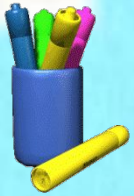


Решение иррациональных неравенств.

Рассматрим решение неравенств, содержащих переменную под знаком квадратного корня.

При решении таких неравенств необходимо помнить условие существования квадратного корня (ОДЗ): подкоренное выражение не может принимать отрицательные значения.

Некоторые методы решения иррациональных неравенств.

Назад

- Метод интервалов.
- Использование равносильных переходов.
- Метод рационализации (замены множителей).
- Введение новой переменной.
- Использование свойств квадратного корня.
- Решение неравенств, содержащих двойные радикалы.

Метод интервалов.

Методы

Метод интервалов – это универсальный способ решения практически любых неравенств, которые встречаются в школьном курсе алгебры.

Пример 1. $\sqrt{4-x}-\sqrt{x+5}>0$

ОДЗ : $\begin{cases} 4-x\ge 0 \\ x+5\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 4 \\ x\ge -5 \end{cases}$ $x\in[-5;4]$

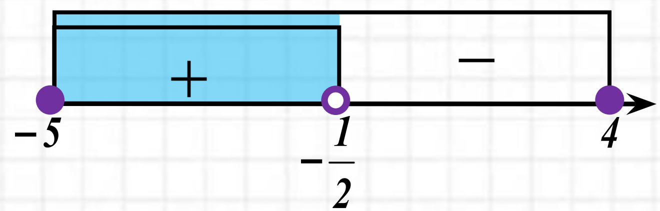
Найдем нули функции

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x+5}=0$$

$$\sqrt{4-x}=\sqrt{x+5}$$

$$4-x=x+5$$

$$x=-\frac{1}{2}\in ОДЗ$$



Определим знаки функции на полученных промежутках и учтем ОДЗ.

Ответ : $\left[-5;-\frac{1}{2}\right)$

Метод интервалов.

Методы

Пример 2.

$$\sqrt{x^2-5x-6}<\sqrt{2x^2-6x-15}$$

$$\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{2x^2-6x-15}<0$$

Найдем нули функции

$$\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{2x^2-6x-15}=0$$

$$\sqrt{x^2-5x-6}=\sqrt{2x^2-6x-15}$$

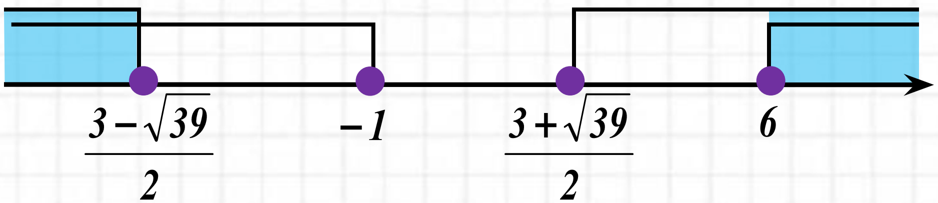
$$x^2-5x-6=2x^2-6x-15$$

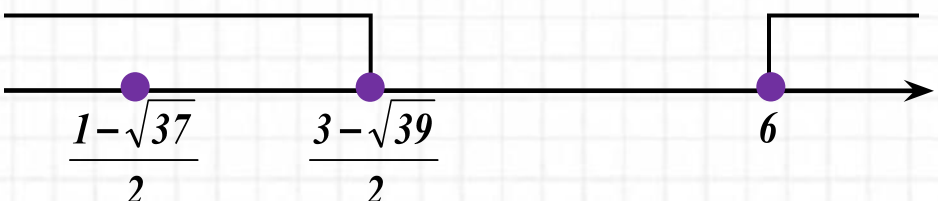
$$x^2-x-9=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\notin ОДЗ \\ x=\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\in ОДЗ \end{array}\right.$$

$$ОДЗ:\begin{cases} x^2-5x-6\ge 0 \\ 2x^2-6x-15\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)(x+1)\ge 0 \\ \left(x-\dfrac{3+\sqrt{39}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{39}}{2}\right)\ge 0 \end{cases}$$





Далее нужно определить знаки функции на полученных промежутках.

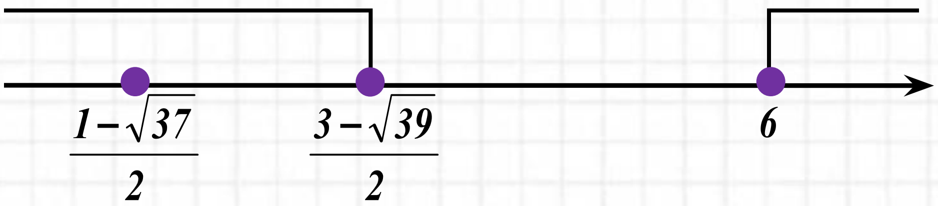
Метод интервалов.

