

Математическая ЛОГИКА

- § 8. Логика и компьютеры
- § 9. Логические элементы
- § 10. Другие логические операции
- § 11. Логические выражения
- § 12. Множества и логика

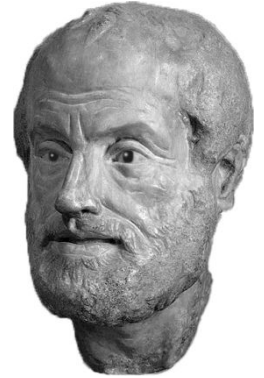
Математическая логика

§ 5. Логика и компьютер

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λοῦκος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель
(384-322 до н.э.)

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- ✓ Сейчас идет дождь.
- ✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

- ✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

Логика и компьютер

двоичная логика

! Любое высказывание может быть **ложно** (0) или **истинно** (1).

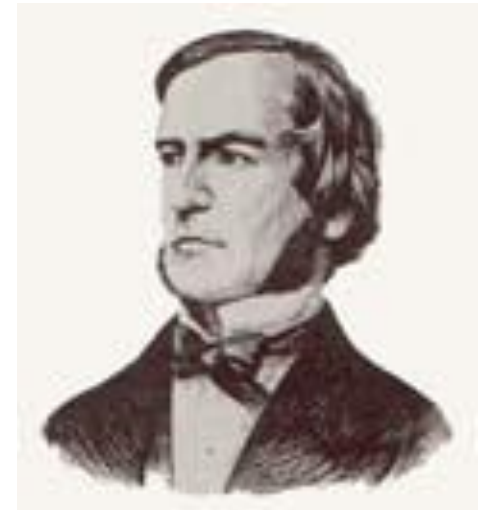
Логика изучает операции между 0 и 1!



! Связь с двоичным кодированием!

Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, упрощают и преобразуют логические высказывания, вычисляют их значения.

Алгебра высказываний,
булева алгебра



Джордж Буль

Простые и составные высказывания

A – Сейчас идет дождь. }
B – Форточка открыта. }

простые
высказывания
(элементарные)

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также \bar{A} , not A

таблица
истинности
операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X — это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой — значение выражения X для каждой комбинации.

Разные операции с одной переменной



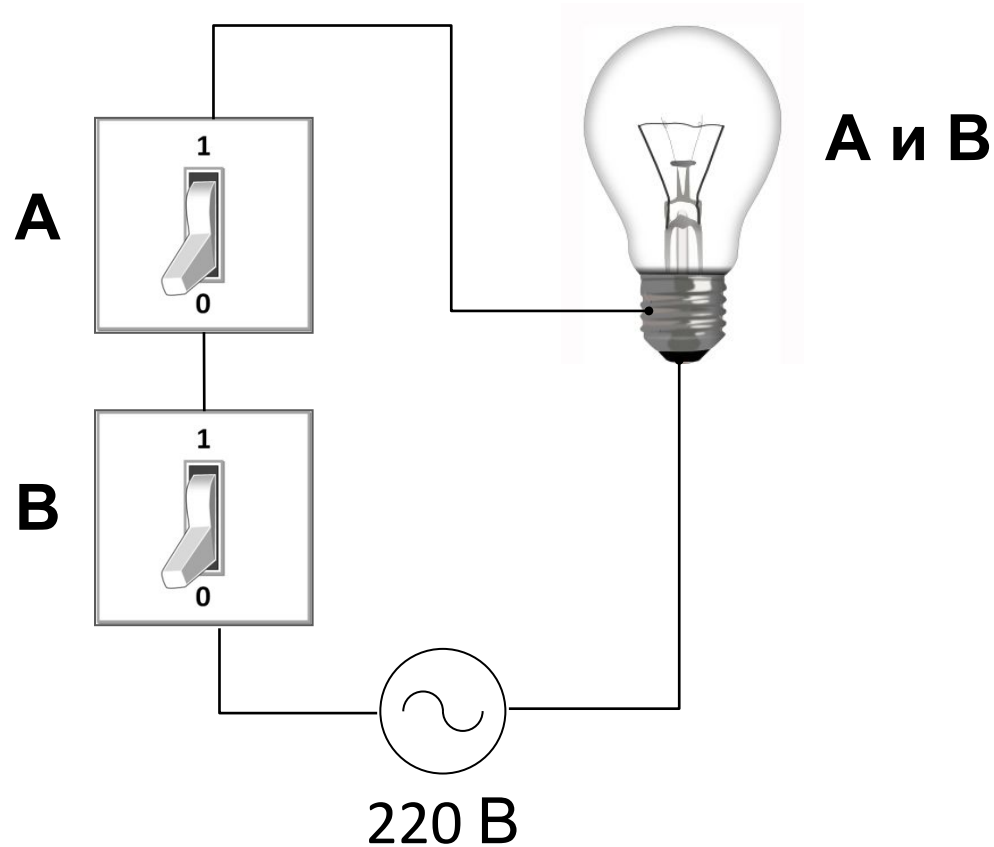
Сколько всего?

$$2^2 = 4$$

A	не A	A	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1

Операция И

Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также $A \cdot B$, A and B



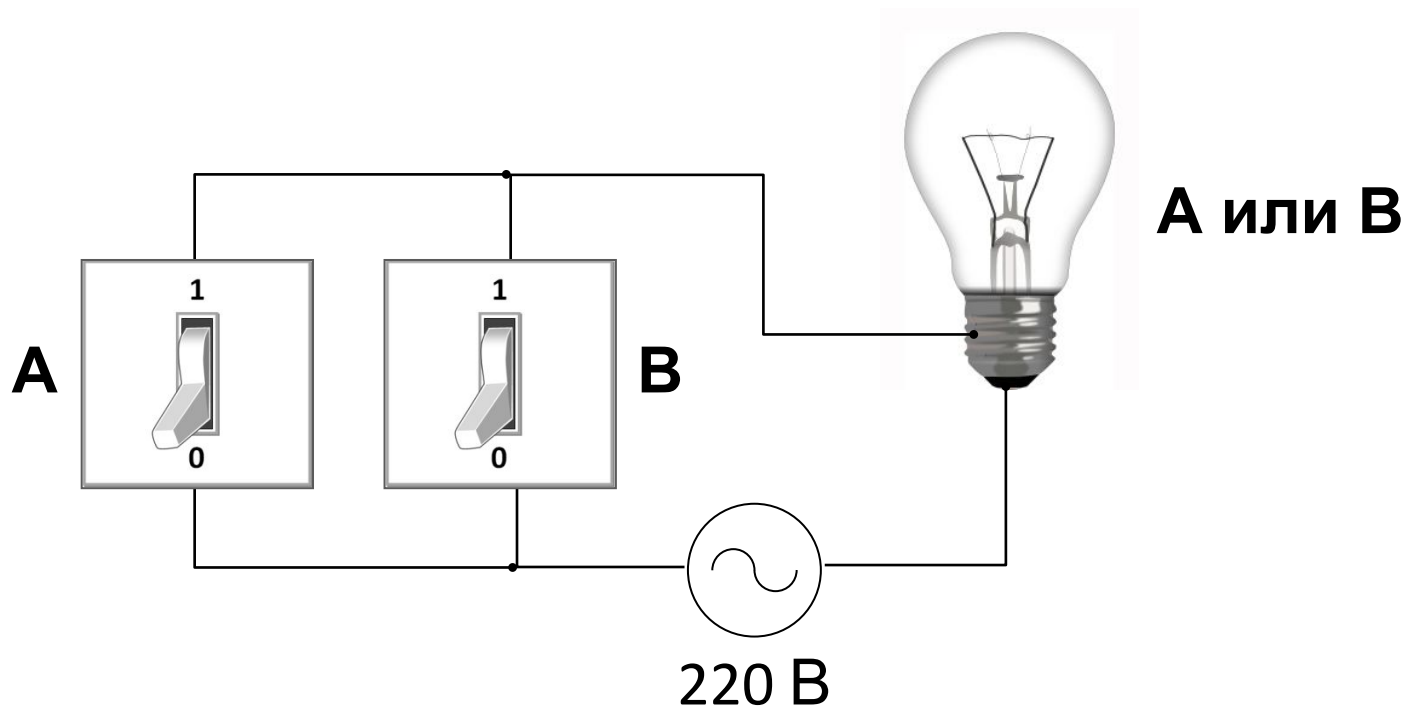
Почему
умножение?

