6.4. Степенная функция

Изучим отображение, осуществляемое степенной функцией $w = z^n$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Функция $w = z^n$ определена на $D = \mathbb{C}$. Доопределим ее в т. $z = \infty$, положив $w(\infty) = \infty$.

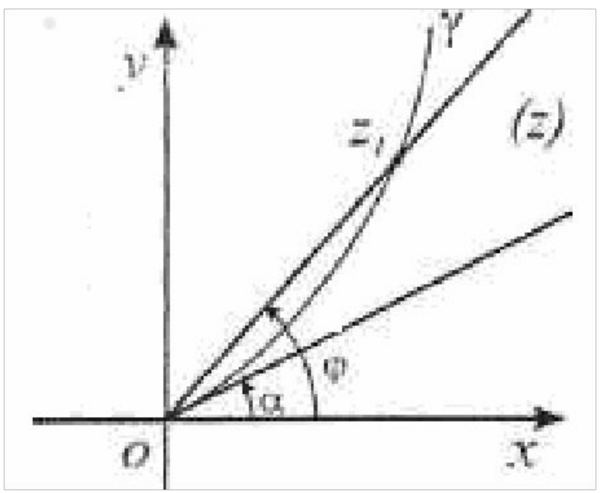
Функция $w = z^n$ имеет производную в любой т. $z: w' = nz^{n-1}$, $w' \neq 0$ при $z \neq 0$. Поэтому, отображение, осуществляемое этой функцией конформно. Она отображает расширенную плоскость (z) на расширенную плоскость (w).

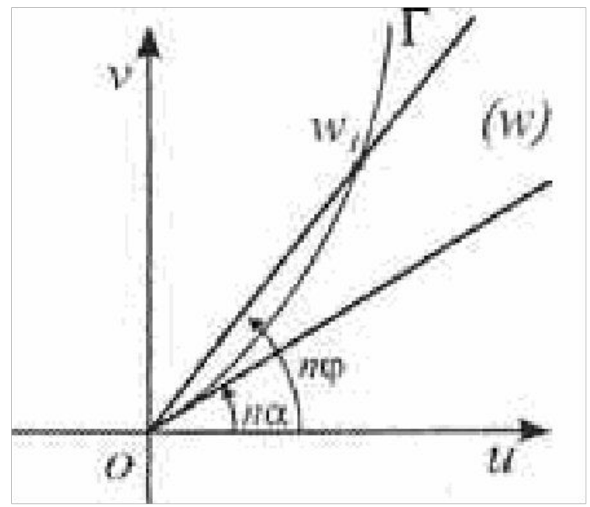
Эта функция не является однолистной, всякая т. w, отличная от нуля и бесконечности имеет ровно n прообразов, содержащихся в формуле $\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)$

$k = \overline{0, n-1}$.

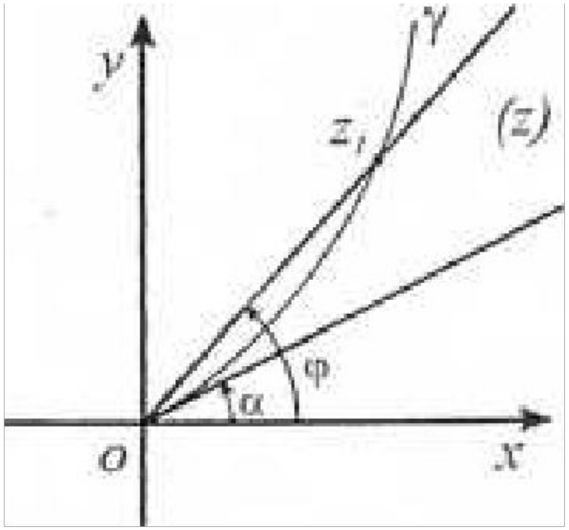
Итак, отображение $w = z^n$ не является взаимно-однозначным.