Методы

Пример 2.

$$\sqrt{x^2-5x-6}<\sqrt{2x^2-6x-15}$$

$$\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{2x^2-6x-15}<0$$



Правило чередования знаков здесь не работает, так как левая часть не разложена на множители.
Браться за определение знаков функции методом контрольных точек страшновато (хотя преодолев определенные вычислительные трудности, мы достигнем цели).

Можно избежать этих неприятностей, если владеть другими методами решения иррациональных неравенств.

Методы

Использование равносильных переходов.

Выведем схемы решения трех основных типов иррациональных неравенств используя свойства числовых неравенств и здравый смысл. Таким образом избежим малоэффективного механического запоминания.

1. $a)\ \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ $\qquad$ $ОДЗ: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Так как левая и правая части неравенства неотрицательны, то по свойству числовых неравенств имеем право возвести их в квадрат не меняя при этом знак неравенства.

$$f(x) < g(x)$$

То есть, необходимо выполнение трех условий:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Найди лишнее!

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$0 \leq f(x) < g(x)$$

Очевидно, что g(x) ≥0 – лишнее

Использование равносильных переходов.

Методы

Самостоятельно выведи схему для решения следующего неравенства

1. *б)* $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ $f(x) > g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}}$$

$0 \leq g(x) \leq f(x)$ => $f(x) \geq 0$ – лишнее

Следует отметить, что данные переходы справедливы и для нестрогих неравенств.

Отметим положительный момент в применении выведенных схем: нужно решать не три неравенства (метод интервалов), а два.

Меньше действий – меньше вероятность допустить ошибку!

Использование равносильных переходов.

Методы

2. $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ОДЗ : $f(x) \geq 0$

Условие, при котором неравенство может иметь решения: $g(x) > 0$

Тогда: $f(x) < g^2(x)$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Незначительно отличается переход для нестрогого неравенства:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Использование равносильных переходов.

Методы

3. $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ОДЗ : $f(x) \geq 0$

Лишнее условие. Объясни почему.

Решения у такого неравенства могут быть при любом значении g(x)

1 случай: $g(x) < 0$

Тогда неравенство выполнено при любом x ϵ ОДЗ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

2 случай: $g(x) \geq 0$

Тогда имеем право возвести обе части в квадрат $\begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.}$$

Использование равносильных переходов.

Методы

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

Не пропускайте вывод данных равносильных переходов. Запоминание без понимания смысла – занятие малоперспективное.

Назад

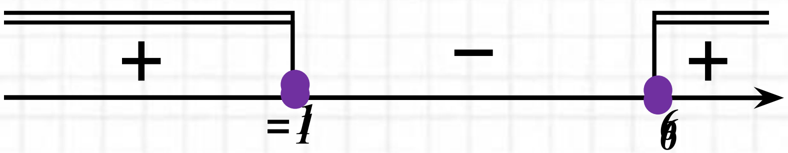
Использование равносильных переходов.

Пример 2.

$$\sqrt{x^2-5x-6}<\sqrt{2x^2-6x-15}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-5x-6\ge 0\\ x^2-5x-6<2x^2-6x-15\end{cases}$$

$$x^2-5x-6\ge 0$$

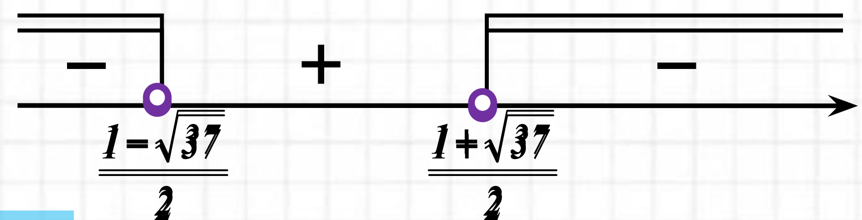
$$(x-6)(x+1)\ge 0$$

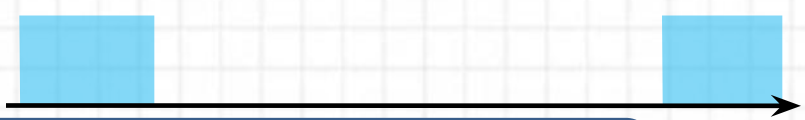


$$x^2-5x-6<2x^2-6x-15$$

$$-x^2+x+9<0$$

$$-\left(x+\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right)<0$$





Сравни с решением методом интервалов.

$$\text{Ответ}:\ \left(-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right)\cup(6;+\infty)$$

Использование равносильных переходов.