конъюнкция – от лат. *conjunctio* — соединение

$$A \text{ и } B = \min(A, B)$$

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, A or B



Почему
сложение?



$1+1=1$

ДИЗЪЮНКЦИЯ – от лат. *disjunctio* — разъединение

A или B = $\max(A, B)$

Упрощение логических выражений

$$A \text{ и } 0 = A \cdot 0 = 0$$

$$A \text{ и } 1 = A \cdot 1 = A$$

$$A \text{ или } 0 = A + 0 = A$$

$$A \text{ или } 1 = A + 1 = 1$$

$$A \text{ и не } A = A \cdot \overline{A} = 0$$

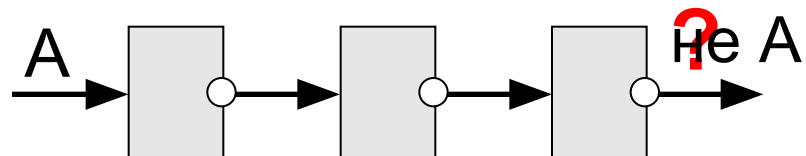
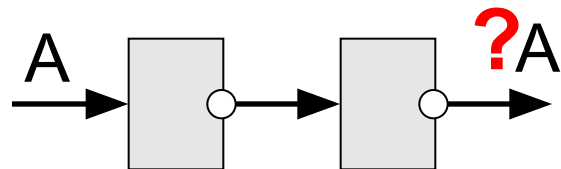
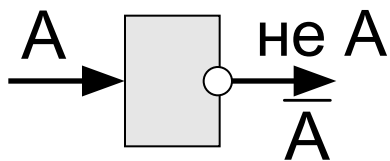
$$A \text{ или (не } A) = A + \overline{A} = 1$$

Математическая логика

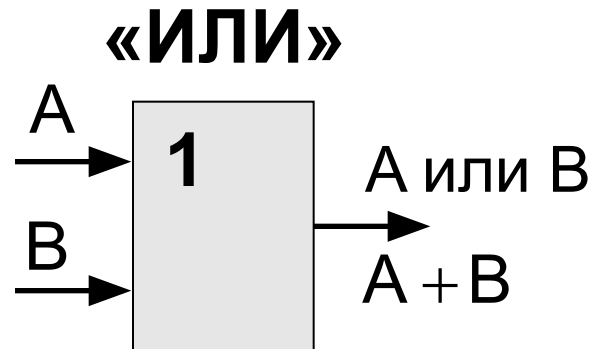
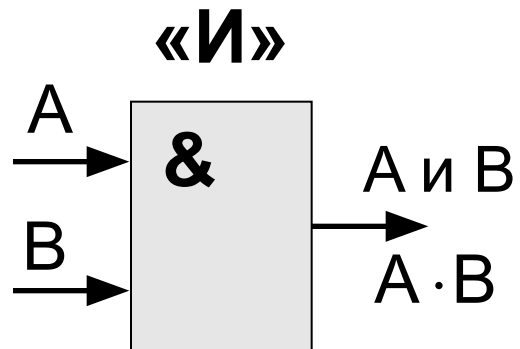
§ 6. Логические элементы

Элемент «НЕ»

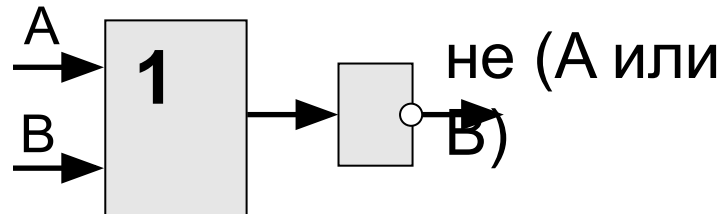
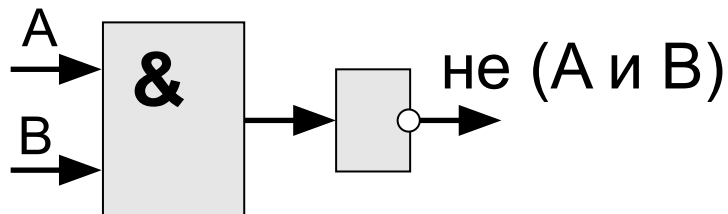
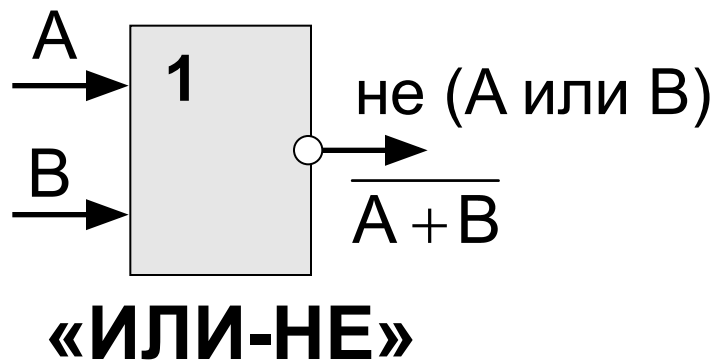
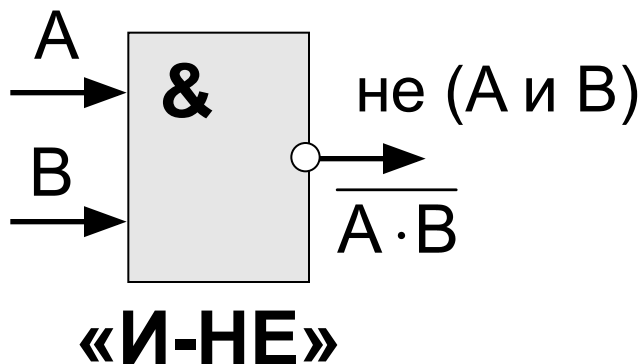
значок
инверсии