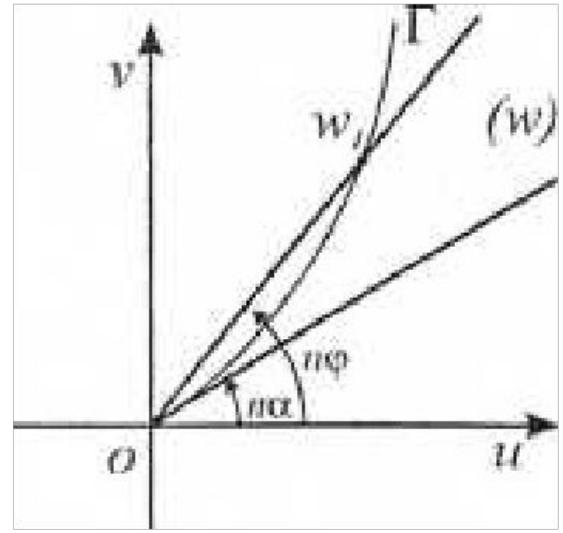
Выясним, сохраняются ли углы в т. $z=0$ и $z=\infty$ при отображении $w=z^n$.



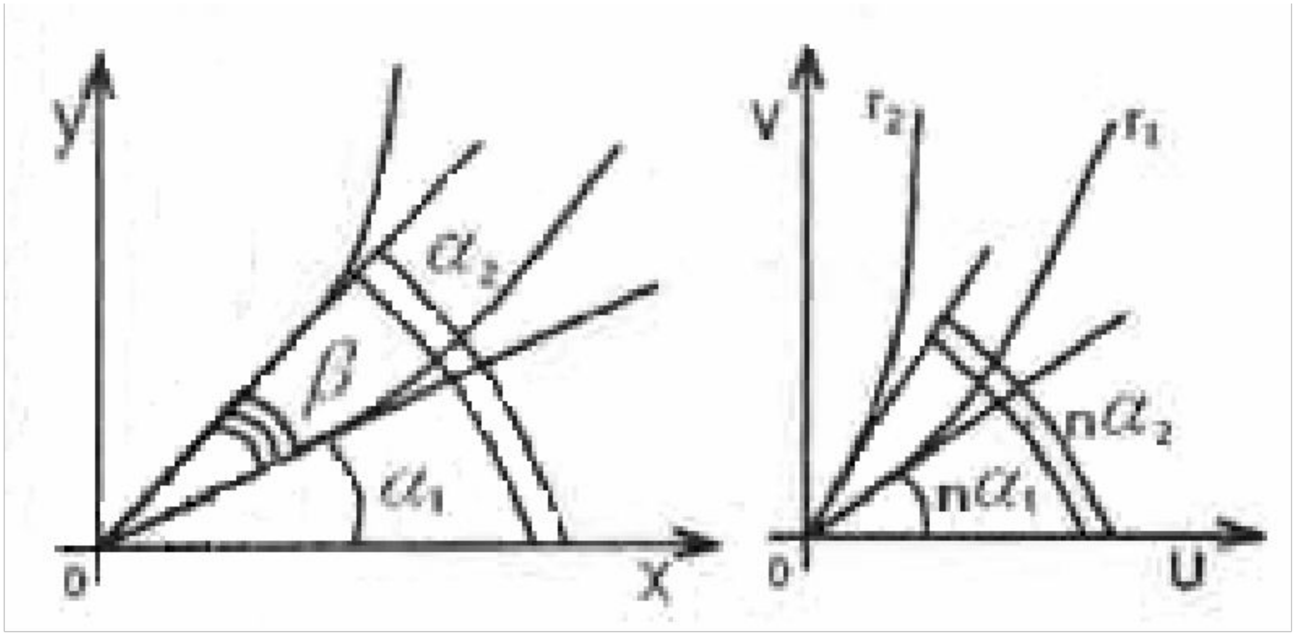


Пусть γ - кривая, выходящая из т. $z=0$, касательная к которой наклонена под углом α к оси $0x$.





Пусть Г - образ этой кривой в плоскости (w) при отображении $w = z^n$. Проведем через т. $z_1 \in \gamma\left(z_1 \neq 0\right)$ и $z = 0$ секущую. Одно из значений $Argz_1$(угол наклона к оси $0x$) будет стремится к α при стремлении т. z_1 к $z = 0$ по линии γ. При этом соответствующая т. $w_1 = z_1^n$, будет стремиться по кривой Г к $w = 0$ и одно из значений $Argw_1 = nArgz_1$ будет стремиться к $n\alpha$ - углу наклона касательной к Г в т. $w = 0$.



Пусть теперь из т. $z=0$ выходят кривые γ_1 и γ_2, касательные к которым образуют с осью Ox углы α_1 и α_2. Тогда угол между γ_1 и γ_2 в т. $z=0$ равен $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$. Образы этих кривых - Γ_1, Γ_2 при отображении $w=z^n$ образуют с осью Ov углы соответственно $n\alpha_1$ и $n\alpha_2$. Поэтому угол между Γ_1 и Γ_2 в т. $w=0$ равен $n\alpha_2 - n\alpha_1 = n\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = n\beta$. Итак, отображение $w=z^n$ в т. $z=0$ увеличивает углы в n раз.