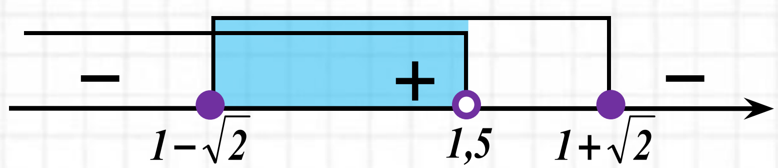
Пример 3.

$$\sqrt{-x^2+2x+1} > 2x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2+2x+1 \ge 0 \\ 2x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ -x^2+2x+1 > (2x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

---

1 система

$$\begin{cases} -x^2+2x+1 \ge 0 \\ 2x-3<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -(x+(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2})) \ge 0 \\ x<1{,}5 \end{cases}$$



$$\boxed{x \in [1-\sqrt{2};1{,}5)}$$

Использование равносильных переходов.

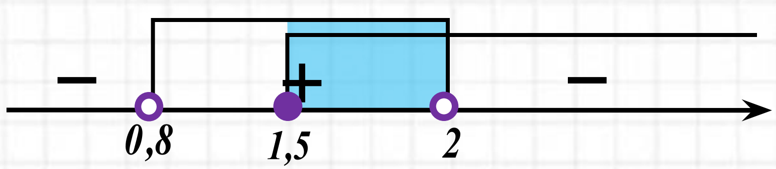
Пример 3.

$$\sqrt{-x^2+2x+1} > 2x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [\,1-\sqrt{2};1{,}5\,) \\ \begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ -x^2+2x+1 > (\,2x-3\,)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

---

2 система

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ -x^2+2x+1 > (\,2x-3\,)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ -(x-2)(\,x-0{,}8\,) > 0 \end{cases}$$



$$\boxed{x \in [\,1{,}5;2\,)}$$

Объединение решений

$$\left[\begin{array}{l} x \in [\,1-\sqrt{2};1{,}5\,) \\ x \in [\,1{,}5;2\,) \end{array}\right.$$

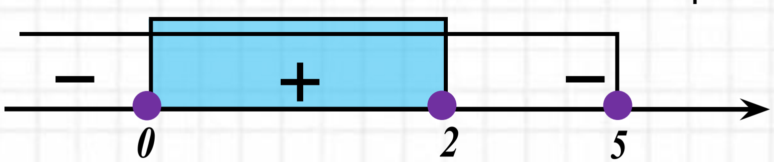
Ответ : $[\,1-\sqrt{2};2\,)$

Использование равносильных переходов.

Пример 4.

$$\sqrt{2x-x^2} \le 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \\ 2x-x^2 \le (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x) \ge 0 \\ x \le 5 \\ -2x^2+12x-25 \le 0 \end{cases}$$

$$x(2-x) \ge 0$$



$$x \le 5$$

$$-2x^2+12x-25 \le 0$$

$$-2x^2+12x-25 = 0$$

$D < 0 \Rightarrow$ функция не имеет нулей

$$-2x^2+12x-25 \le 0$$

при любом x

$$x \in R$$

Ответ : [0;2]

Метод рационализации (замены множителей)

Методы

Переходы

Пример 5. $$\frac{\sqrt{3x^2-3x+7}-\sqrt{6+x-x^2}}{(10x-7)(10x-3)}\ge 0$$

Схемы не работают.

Такое неравенство удобно решать методом замены множителей, который уже рассматривался в теме «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля» и будет рассматриваться позднее при решении показательных и логарифмических неравенств.

В применении к иррациональным множителям замены выглядят следующим образом:

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\leftrightarrow f(x)-g(x)$$

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\leftrightarrow 1$$

$$\sqrt{f(x)}-g(x)\leftrightarrow f(x)-g^2(x)\quad (g(x)\ge 0)$$

$$\sqrt{f(x)}-g(x)\leftrightarrow 1\quad (g(x)<0)$$

Объясни.

Помни про ОДЗ!