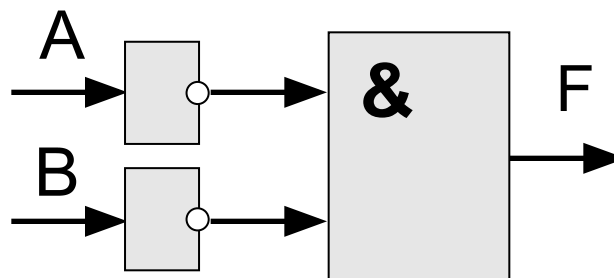
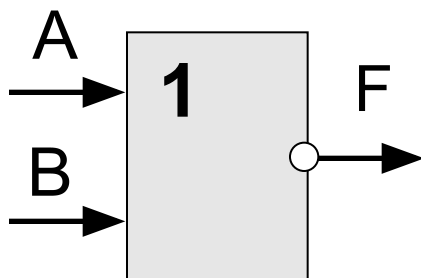
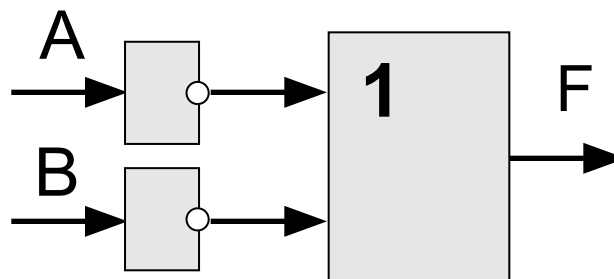
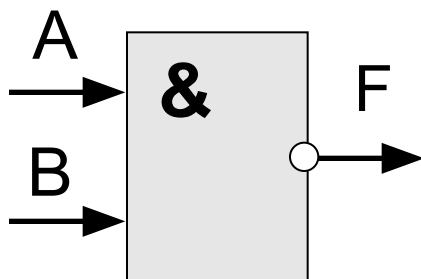
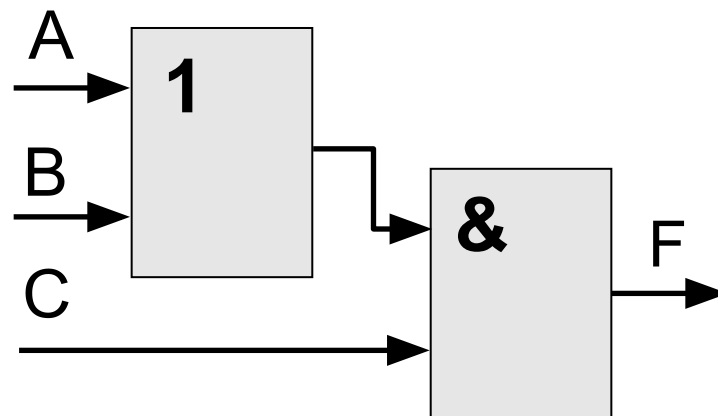
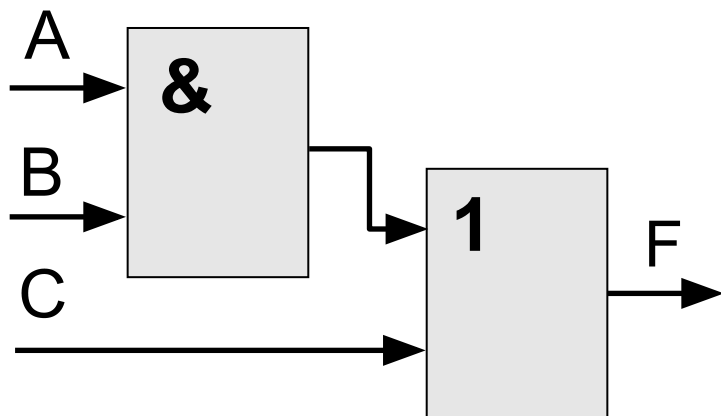
Элементы «И» и «ИЛИ»



Двойные элементы:



Составьте таблицы истинности



Математическая логика

§ 7. Другие логические операции

Операции с двумя переменными



Сколько всего?

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

0 или 1

$$2^4 = 16$$

Импликация

A

$$X = A \rightarrow B$$

$X =$ Если *идёт дождь*, то

Лена раскрывает зонтик.

B

Импликация $A \rightarrow B$ истинна, если **не исключено**, что из A следует B .

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Идёт дождь, но Лена не раскрыла зонтик.

Постройте таблицы истинности

$$X = B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow A \neq A \rightarrow B$$

$$X = \overline{A} + B$$

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

$$X = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

$$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

Эквиваленция

Высказывание «**A** \leftrightarrow **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Постройте таблицы истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$X = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$A \leftrightarrow B = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B)}$$

Исключающее «ИЛИ»

Высказывание « $A \oplus B$ » истинно тогда, когда истинно A или B , но **не оба одновременно** ($A \neq B$).

«Либо пан, либо пропал».

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

арифметическое
сложение, $1+1=2$

остаток

сложение по модулю 2: $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$

Постройте таблицы истинности

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$X = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

$$A \oplus B = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

Упрощение логических выражений

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \oplus A = 0$$

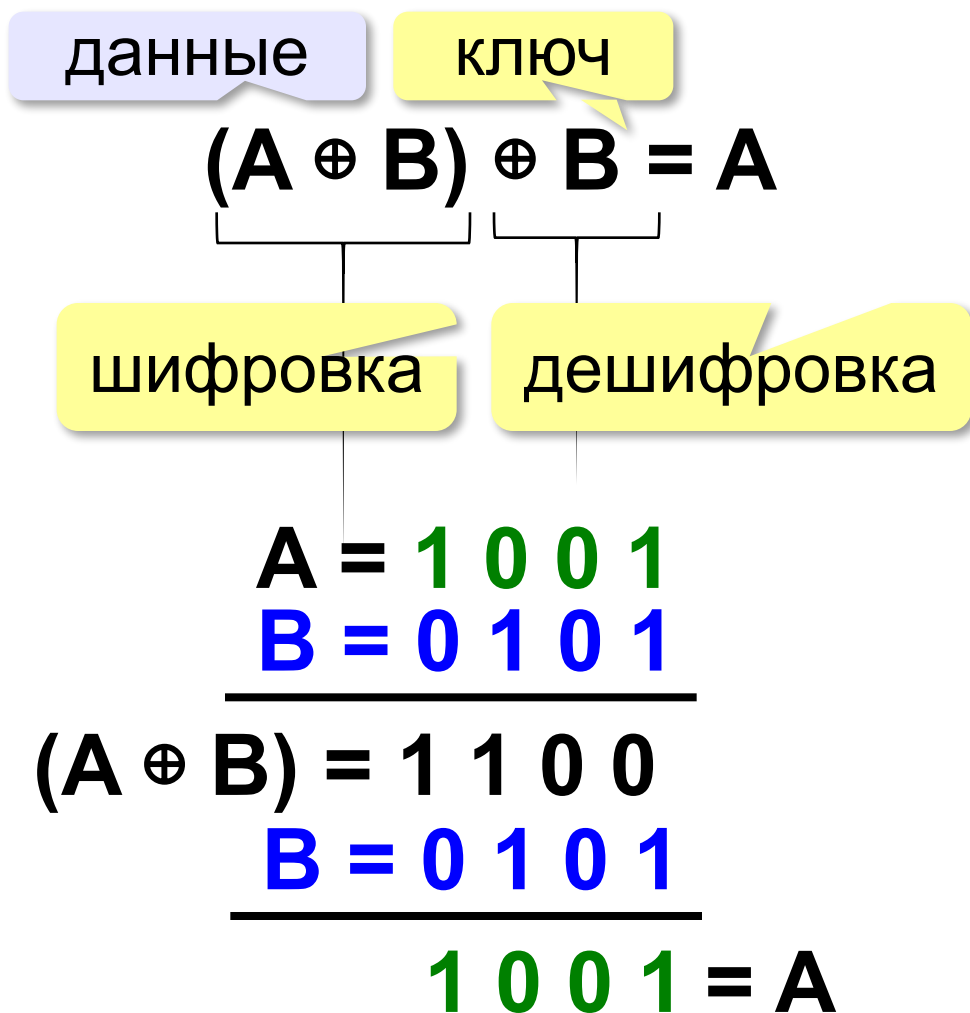
$$(A \oplus B) \oplus B = A$$

операция обратима



Повторное применение операции \oplus с тем же **B** восстанавливает исходное **A**!

Шифрование



Математическая логика

§ 8. Логические выражения

Логические выражения

Логическое выражение — это выражение, результат вычисления которого — логическое значение (истина или ложь).