Покажем теперь, что в т. $z=\infty$ углы тоже увеличиваются в n раз. Пусть L_1 и L_2 - кривые, угол между которыми в т. $z=\infty$ равен β. Это означает по определению угла в т. $z=\infty$, что образы кривых L_1 и L_2 при отображении $\xi=\frac{1}{z}$ кривые l_1 и l_2 образуют в т. $\xi=0$ угол β. С другой стороны угол между кривыми L_1' и L_2' (образами кривых L_1 и L_2 при отображении $w=z^n$) в т. $w=\infty$ равен углу между кривыми l_1' и l_2' в т. $\tau=0$, где l_1' и l_2' - образы кривых L_1' и L_2' при отображении $\tau=\frac{1}{w}$.

В следствие очевидного соотношение $\tau = \frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \xi^n$ кривые l_1' и l_2' служат образами кривых l_1 и l_2 при отображении $\tau = \xi^n$. Следовательно, по доказанному выше, угол между l_1' и l_2' в т. $\tau = 0$ равен $n\beta$, откуда угол между L_1' и L_2' в т. ∞ равен $n\beta$, что и требовалось доказать

Из правила возведения комплексного числа в степень

$z^n = |z|^n (\cos nArgz + i\sin nArgz)$ следует для $w = z^n$: $|w| = |z|^n$,

$Argw = nArgz$.

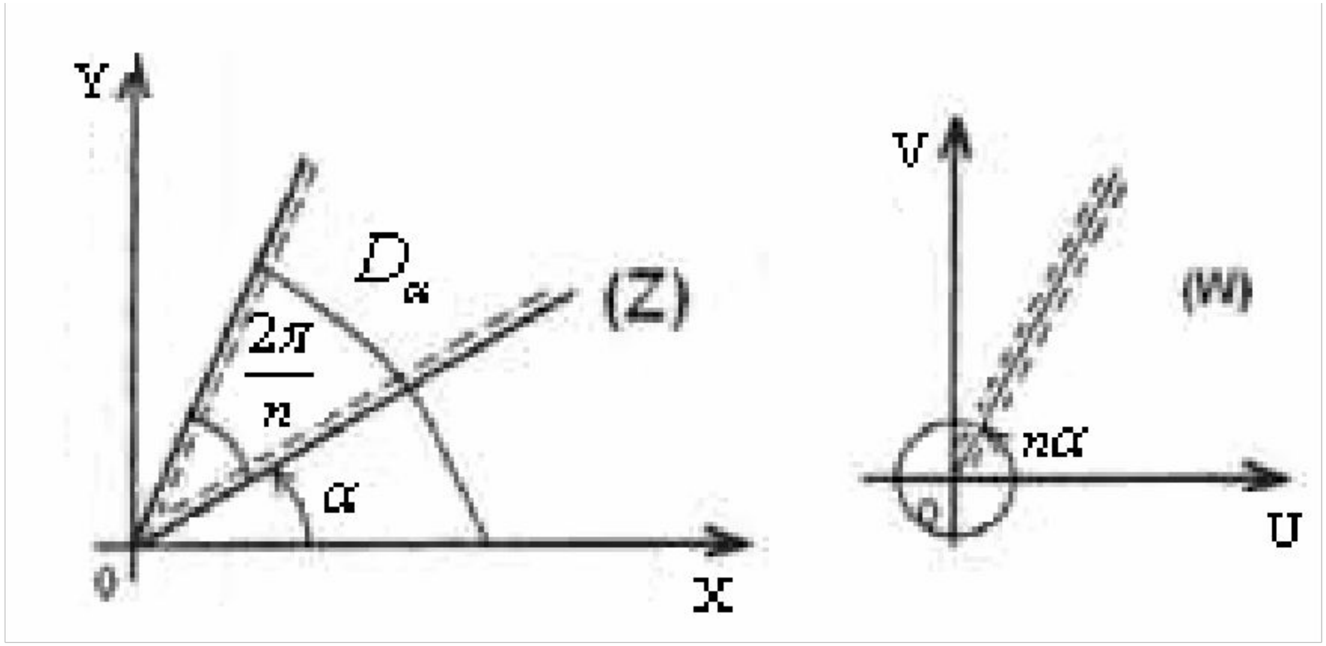
Отсюда видно, что функция $w = z^n$ отображает луч

$Argz = \varphi_0 + 2\pi k$, выходящий из т. $z = 0$ под углом φ_0 к положительному направлению оси Ox, на луч $Argw = n\varphi_0 + 2\pi k$, выходящий из т. $w = 0$ под углом $n\varphi_0$ к положительному направлению оси Ou.