Метод рационализации (замены множителей)

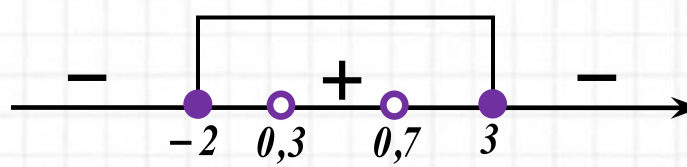
Методы

Переходы

Пример 5. $$\frac{\sqrt{3x^2-3x+7}-\sqrt{6+x-x^2}}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0$$

ОДЗ $\begin{cases} 3x^2-3x+7\geq 0 \\ 6+x-x^2\geq 0 \\ 10x-7\neq 0 \\ 10x-3\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} D<0, \quad x\in R \\ -(x-3)(x+2)\geq 0 \\ x\neq 0{,}7 \\ x\neq 0{,}3 \end{cases}$



Числитель является множителем дроби.

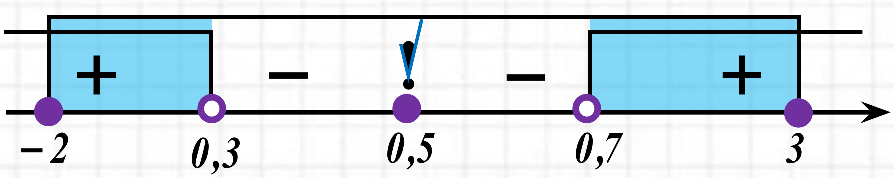
Замена: $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\leftrightarrow f(x)-g(x)$

$$\frac{3x^2-3x+7-(6+x-x^2)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0$$

$$\frac{3x^2-3x+7-(6+x-x^2)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{(10x-7)(10x-\ldots)} \quad \ldots \quad \frac{(2x-1)^2}{\ldots 7)(10x-3)}\geq 0$$

Учтем ОДЗ



Ответ : $[-2;0{,}3)\cup\{0{,}5\}\cup(0{,}7;3]$

Метод рационализации (замены множителей)

Методы

Переходы

Пример 6.

$$\frac{\sqrt{2x^2-2x+25}-6-x}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2x^2-2x+25}-(6+x)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0$$

Множитель (6-х) может принимать как отрицательные, так и неотрицательные значения.

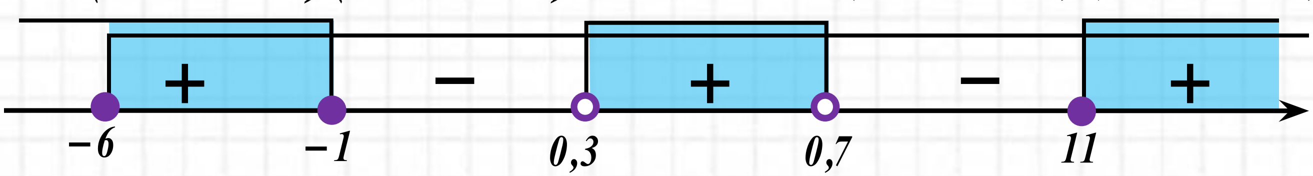
$$ОДЗ\begin{cases}2x^2-2x+25\geq 0\\ 10x-7\neq 0\\ 10x-3\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}D<0, \quad x\in R\\ x\neq 0{,}7\\ x\neq 0{,}3\end{cases} \qquad \begin{cases}x\neq 0{,}7\\ x\neq 0{,}3\end{cases}$$

1 случай: $6+x\geq 0,\ x\in[-6;+\infty).$

Замена: $\sqrt{f(x)}-g(x)\leftrightarrow f(x)-g^2(x)$

$$\frac{2x^2-2x+25-(6+x)^2}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+11)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0$$



Учтем условие х ≥ -6

$$[-6;-1]\cup(0{,}3;0{,}7)\cup[11;+\infty)$$

Метод рационализации (замены множителей)

Методы

Переходы

Пример 6. $$\frac{\sqrt{2x^2-2x+25}-(6+x)}{(10x-7)(10x-3)}\ge 0$$

ОДЗ $\begin{cases} 2x^2-2x+25\ge 0 \\ 10x-7\ne 0 \\ 10x-3\ne 0 \end{cases}$

$\begin{cases} D<0, \quad x\in R \\ x\ne 0{,}7 \\ x\ne 0{,}3 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ne 0{,}7 \\ x\ne 0{,}3 \end{cases}$

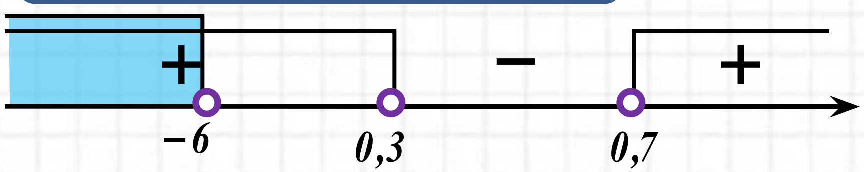
1 случай: $\boxed{[-6;-1]\cup(0{,}3;0{,}7)\cup[11;+\infty)}$