Авария = вышли из строя 2 из 3-х двигателей.

A — «Двигатель № 1 неисправен».

B — «Двигатель № 2 неисправен».

C — «Двигатель № 3 неисправен».

логическое
выражение

Аварийный сигнал: $X = (A \cdot B) + (A \cdot C) + (B \cdot C)$

X = «Неисправны два двигателя»

= (A и B) или (A и C) или (B и C)

! **Формализация** – это переход к записи на формальном языке!

Порядок вычисления

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ X = & A & \cdot & B & + & (\bar{A} & \cdot & B & + & \bar{B}) \end{array}$$

Таблицы истинности

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

	A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	X
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0

Логические выражения могут быть:

- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)
- **тождественно истинными** (всегда 1, **тавтология**)
- **тождественно ложными** (всегда 0, **противоречие**)

Таблицы истинности

$$X = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

равносильны

	A	B	A + B	$\bar{A} + \bar{B}$	X
0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0

$A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$
0
1
1
0

Если два выражения принимают одинаковые значения при всех значениях переменных, они называются **равносильными** (определяют одну и ту же логическую функцию).

Неполные таблицы истинности

A	B	C	F
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

а) ~~$F = A + \bar{B} + \bar{C}$~~

б) ~~$F = A \cdot \bar{C} + B$~~

в) ~~$F = A \cdot B + C$~~

г) $F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$



Сколько строк в полной таблице?

$$2^3 = 8$$



Сколько подходящих функций?

$$2^5 = 32$$

один ноль в таблице

по 1-й строке

по 2-й строке

Сколько нулей и единиц?

в таблице истинности функции от 3-х переменных:

	нулей	единиц
$A + B + \bar{C}$	1	7
$A \cdot B \cdot \bar{C}$	7	1
$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$	7	1
$\bar{A} + \bar{B} + C$	1	7
$\bar{A} \cdot (\bar{B} + C)$	5	3

Неполные таблицы истинности

A	B	C	F
0		1	0
1	0		1
		1	1

один ноль,
две единицы

а) ~~$F = \bar{A} + B + \bar{C}$~~

по 1-й строке $1 + B + 0 \neq 0$

б) ~~$F = \bar{A} \cdot B \cdot C$~~

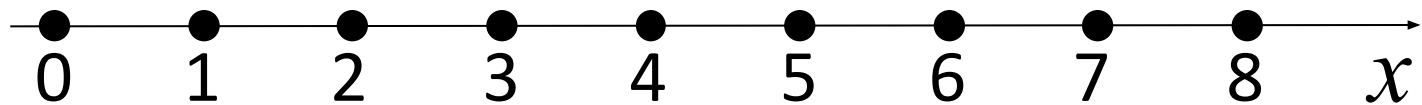
по 2-й строке $0 \cdot 0 \cdot C \neq 1$

в) $F = A + \bar{B} + \bar{C}$

г) ~~$F = A \cdot \bar{B} \cdot C$~~

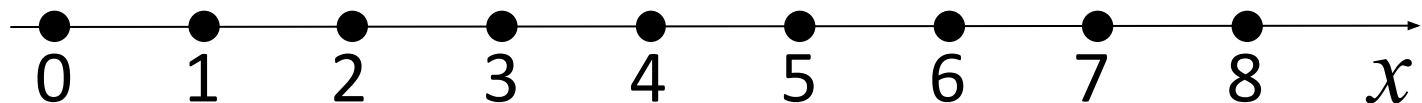
только 1 единица,
все строки разные!

Составление условий

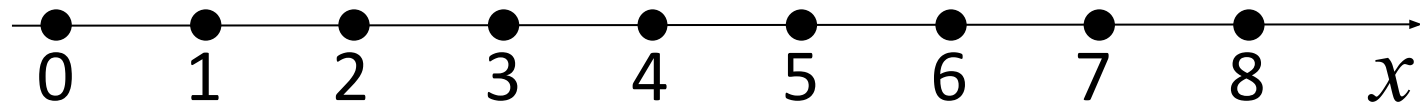


$$(x \geq 3) \text{ и } (x \leq 6)$$

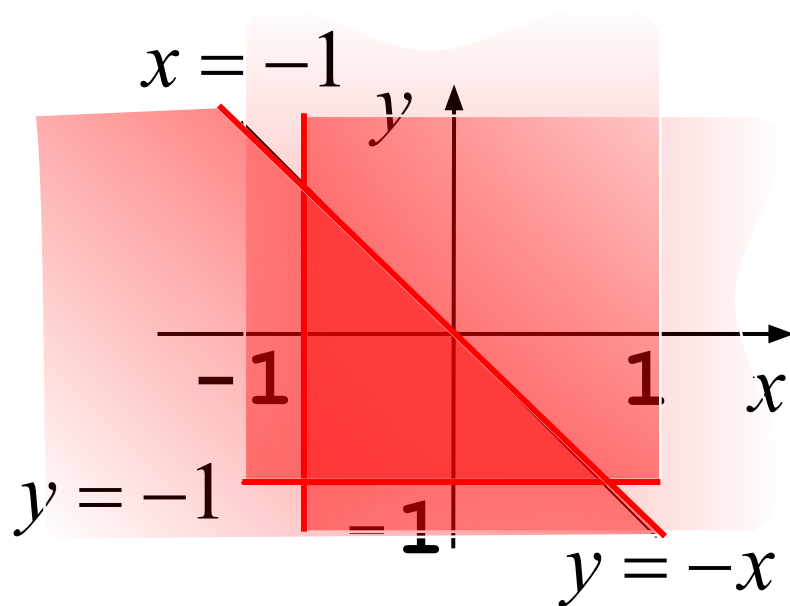
$$(3 \leq x) \text{ и } (x \leq 6)$$



$$(1 \leq x) \text{ и } (x \leq 3) \text{ или } (5 \leq x) \text{ и } (x \leq 8)$$



Составление условий



левая граница: $x \geq -1$

нижняя граница: $y \geq -1$

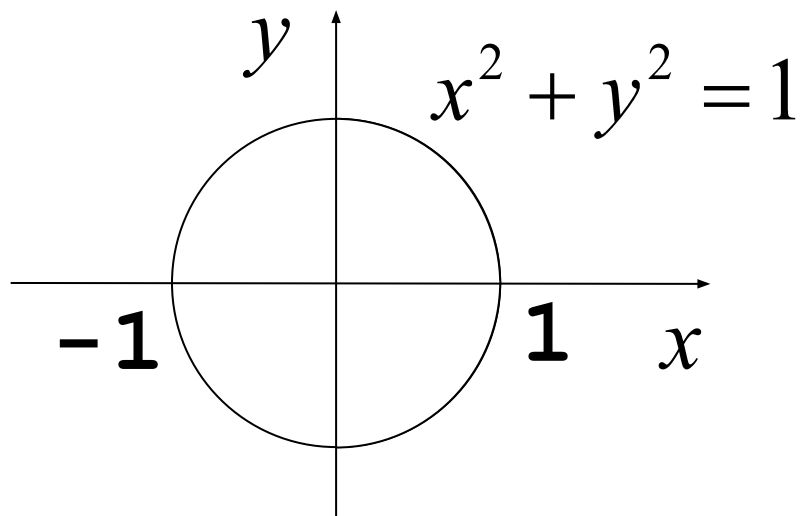
верхняя граница: $y \leq -x$



Всё одновременно!