Окружность $|z| = r$ центром в начале координат и радиуса r отображается функцией $w = z^n$ на окружность $|w| = r^n$ с центром в т. $w = 0$ радиусом r^n. Когда т. z один раз описывает окружность в положительном направлении (аргумент непрерывно возрастая увеличивается на 2π) точка $w = z^n$ обежит n раз окружность $|w| = r^n$ (аргумент непрерывно возрастая увеличится на $2\pi n$).

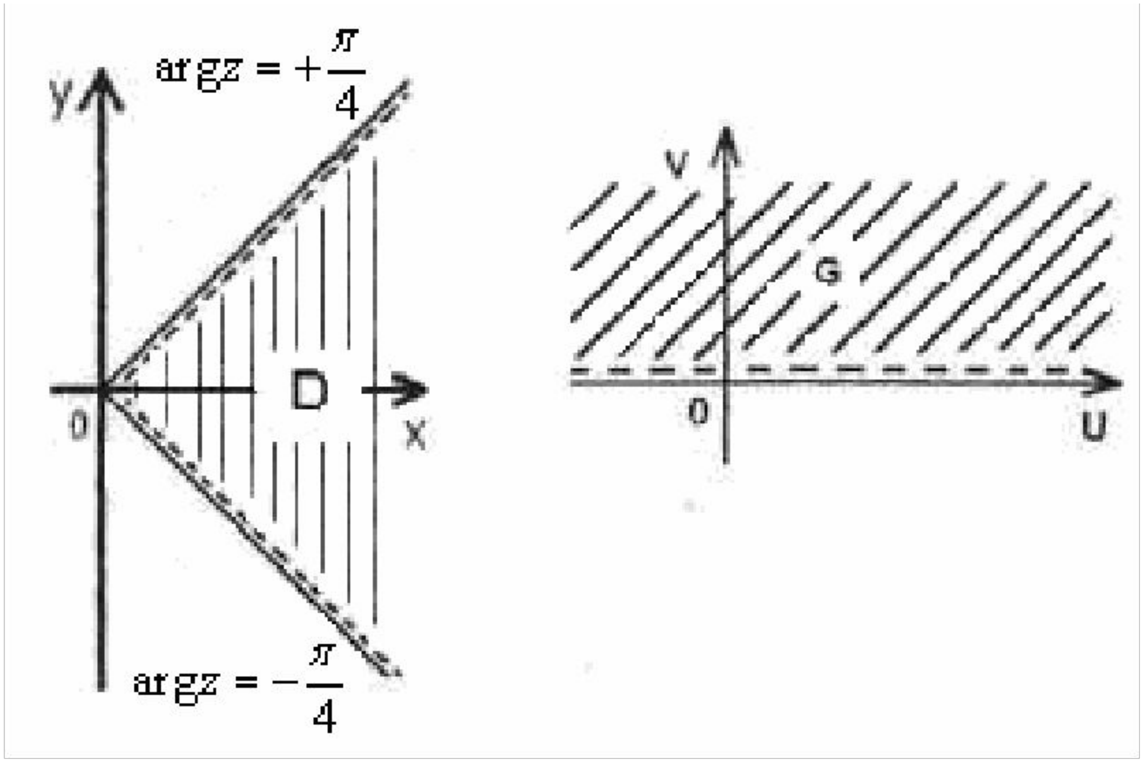
Функция $w = z^n$ не является однолистной, но для нее можно выделить область однолистности. Таковой является внутренность любого угла с центром в т. $z = 0$ раствором $\frac{2\pi}{n}$.

Простейшей такой областью является внутренность угла D_α с вершиной в т. $z = 0$: $\alpha < \varphi < \alpha + \frac{2\pi}{n}$.



Образом D_α при отображении $w = z^n$ служит область G - внутренность угла раствора $\frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi$ с центром в т. $w = 0$, ограниченного лучами $n\alpha$ и $n\alpha + 2\pi$, т.е. вся плоскость с разрезом вдоль луча $Arg w = n\alpha + 2\pi k$.