2 случай: $6+x<0,\ x\in(-\infty;-6)$

Замена: $\sqrt{f(x)}-g(x)\leftrightarrow 1$

$$\frac{1}{(10x-7)(10x-3)}\ge 0$$

Учтем условие x < -6



$\boxed{(-\infty;-6)}$

Ответ: объединение решений первого и второго случая.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup(0{,}3;0{,}7)\cup[11;+\infty)$

Метод введения новой переменной (явная замена).

Методы

Переходы

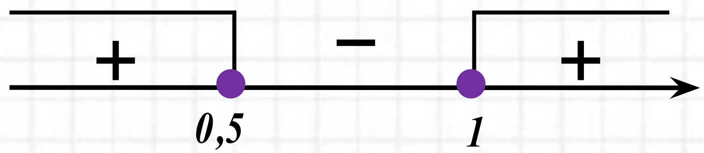
Пример 7. $2x-3\sqrt{x}+1\geq 0$

$t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2$

ОДЗ : $x\geq 0$

$2t^2-3t+1\geq 0$

$2(t-0,5)(t-1)\geq 0$



$\left[\begin{array}{l} t\geq 1 \\ t\leq 0,5 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\geq 1 \\ \sqrt{x}\leq 0,5 \end{array}\right.$

1) $\sqrt{x}\geq 1$ - правая и левая части неравенства неотрицательны => имеем право возвести в квадрат $x\geq 1$

2) $\sqrt{x}\leq\frac{1}{2}$ - аналогично $x\leq\frac{1}{4}$. С учетом ОДЗ $0\leq x\leq\frac{1}{4}$.

Ответ: объединение решений первого и второго неравенства.

Ответ : $[0;0,25]\cup[1;+\infty)$

Метод введения новой переменной (обратные числа).

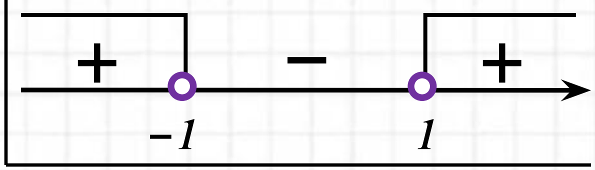
Методы

Переходы

Пример 8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<\dfrac{3}{2}$

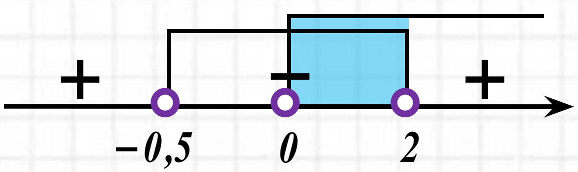
Объясни, почему.

$$ОДЗ:\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\ge 0\\[2mm] \dfrac{x-1}{x+1}\ge 0\end{cases}$$



$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\Rightarrow\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{1}{t}\qquad t-\frac{1}{t}<\frac{3}{2}\ \Big|\times 2t>0$$

$$2t^2-3t-2<0\Leftrightarrow 2(t-2)(t+0,5)<0$$



Учтем условие $t>0$

$$\begin{cases}t>0\\ t<2\end{cases}\qquad\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}>0\\[2mm] \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<2\end{cases}$$

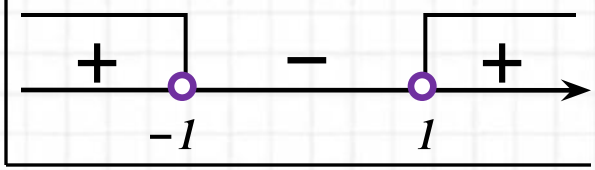
Метод введения новой переменной (обратные числа).

Пример 8.

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} > 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} < 2 \end{cases}$$

$$ОДЗ: \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \geq 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$$



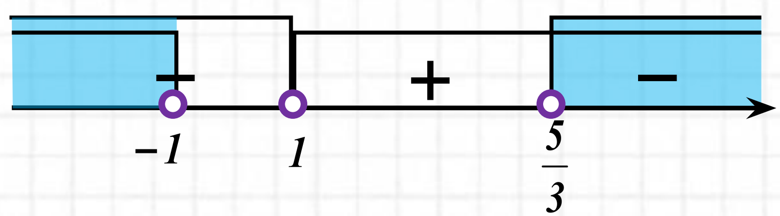
$$1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 0 \qquad x \in ОДЗ$$

$$2)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} < 2$$

- правая и левая части неравенства неотрицательны => имеем право возвести в квадрат

$$\frac{x+1}{x-1} < 4 \Leftrightarrow \frac{-3x+5}{x-1} < 0$$

Учтем ОДЗ



$$Ответ: (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$$

Метод введения новой переменной.