$$(x \geq -1) \text{ и } (y \geq -1) \text{ и } (y \leq -x)$$

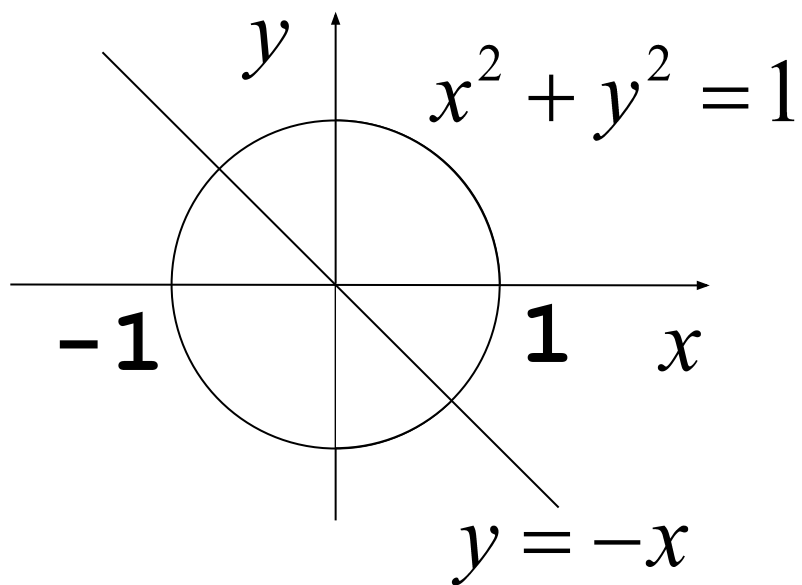
Составление условий



левая

правая

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } (x \leq 0)$$



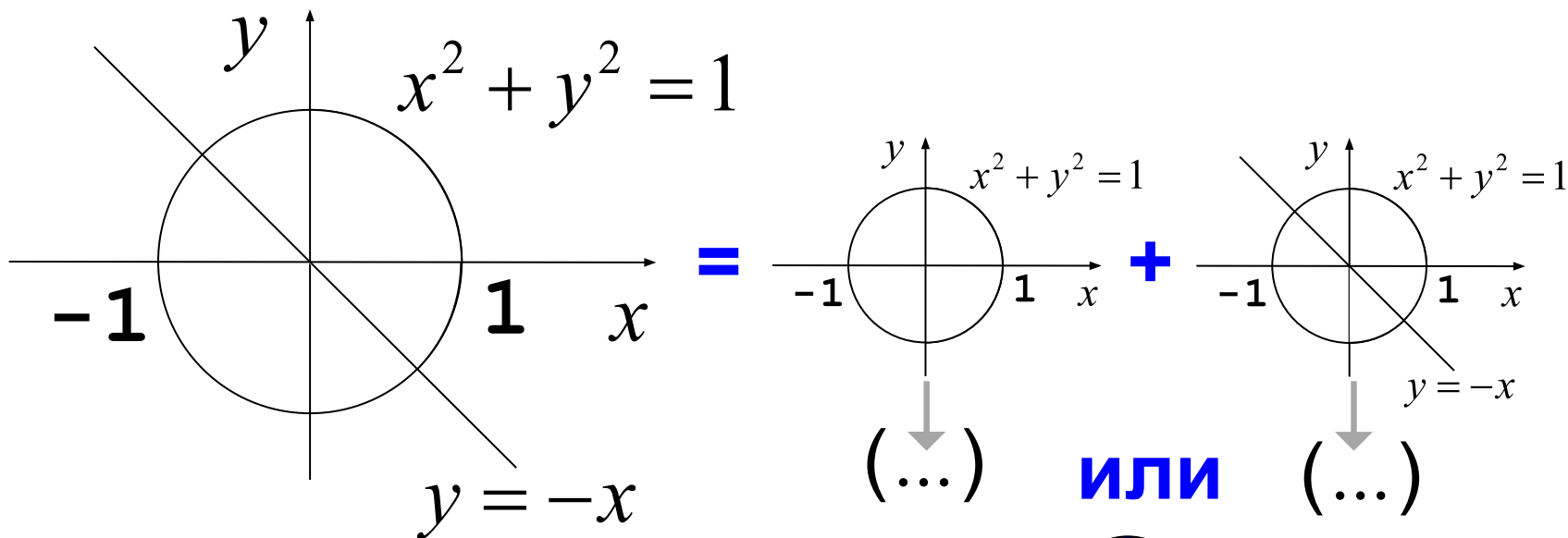
левая

нижняя

$$(x \geq 0) \text{ и } (x^2 + y^2 \leq 1) \\ \text{и } (y \leq -x)$$

верхняя

Составление условий



$$((x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } (x \leq 0)) \text{ или}$$

? Как упростить?

$$((x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } (x \geq 0) \text{ и } (y \leq -x))$$

? А ещё?

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } ((x \leq 0) \text{ или } ((x \geq 0) \text{ и } (y \leq -x)))$$

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } ((x \leq 0) \text{ или } (y \leq -x))$$

Определение истинности выражений

Для каких из указанных значений числа X истинно высказывание:

$(X < 5) \text{ И НЕ } (X < 1) ?$

$X = 2:$

$(1) \text{ И НЕ } (0)$

$(1 \text{ И } 1) = 1$

$X = 4:$

$(1) \text{ И НЕ } (0)$

$(1 \text{ И } 1) = 1$

$X = 8:$

$(0) \text{ И НЕ } (0)$

$(0 \text{ И } 1) = 0$

МОЖНО НЕ
ВЫЧИСЛЯТЬ!

Табличный метод

Для каких из указанных значений числа X истинно высказывание:

$$R = (X < 5) \text{ И НЕ } (X < 1) ?$$

X	$X < 5$	$X < 1$	$\text{НЕ}(X < 1)$	R
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	



И

Задачи

Для каких из указанных значений числа X
ЛОЖНО высказывание:

$(\text{НЕ } (X \geq 3) \text{ И } \text{НЕ } (X = 8)) \text{ ИЛИ } (X \leq 5) ?$

? + 1

$X = 4:$ $(\text{НЕ } (1) \text{ И } \text{НЕ } (0)) \text{ ИЛИ } (1) = 1$

$X = 1:$ $(\text{НЕ } (0) \text{ И } \text{НЕ } (0)) \text{ ИЛИ } (1) = 1$

$X = 8:$ $(\text{НЕ } (1) \text{ И } \text{НЕ } (1)) \text{ ИЛИ } (0)$

$(0 \text{ И } 0) \text{ ИЛИ } (0) = 0$

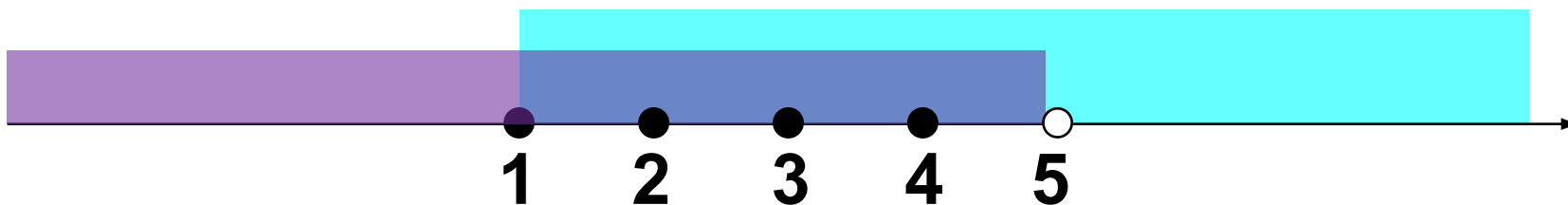
Задачи

Для каких значений числа X истинно высказывание:

$(X < 5) \text{ И НЕ } (X < 1) ?$



$(X < 5) \text{ И } (X \geq 1)$



1, 2, 3, 4

Задачи

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**
высказывание:

(Первая буква согласная)

НЕ(Первая буква гласная) **ИЛИ**
(Последняя буква гласная) ?

