4(1-w/4)} \right) = \left[ \begin{array}{c} \text{если} \\ 0 < |z+1| < 4 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{w^2} \left( 1 - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{4^n} \right) = \frac{1}{w^2} - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{w} - \frac{5}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^{n-2}}{4^n} = \\ &= \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{-5}{16} \cdot \frac{1}{z+1} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{4^{n+3}}. \boxtimes \end{aligned}$$



Разложим функцию  $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z=3$

$$\boxtimes f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{-5}{16} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{z-3}$$

Разложим в ряд Лорана каждое слагаемое:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-3)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-3}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-3)^n, \quad |z-3| < 4;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)^2} &= -\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-3)^n \right)' = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4^{n+1}} (z-3)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{4^{n+2}} (z-3)^n, \quad |z-3| < 4. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+6)}{4^{n+3}} (z-3)^n, \quad 0 < |z-3| < 4. \quad \boxtimes$$

**Пример 2.** Найти вычет функции  $f(z) = \sin\left(1 + \frac{1}{z}\right)$  в ее особых точках.

☒ Функция имеет единственную конечную особую точку  $z=0$ .  
Разложение функции в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\begin{aligned}\sin\left(1 + \frac{1}{z}\right) &= \sin 1 \cdot \cos \frac{1}{z} + \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{z} = \\ &= \sin 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) + \cos 1 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \dots\right) = \\ &= \sin 1 + \cos 1 \cdot \frac{1}{z} - \frac{\sin 1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \dots\end{aligned}$$

Следовательно,  $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = \cos 1$ .

Так как у рассматриваемой функции других конечных особых точек нет, то  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\cos 1$ . ☒

## Вычисление вычетов

В рассмотренных выше примерах при нахождении вычетов функции раскладывались в ряды Лорана. При этом знание типа особой точки, в которой вычисляется вычет функции, не является обязательным. **Таким методом всегда определяется вычет в существенно особой точке.**

В случае устранимой особой точки и полюсов задачу вычисления вычета можно заменить некоторыми практически более удобными формулами и правилами. (Вывод этих формул и правил в общем виде, связан с исследованием разложения функции в ряд в окрестности особой точки).

## Вычисление вычетов в **конечной** особой точке $z_0 \neq \infty$

1. Если **конечная** особая точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  является устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , то  $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$ . 

2. Если  $z_0$  полюс  $n$ -го порядка функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z - z_0)^n], \quad z_0 = \Pi(n), \quad \img alt="grey triangle pointing right" data-bbox="878 421 915 468"/>$$

В частности, если  $z_0$  полюс 1-го порядка, то

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot (z - z_0)].$$

3. Если  $z_0$  полюс 1-го порядка функции  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z), \psi(z)$  – аналитические в точке  $z_0$  функции и  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ , то

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad \img alt="grey triangle pointing right" data-bbox="723 875 760 922"/>$$

1. Если **конечная** особая точка  Сейчас  является устранимой  
особой точкой функции  Сейчас ..., то  Сейчас не удается  
отобразить  
рисунок.

⊠ В случае устранимой особой точки ряд Лорана функции  
не содержит главную часть, следовательно,  $c_{-1} = 0$ . ⊠



1. Если  $z_0 - \Pi(n)$ , то

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z - z_0)^n], \quad z_0 - \Pi(n),$$

В частности, если  $z_0 - \Pi(1)$ , то  $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot (z - z_0)]$ .

□ Пусть  $z_0 \in \mathbb{C}$  полюс  $n$ -го порядка функции  $f(z)$ . Тогда разложение функции в ряд в окрестности  $z_0$  имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r$$

Умножив обе части равенства на  $(z - z_0)^n$  и продифференцировав результат  $(n-1)$  раз, получим выражение

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z - z_0)^n] = (n-1)! c_{-1} + n! c_0 (z - z_0) + \dots,$$

из которого определяем

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z - z_0)^n]. \quad \square$$



2. Если  $z_0$  – П(1) функции  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  —

аналитические в точке  $z_0$  функции и

$$\varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0,$$

то  $\operatorname{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ .

$$\begin{aligned} \boxtimes \operatorname{res}_{z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \cdot (z - z_0) \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} \right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$



## Вычисление вычетов в **бесконечно удаленной** особой точке

1. Если  $z = \infty$  – **устраняемая** особой точкой функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ (f(\infty) - f(z)) \cdot z \right]$$

В частности, если  $z = \infty$  является нулем функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-z \cdot f(z)).$$



**Следствие.** Если  $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  при  $z \rightarrow \infty$ , то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -A, & k = 1; \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$



2. Если  $f(z)$  представима в виде  $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi(\eta)$ , где

$\varphi(\eta)$  регулярна в точке  $\eta = 0$ , то  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$ .



▣ Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной устранимой особой точки имеет вид:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad r < |z| < \infty$$

Коэффициент  $c_{-1}$  можно определить из этого равенства следующим образом:

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ (f(z) - c_0) \cdot z \right].$$

Так как, очевидно, что  $c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ , то, доопределяя функцию, положим  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0$ . Получаем формулу для вычисления вычета в  $z = \infty$  – устранимой особой точке функции  $f(z)$ :

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ (f(\infty) - f(z)) \cdot z \right] \quad \square$$



**Следствие.** Если  $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  при  $z \rightarrow \infty$ , то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -A, & k=1; \\ 0, & k \geq 2. \end{cases} \quad (*)$$

Если  $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  при  $z \rightarrow \infty$ , то точка  $z = \infty$  является нулем функции  $f(z)$   $k$ -го порядка и разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки  $z = \infty$  имеет вид:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad r < |z| < \infty,$$

где  $c_{-k} = A \neq 0$ , а значит, выполняется (\*).