Методы

Переходы

Часто, даже если вы не видите повторяющиеся и обратные выражения, введение новой переменной может значительно облегчить решение неравенства.

$$ОДЗ:\begin{cases}2x+3\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}$$

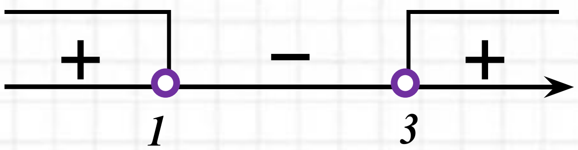
$$\begin{cases}x\ge -\dfrac{3}{2}\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$$

Пример 9. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$

$$t=\sqrt{x-2}\Rightarrow t^2=x-2\Rightarrow x=t^2+2$$

$$\sqrt{2(t^2+2)+3}-t>2$$

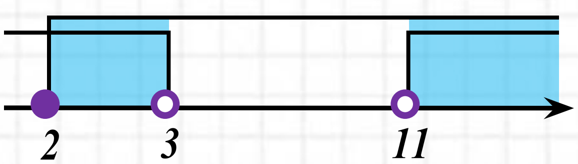
Объясни, почему.



$$\sqrt{2t^2+7}>2+t\Leftrightarrow 2t^2+7>(2+t)^2\Leftrightarrow (t-1)(t-3)>0$$

$$\left[\begin{aligned}&t<1\\ &t>3\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&\sqrt{x-2}<1\\ &\sqrt{x-2}>3\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&x-2<1\\ &x-2>9\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&x<3\\ &x>11\end{aligned}\right.$$

Учтем ОДЗ



$Ответ:[2;3)\cup(11;+\infty)$

Метод введения новой переменной (полезна наблюдательность).

Пример 10.

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 1.5(x+4)$$

$$ОДЗ: 2x^2-3x+2\ge 0$$

$$D<0 \qquad a>0$$

$$x\in R$$

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 1.5x+6 \quad \Big|\times 2$$

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 3x+12$$

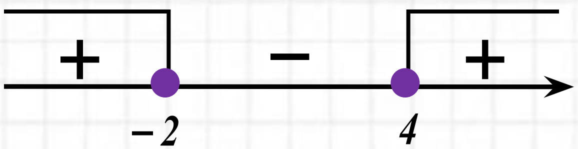
$$t=\sqrt{2x^2-3x+2}\Rightarrow$$

$$2x^2-3x+2=t^2$$

Объясни, почему.

$$(2x^2-3x+2)-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8\ge 0$$

$$t^2-2t-8\ge 0$$

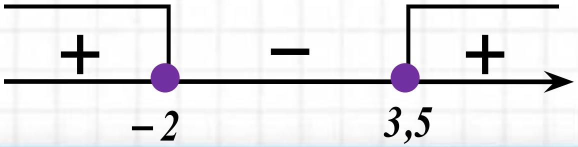


$$\left[\begin{array}{l} t\ge 4 \\ t\le -2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-3x+2}\ge 4 \\ \sqrt{2x^2-3x+2}\le -2 \quad \varnothing \end{array}\right.$$

$$\sqrt{2x^2-3x+2}\ge 4 \Leftrightarrow 2x^2-3x+2\ge 16$$

$$2x^2-3x-14\ge 0$$

$$2(x+2)(x-3{,}5)\ge 0$$



Ответ: $(-\infty;-2]\cup[3{,}5;+\infty)$

Использование свойств квадратного корня.

1) $\sqrt{f(x)} \ge 0,$ 2) $\sqrt{f(x)\cdot g(x)} = \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$

Методы

Переходы

Второе свойство справедливо с ограничениями так как может изменять ОДЗ. !

(Аналогично для частного)

$$ОДЗ: \begin{cases} 8 - x > 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ 8 + 15x - 2x^2 > 0 \end{cases}$$

$$x \in (-0,5; 8)$$

Пример 11.