	ПервСогл	ПослГлас	R
Никита			
Антон			
Даниил			
Инна			
Кирилл			



Задачи

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**
высказывание:

НЕ(Первая буква гласная) **ИЛИ**
(Последняя буква гласная) ?



(Первая буква согласная) **ИЛИ**
(Последняя буква гласная)

Никита

Антон

Даниил

Инна

Кирилл

Егор

Мефодий

Игнат

ЛОЖНО

$$A + B = 0$$



$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$$

ИЛИ → И,
обратные условия

Задачи

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**
высказывание:

НЕ(Первая буква гласная) **И**
(Последняя буква гласная) ?



(Первая буква согласная) **И**
(Последняя буква гласная)

Никита

Антон

Даниил

Инна

Кирилл

Егор

Мефодий

Игнат

ЛОЖНО

$$A \cdot B = 0$$



$$\bar{A} + \bar{B} = 1$$

И → **ИЛИ**,
обратные условия

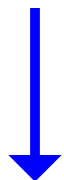
Задачи

Для каких значений числа X **ЛОЖНО**
высказывание:

$(\text{НЕ } (X \geq 3) \text{ И } \text{НЕ } (X = 8)) \text{ ИЛИ } (X \leq 5) ?$

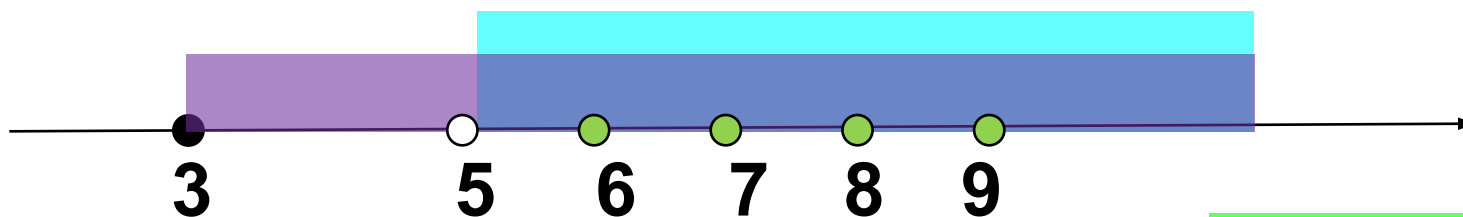


ЛОЖНО $((X < 3) \text{ И } (X \neq 8)) \text{ ИЛИ } (X \leq 5)$



И \leftrightarrow ИЛИ,
обратные условия

ИСТИННО $((X \geq 3) \text{ ИЛИ } (X = 8)) \text{ И } (X > 5)$



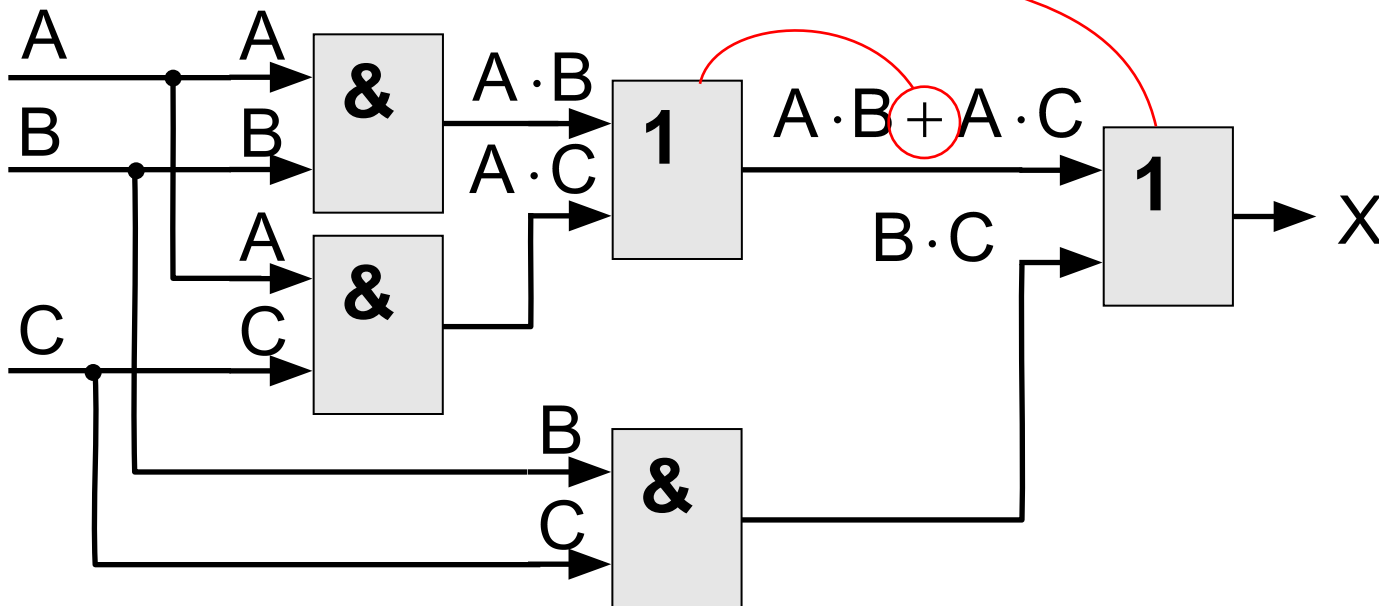
6, 7, 8, ...

Логические схемы

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$



Какая последняя операция?



Математическая логика

§ 12. Множества и логика

Что такое множество?

Множество – некоторый набор элементов, каждый из которых отличается от остальных.

пустое множество: \emptyset

конечное число элементов: буквы русского алфавита

бесконечное число элементов: натуральные числа

Как задать множество?

- перечислением элементов

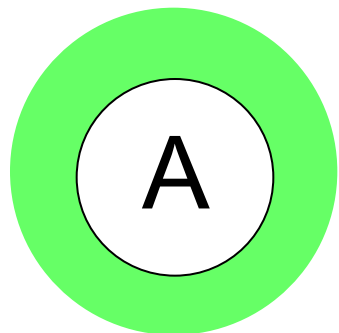
{Вася, Петя, Коля}

- логическим выражением:

