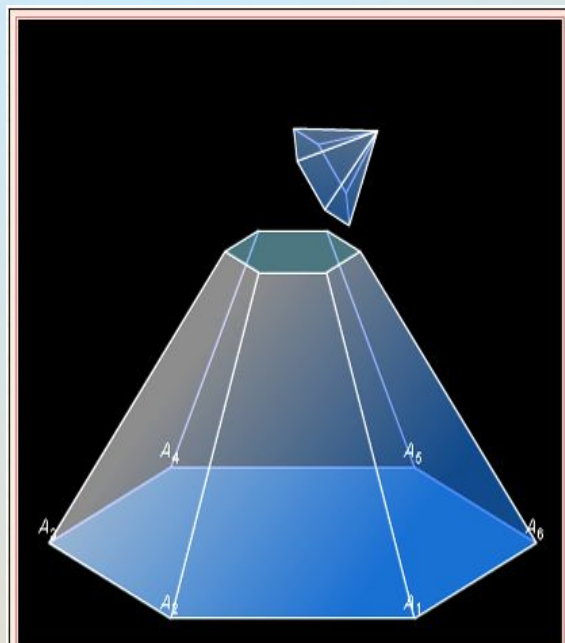
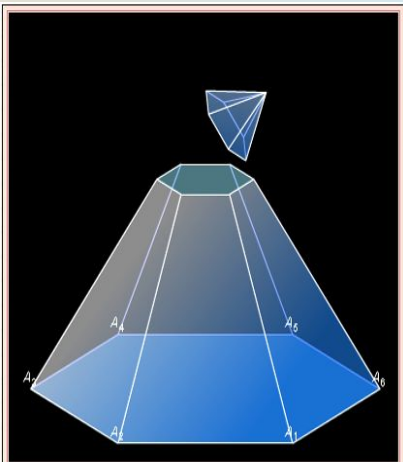
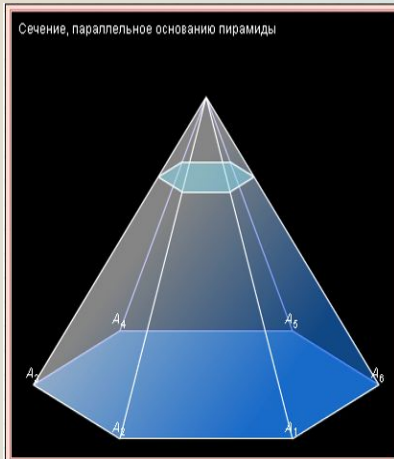


УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА

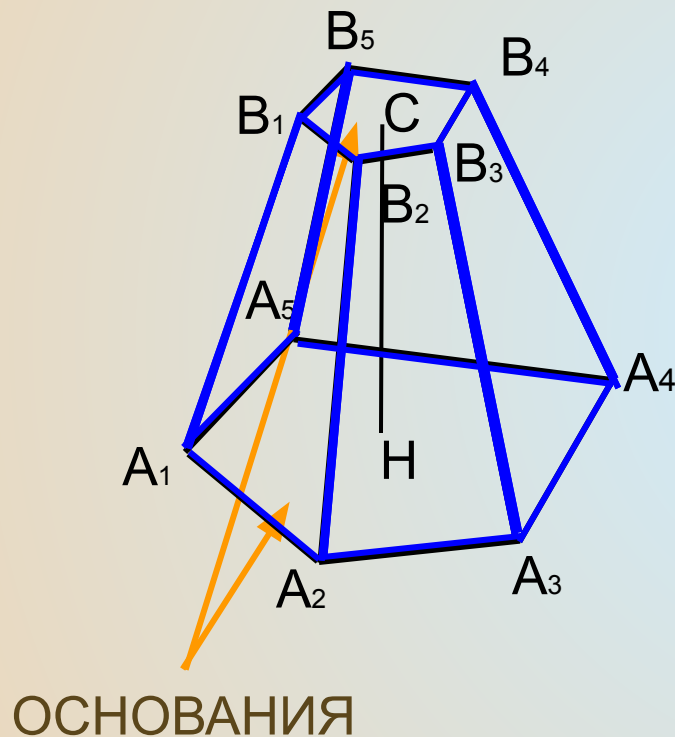


ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Плоскость параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой.
- *Усеченная пирамида* – это часть полной пирамиды, заключенная между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды

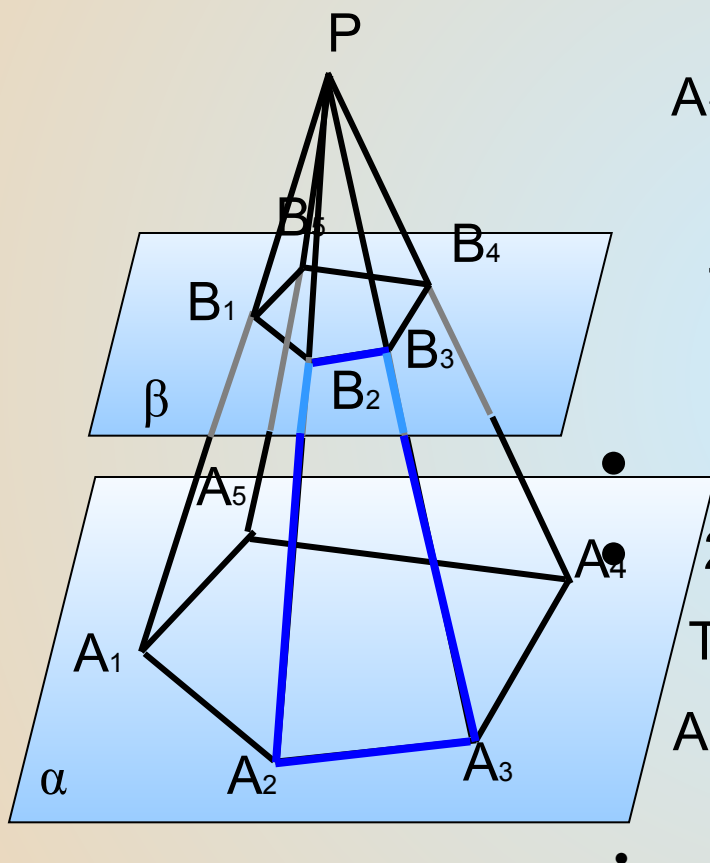
ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Многоугольники $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ - *нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots$ - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3 \dots$ - *боковые грани* усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок CH – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды.



УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



Докажем, что боковые грани $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ являются трапециями.

Рассмотрим четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$.

1. $\alpha \parallel \beta$

$(PA_2A_3) \cap \alpha = A_2A_3$

$(PA_2A_3) \cap \beta = B_2B_3$

значит $A_2A_3 \parallel B_2B_3$

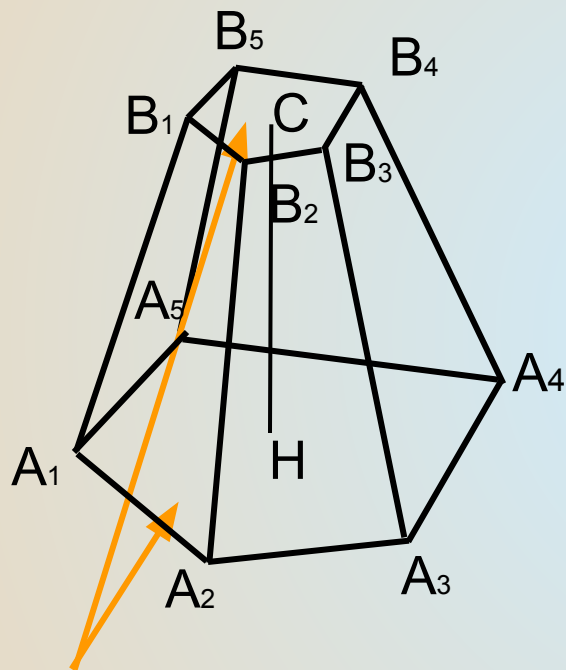
2. $A_2P \cap A_3P = P$, значит $A_2B_2 \parallel A_3B_3$

Т.о. $A_1B_1B_2A_2$ – трапеция по определению

Аналогично доказывается и про остальные боковые грани.



ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

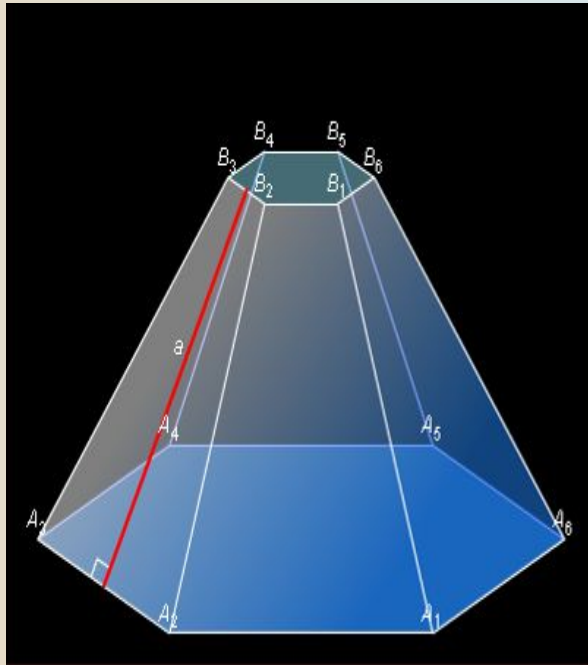


ОСНОВАНИЯ

- Многоугольники $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ - *нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 ... - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$... - *боковые грани* усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок CH – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды

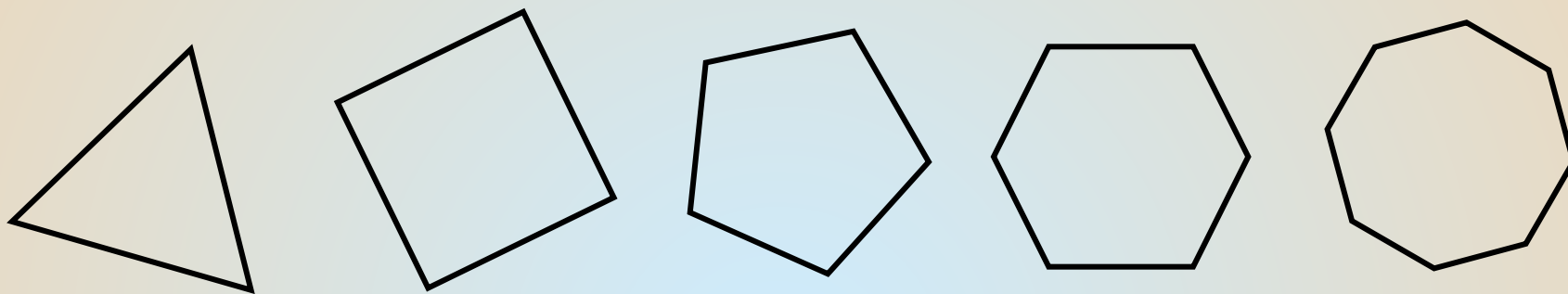


ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

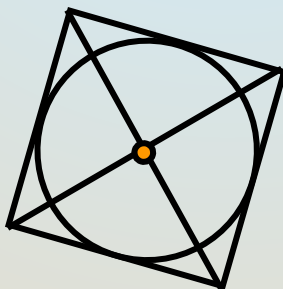
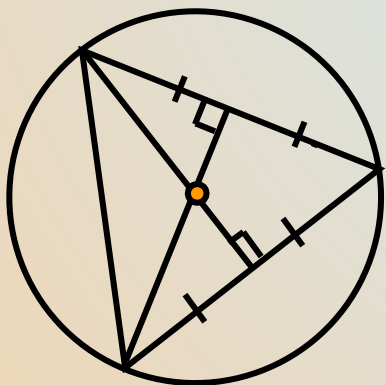


- Усеченная пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
- Основания - правильные многоугольники .
- Боковые грани – равные равнобедренные трапеции (?).
- Высоты этих трапеций называются апофемами.

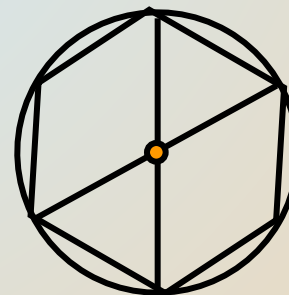
Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.