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > \frac{1}{\sqrt{8+15x-2x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > \frac{1}{\sqrt{(8-x)(2x+1)}} \quad \Big| \times \sqrt{(8-x)(2x+1)} > 0$$

$$\frac{\sqrt{8-x}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt{8-x}} - \frac{\sqrt{8-x}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} > 1$$

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{8-x} > 1$$

$$\sqrt{2x+1} > 1 + \sqrt{8-x}$$

$$2x + 1 > 9 - x + 2\sqrt{8-x}$$

Объясни, почему.

$$2\sqrt{8-x} < 3x - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8 \ge 0 \\ 8 - x \ge 0 \\ 4(8-x) < (3x-8)^2 \end{cases}$$

Использование свойств квадратного корня.

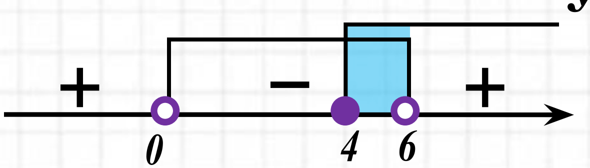
1) $\sqrt{f(x)} \geq 0,$ 2) $\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$

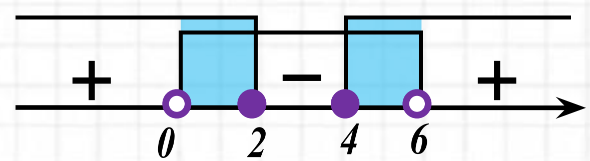
Второе свойство справедливо с ограничениями так как может изменять ОДЗ.

Решения следующих неравенств не совпадают.

$\sqrt{8} - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4} > 0$	$\sqrt{8} - \sqrt{(x-2)(x-4)} > 0$
$ОДЗ: x \geq 4$	$ОДЗ: x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$
$\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4} < \sqrt{8}$	$\sqrt{(x-2)(x-4)} < \sqrt{8}$
$(x-2)(x-4) < 8$	$(x-2)(x-4) < 8$
$x(x-6) < 0$	$x(x-6) < 0$

Учтем ОДЗ





$Ответ: [4; 6)$

$Ответ: (0; 2] \cup [4; 6)$

Вывод: начинай решение с ОДЗ!

Назад

Использование свойств квадратного корня.

Методы

Переходы

1) $\sqrt{f(x)} \geq 0,$ 2) $\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$

Пример 11.

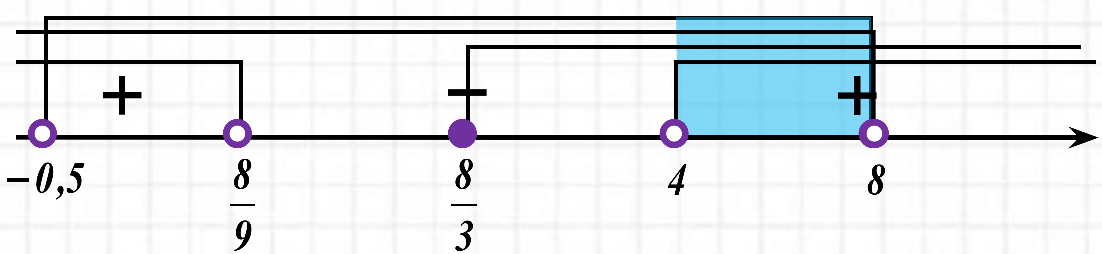
$$\frac{1}{\sqrt{8-x}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > \frac{1}{\sqrt{8+15x-2x^2}}$$

$$ОДЗ: \begin{cases} 8-x>0 \\ 2x+1>0 \\ 8+15x-2x^2>0 \end{cases}$$

$$x \in (-0{,}5; 8)$$

$$\begin{cases} 3x-8 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \\ 4(8-x) < (3x-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x \leq 8 \\ (9x-8)(x-4) > 0 \end{cases}$$

Учтем ОДЗ



Ответ : (4;8)

Использование свойств квадратного корня.

Методы

Переходы

1) $\sqrt{f(x)} \geq 0,$ 2) $\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$

Пример 12. $\sqrt{20 - x^2 + x} \cdot (x^2 - 8x + 12) \leq 0$

$ОДЗ: 20 - x^2 + x \geq 0$

$x \in [-5; 4]$

Так как первый множитель (корень) неотрицателен, следовательно не влияет на знак правой части неравенства.

Рассмотрим два случая.

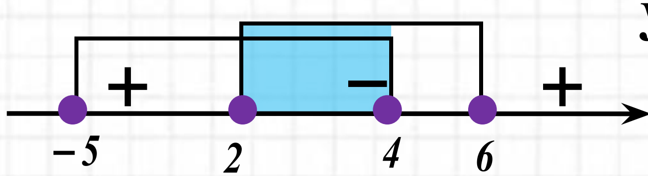
1 случай. $\sqrt{20 - x^2 + x} = 0$

В этом случае неравенство выполнено => $\left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 4 \end{array}\right.$ - решения.