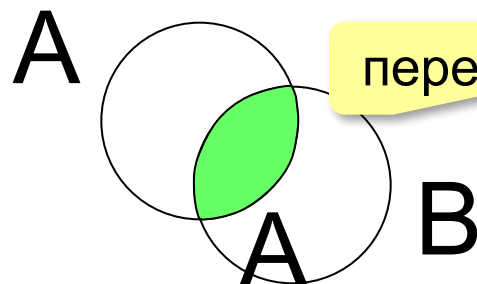
$\{x: x > 0\}$

Изображение множеств

Диаграммы Эйлера-Венна

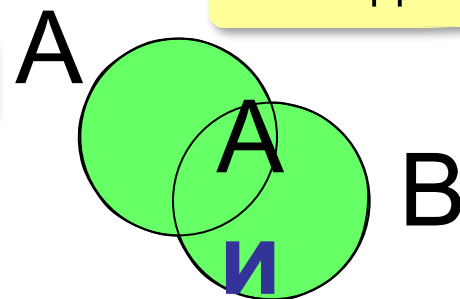


не A



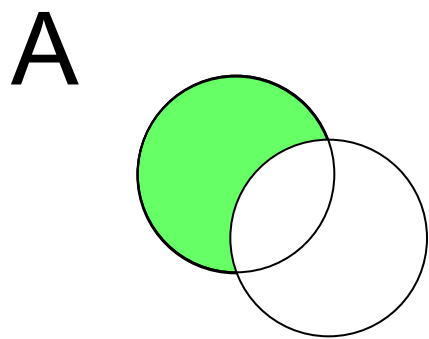
пересечение

и

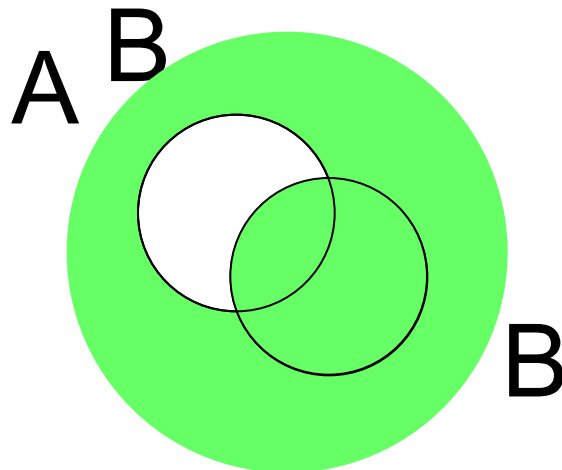


объединение

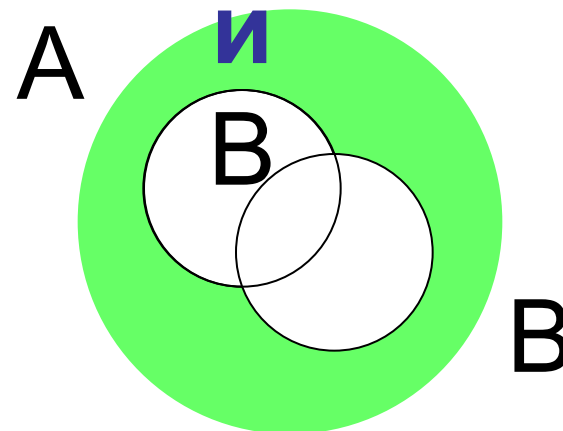
л



A и (не B)



(не A) или B



(не A) и (не B)

Количество элементов множеств

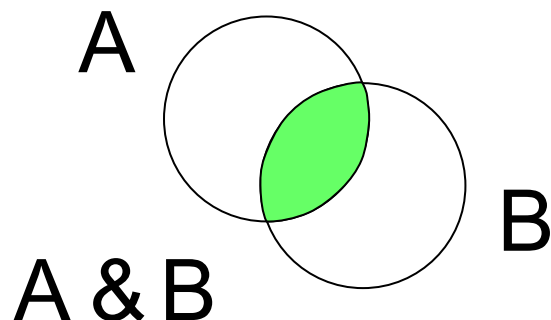
Поисковые запросы в Интернете:

& = **и** (and) **|** = **или** (or)

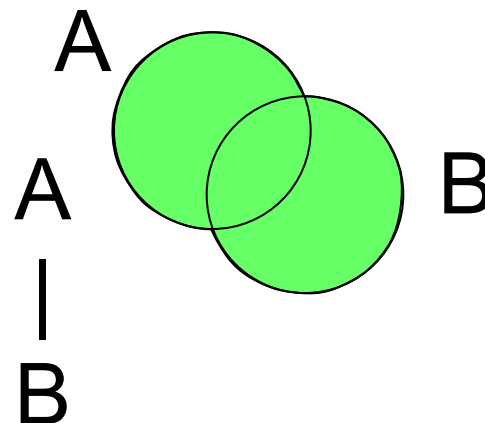
N_A – количество элементов множества A

? Что больше?

$$N_A \stackrel{?}{\geq} N_{A \& B}$$



$$N_A \stackrel{?}{\leq} N_{A|B}$$



! **&** всегда сужает область, **|** - расширяет!

Задачи

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: принтеры & сканеры & продажа

Б: принтеры | продажа

В: принтеры & продажа

Г: принтеры | сканеры | продажа

АВБГ

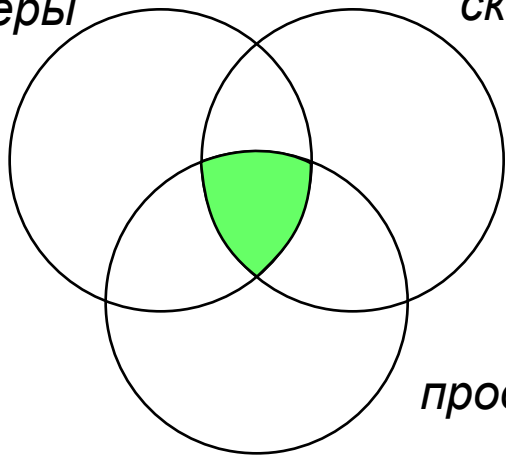
Использование диаграмм

принтеры & сканеры & продажа

принтеры

сканеры

продажа

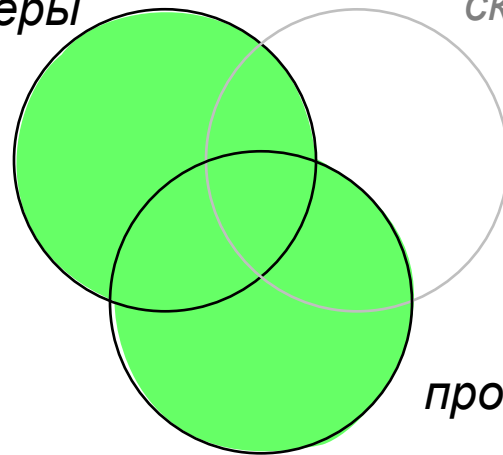


принтеры | продажа

принтеры

сканеры

продажа

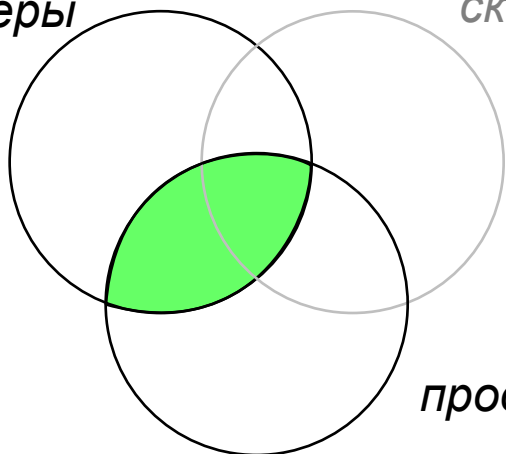


принтеры & продажа

принтеры

сканеры

продажа

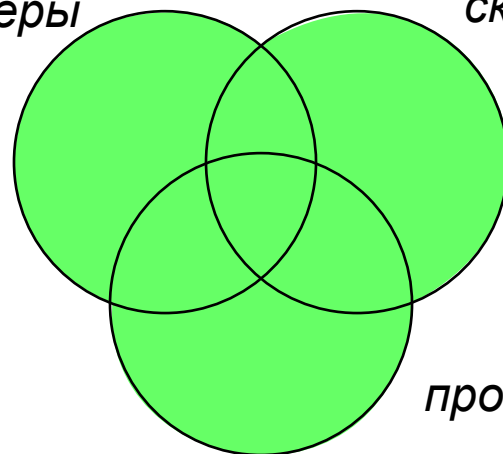


принтеры | сканеры | продажа

принтеры

сканеры

продажа



Задачи

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: **принтеры & сканеры & продажа**

Б: **(принтеры & сканеры) | продажа**

В: **(принтеры | сканеры) & продажа**

Г: **принтеры | сканеры | продажа**

ГБВА

Количество элементов множеств

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сай	N_A
огурцы	100	
помидоры	200	N_B
огурцы & помидоры	50	$N_{A \& B}$