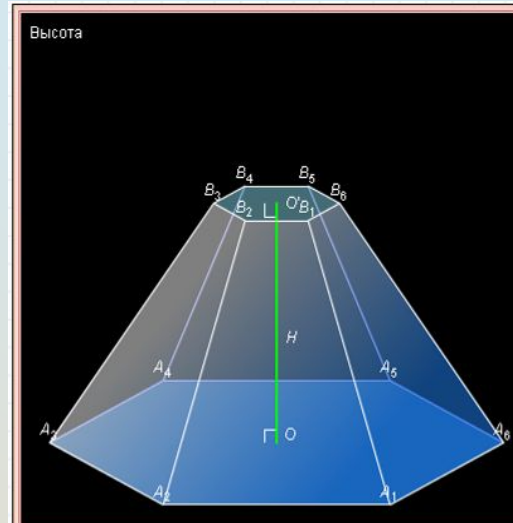
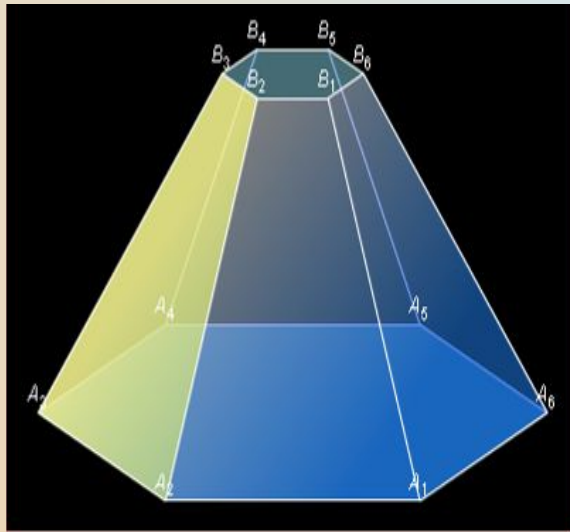
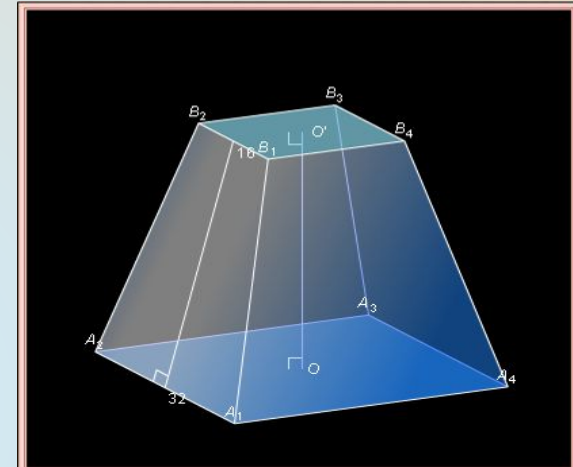
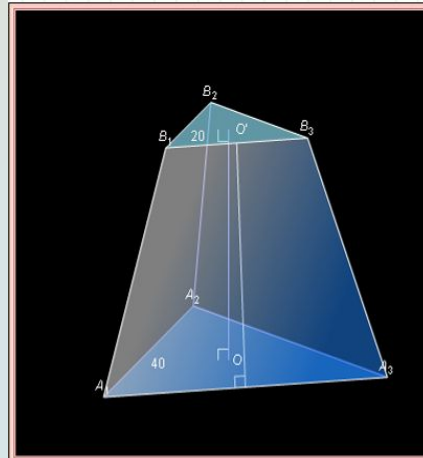
Центр окружности, описанной около правильного многоугольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник, и называется *центром правильного многоугольника*. Для его нахождения достаточно определить в какой точке находится центр либо вписанной либо описанной окружности.



ПИРАМИДА



УСЕЧЕННЫЕ ПИРАМИДЫ



ПИРАМИДА

[СОДЕРЖАНИЕ](#)

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ

- *Площадью полной поверхности* ($S_{\text{полн}}$) пирамиды называется сумма площадей всех её граней: основания и всех боковых граней.
- *Площадью боковой поверхности* ($S_{\text{бок}}$) пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

- *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды* равна половине произведения периметра основания на апофему.
- *Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды* равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему. [Доказать.](#)

$$S_{\text{полн.усеч.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верхн.осн.}} + S_{\text{нижн.осн.}}$$



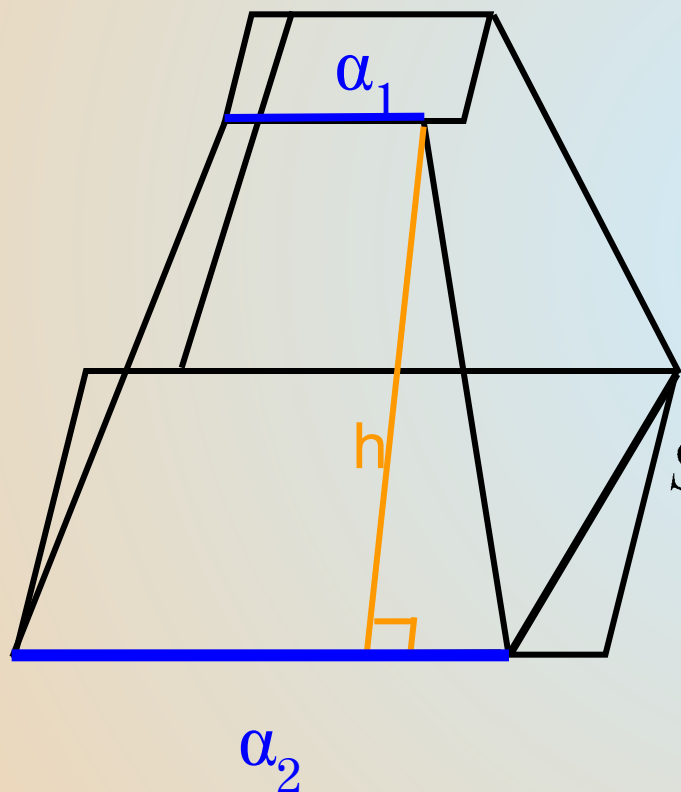
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ

Найдем площадь одной из граней правильной n-угольной усечённой пирамиды.

$$S_{\text{грани}} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$$

Т.к. эта усечённая пирамида правильная, то

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{грани}} \cdot n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h \cdot n = \frac{a_1 n + a_2 n}{2} \cdot h = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$$



$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$$



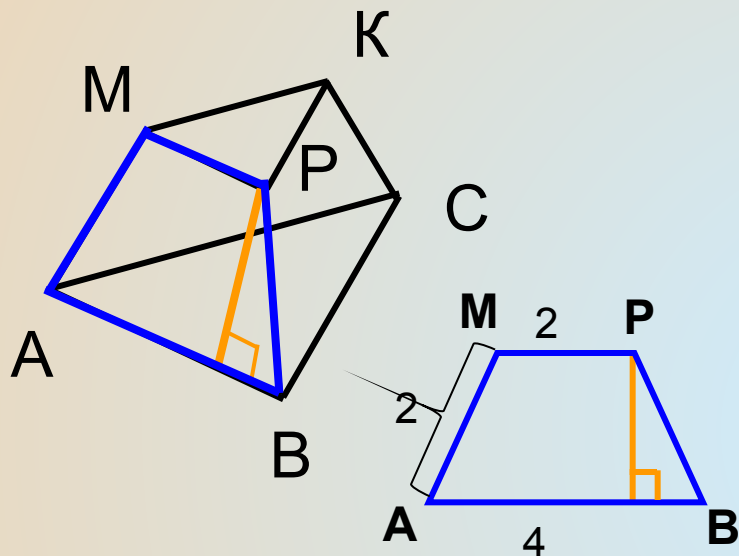
ЗАДАЧА 1

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 2 см, а боковое ребро равно 2 см.

*Найдите: 1. апофему пирамиды;
2. площадь полной поверхности.*



Ход решения задачи.



Дано: $ABCMPK$ – правильная усечённая пирамида;

$\triangle ABC$ – нижнее основание;

$\triangle MPK$ – верхнее основание;

$AB = 4$ см, $MP = 2$ см, $AM = 2$ см.

Найти: 1. апофему;

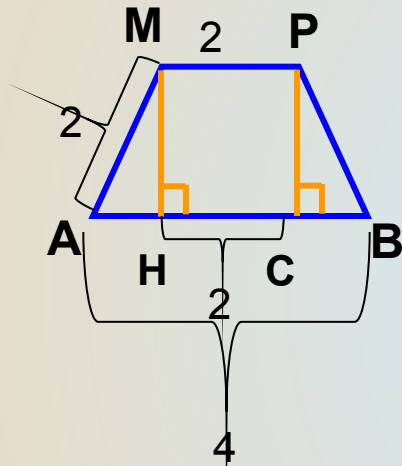
2. $S_{\text{полн}}$

План решения:

1. Сделать чертёж.
2. Построить апофему и определить многоугольник, из которого можно её найти.
3. Произвести необходимые вычисления.



РЕШЕНИЕ



$$AB = AH + AC + CB$$

$$CB = AH$$

$$HC = MP$$

$$AB = 2AH + MP$$

$$\text{Т.о. } 2AH = 2, AH = 1$$

$\triangle AMH$ – прямоугольный, $\angle AHM = 90^\circ$

$AH = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верхн.осн.}} + S_{\text{нижн.осн.}}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{2} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ т.к. в основании правильные треугольники}$$



РЕШЕНИЕ

$$S_{\text{верхн.осн.}} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{нижн.осн.}} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{полн}} = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 14\sqrt{3}(\text{см}^2)$$

Ответ: $\sqrt{3}\text{см}$, $14\sqrt{3}\text{см}^2$.



[СОДЕРЖАНИЕ](#)

ЗАДАЧА 2

Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 см, а площадь её полной поверхности равна 186 см^2 .

Найдите высоту усечённой пирамиды.