---

Если  $z = \infty$  — является нулем функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-z \cdot f(z)).$$



2. Если  $f(z)$  представима в виде  $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi(\eta)$ , где  $\varphi(\eta)$  регулярна в точке  $\eta = 0$ , то  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$ .

▣ Пусть  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^f z^n$  – разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда

$$\varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^f z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^f \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^f \eta^n.$$

В силу единственности разложения в ряд Лорана полученный ряд является разложением функции  $\varphi(\eta)$  в точке  $\eta = 0$ , т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^f \eta^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^\varphi \eta^n,$$

а значит,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}^f = -c_1^\varphi = -\varphi'(0). \quad \square$$



**Пример 3.** Найти вычеты функции  $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$  в ее особых точках.

⊠ 1.  $z_1 = 3$  – полюс 1-го порядка, следовательно,

$$\operatorname{res}_{z=3} f_2(z) = \operatorname{res}_{z=3} \frac{z+2}{(z+1)^2} \frac{1}{z-3} = \left. \frac{z+2}{(z+1)^2} \frac{1}{(z-3)'} \right|_{z=3} = \left. \frac{z+2}{(z+1)^2} \right|_{z=3} = \frac{5}{16}.$$

2.  $z_2 = -1$  – полюс 2-го порядка, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-1} f_2(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ f_2(z) \cdot (z+1)^2 \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z+2}{z-3} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z-3-(z+2)}{(z-3)^2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-5}{(z-3)^2} = -\frac{5}{16}. \end{aligned}$$

3.  $z_3 = \infty$  – ноль функции, следовательно,  $\operatorname{res}_{z=\infty} f_2(z) = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z+2)z}{(z+1)^2(z-3)} = 0.$  ⊠

Замечание. Этот пример уже был решен ранее (см. пример 1б). Для получения результата (без использования формул, выведенных на последних слайдах) требовалось строить разложение в ряд Лорана (что для этой функции является весьма трудоемким процессом). Пример показывает насколько быстрее найти вычеты для данной функции с использованием выведенных формул. В общем случае, выбор технологии вычисления определяется функцией.

**Пример 4.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$  в ее особых точках.

▣ Вычет в точке  $z = 1$ :  $\operatorname{res}_1 f(z) = \left( \frac{1}{z^2 + 1} \right)' \bigg|_{z=1} = \frac{2z}{z^2 + 1} \bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}$

Вычет в точках  $z = \pm i$

Способ 1.  $\operatorname{res}_{\pm i} f(z) = \frac{1}{(z \pm i)(z - 1)^2} \bigg|_{z=\pm i} = \frac{1}{\pm 2i(\pm i - 1)^2} = \frac{1}{4},$

Способ 2.  $\operatorname{res}_{\pm i} f(z) = \frac{1/(z - 1)^2}{(z^2 + 1)'} \bigg|_{z=\pm i} = \frac{1}{2z(z - 1)^2} \bigg|_{z=\pm i} = \frac{1}{4}.$

Вычет в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$ :

Способ 1.  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = - \left( \operatorname{res}_1 f(z) + \operatorname{res}_i f(z) + \operatorname{res}_{-i} f(z) \right) = - \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right).$

Способ 2. Учитывая, что  $z = \infty$  является нулем функции  $f(z)$ , получим

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-z f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-z}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = 0. \quad \square$$

**Пример 5\*.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2z})}$  в ее особых точках.

▣ Особыми точками являются  $z=0$  и  $z=i\pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (корни уравнения  $e^{2z}=1$ ).

Точка  $z=0$  является полюсом 2-го порядка, так как

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(1-e^{2z})} = \frac{1}{z \left( 1 - \left( 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \dots \right) \right)} = \\ &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{-1}{2 + \frac{4z}{2!} + \frac{8z^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{z^2} \cdot \varphi(z), \quad \varphi(0) = \frac{-1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{res}_0 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( z^2 f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z}{(1-e^{2z})} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-e^{2z} + 2ze^{2z}}{(1-e^{2z})^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \left( 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2} + o(z^2) \right) + 2z(1 + 2z + o(z))}{(-2z)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z^2 + o(z^2)}{4z^2} = \frac{1}{2}. \quad 24 \end{aligned}$$

Покажем, что точки  $z = i\pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  являются простыми полюсами функции  $f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2z})}$ . Для этого достаточно показать, что  $\varphi(z) = \frac{z - i\pi k}{z(1-e^{2z})}$  не обращается в 0 в точке  $z = i\pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i\pi k} \varphi(z) &= \lim_{z \rightarrow i\pi k} \frac{z - i\pi k}{z(1-e^{2z})} = \left[ w = z - i\pi k \right] = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{(w + i\pi k)(1-e^{2(w+i\pi k)})} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{(w + i\pi k)(1-e^{2w})} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{(w + i\pi k)(-2w)} = -\frac{1}{2i\pi k} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{i\pi k} f(z) = \frac{1/z}{(1-e^{2z})'} \bigg|_{z=i\pi k} = \frac{1/z}{-2e^{2z}} \bigg|_{z=i\pi k} = \frac{1}{-2i\pi k} = \frac{i}{2\pi k}. \quad \square$$