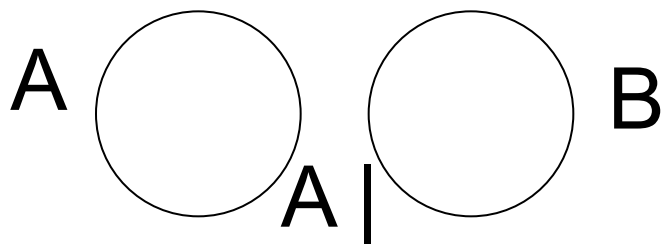
Сколько сайтов будет найдено по запросу

огурцы | помидоры

$N_{A|B}$

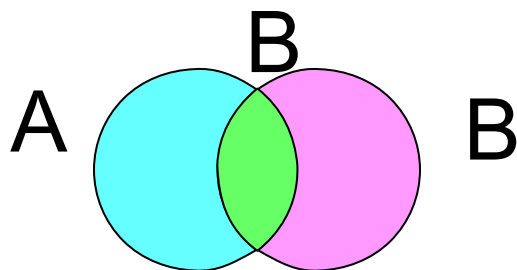
Количество элементов множеств

В общем виде:



$$N_{A \& B} = 0$$

$$N_{A | B} = N_A + N_B$$



$$N_{A \& B} = \text{green lens}$$

$$N_{A | B} = \text{cyan crescent} + \text{green lens} + \text{magenta crescent}$$

$$N_A + N_B = \text{cyan circle with green crescent} + \text{magenta circle with green crescent} = N_{A | B} + \text{green lens}$$

$$N_{A | B} = N_A + N_B - N_{A \& B}$$

Формула включений
и исключений

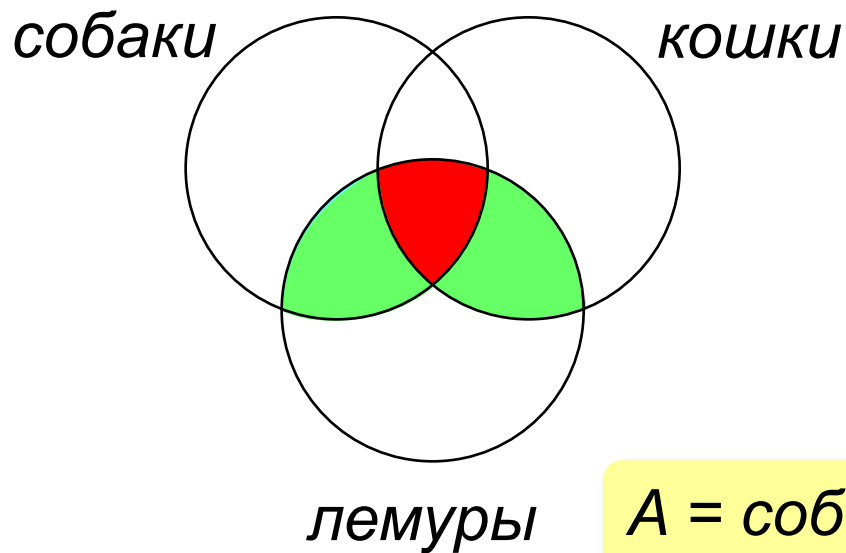
Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

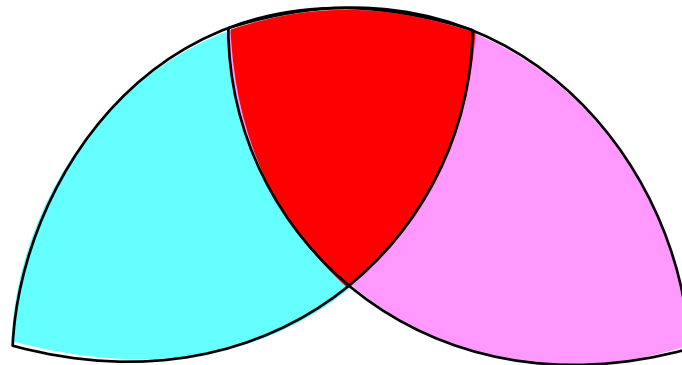
<i>Запрос</i>	<i>Количество сайтов</i>
собаки & лемуры	320
кошки & лемуры	280
(кошки собаки) & лемуры	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу
собаки & кошки & лемуры

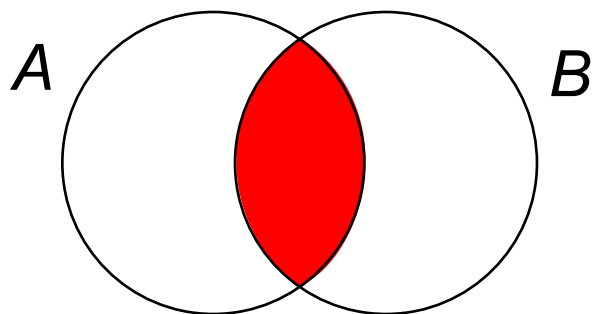
Задача с тремя областями



$A = \text{собаки \& лемуры}$



$B = \text{кошки \& лемуры}$



$$N_{A\&B} = N_A + N_B - N_{A|B}$$

Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	Количество сайтов
собаки & лемуры A	320
кошки & лемуры B	280
(кошки собаки) & лемуры A B	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу **A & B**

~~собаки & кошки & лемуры~~



Общее условие с & можно отбросить !

$$N_{A \& B} = N_A + N_B - N_{A|B} = 320 + 280 - 430 = 170$$

Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

<i>Запрос</i>	<i>Количество сайтов</i>
сканер	200
принтер	250
монитор	450
принтер сканер	450
принтер & монитор	40
сканер & монитор	50

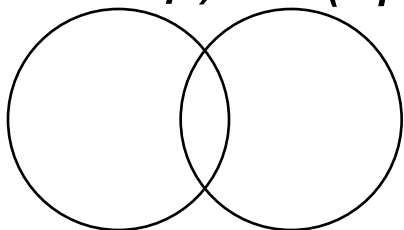
Сколько сайтов будет найдено по запросу
(принтер | сканер) & монитор



Обычно две области не пересекаются!

Задачи с тремя областями

A (сканер) B (принтер) 450



принтер | сканер

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A \& B}$$

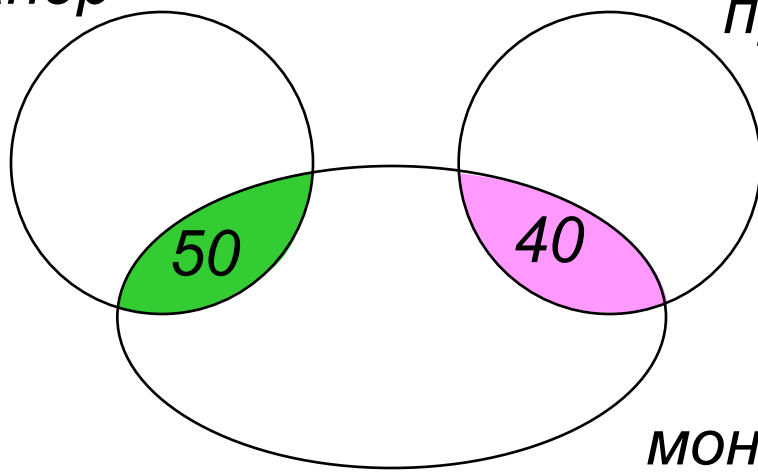
0

сканер 200

принтер 250

сканер

принтер



принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

монитор

(принтер | сканер) & монитор $40 + 50 = 90$