2 случай. $\sqrt{20 - x^2 + x} > 0$ Тогда имеем право разделить обе части неравенства на положительный множитель не меняя знак.

$x^2 - 8x + 12 \leq 0$

$(x - 2)(x - 6) \leq 0$



Учтем ОДЗ

$Ответ: \{-5\} \cup [2; 4]$

Решение неравенств, содержащих двойные радикалы.

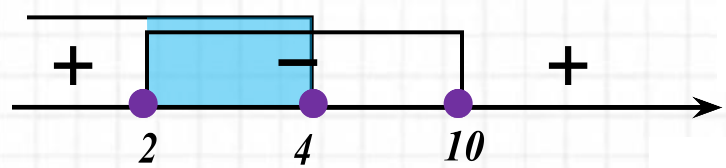
Пример 13.

1 способ

Так как обе части неотрицательны, то возведем их в квадрат: $x + 2\sqrt{x-1} \geq 4$

При $x \geq 1$ выполнены оба условия.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 4 \\ (x-10)(x-2) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Решение неравенств, содержащих двойные радикалы (использование свойства) .

Методы

Переходы

Пример 13.

Объясни, почему.

2 способ

Заметим, что

Возведем обе части в квадрат:

Согласитесь, что решение получено более коротким и простым путем.

Вывод: если видишь корень под корнем ищи полный квадрат!

Задачи из тренировочных и диагностических работ для подготовки к ЕГЭ.

Методы

Переходы

Пример 14.

Можно даже не находить ОДЗ.

Данное неравенство может быть выполнено только в случае когда оба корня обращаются в ноль.

Подстановкой определяем, что только -3 обращает в ноль второй корень.

Задачи из тренировочных и диагностических работ для подготовки к ЕГЭ.

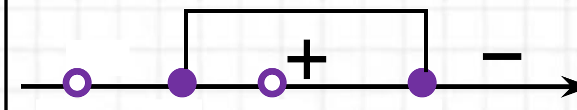
Методы

Переходы

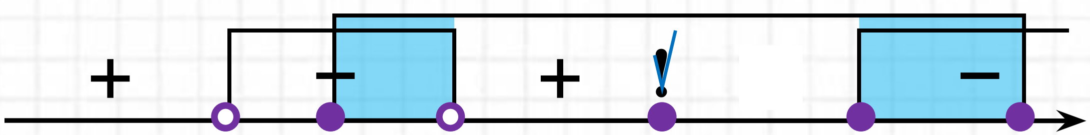
Пример 15.

Воспользуемся методом замены множителей

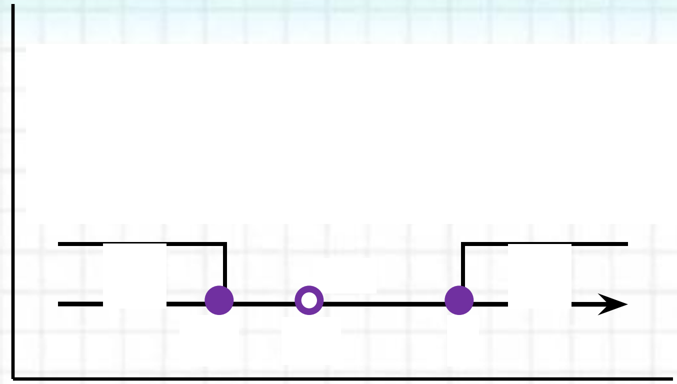
Объясни, замену.



Учтем ОДЗ



Пример 16.



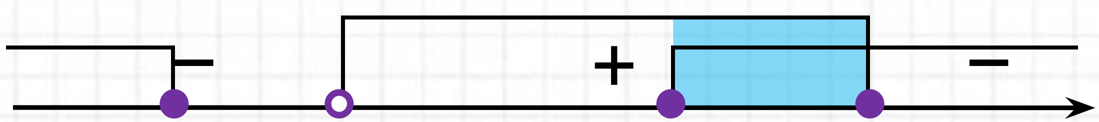
Воспользуемся неотрицательностью корня

1 случай:

- решения неравенства.

2 случай: *Тогда имеем право разделить обе части* ***неравенства на положительный множитель не меняя знак неравенства.***

Учтем ОДЗ



Тренировочные упражнения.