Так как $w = z^n$ однолистна в D_α, то она отображает D_α взаимно однозначно и конформно на плоскость (w) с разрезом вдоль луча $Arg w = n\alpha + 2\pi k$.

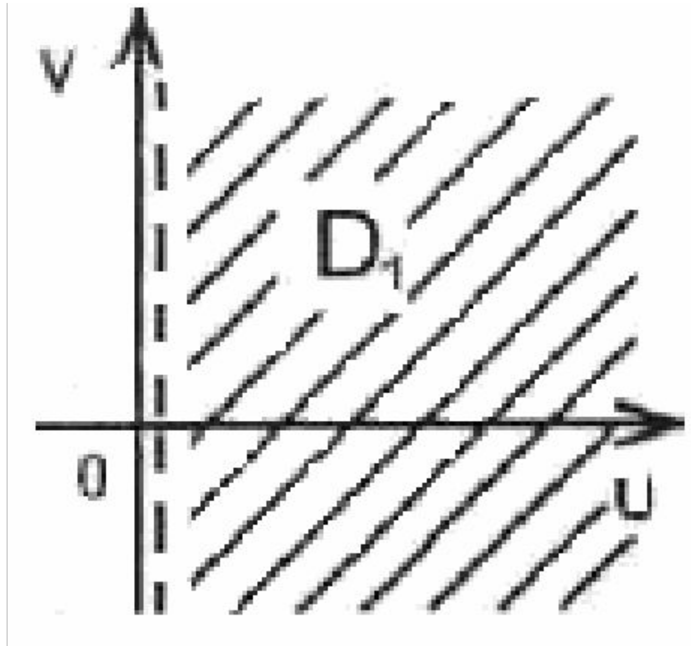


Пример. Отобразим взаимно однозначно и конформно

внутренность угла D. $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ на верхнюю полуплоскость.

Так как D угол раствора $\frac{\pi}{2}$, а полуплоскость угол раствора π, то применяя отображение $\xi = z^2$, переводим D в полуплоскость $D_1 : -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

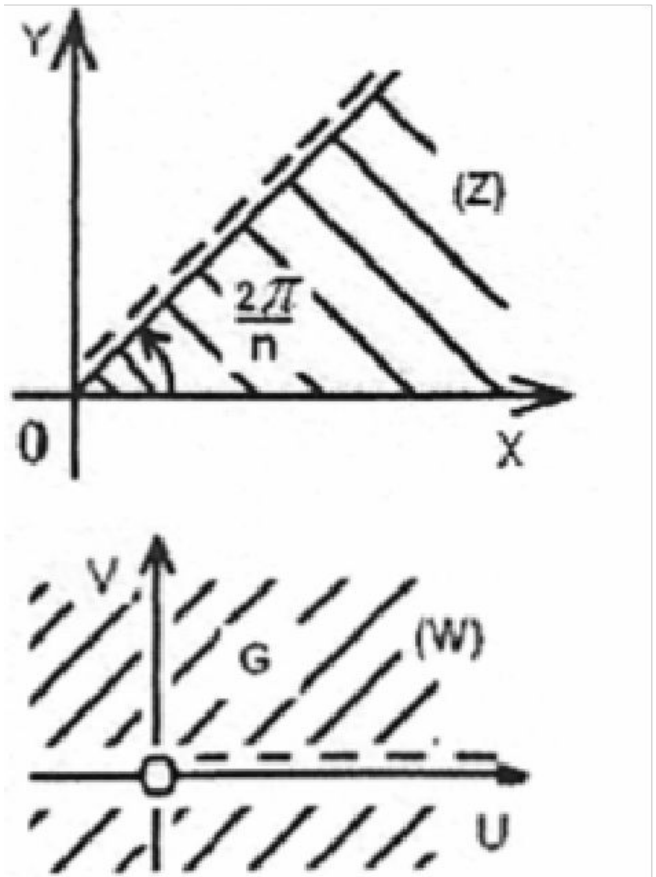
Изобразите D_1!



Затем поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении отобразим D_1 на G. Поворот на можно осуществить при помощи линейной функции $w = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\xi = i\xi$.

Итак, искомое отображение $w = iz^2$.

6.5. Функция $w = \sqrt[n]{z}$. Понятие многозначной функции. Выделение однозначных ветвей



Рассмотрим в плоскости (z) угол D раствором $\dfrac{2\pi}{n}$ с вершиной $z=0$, ограниченной лучами $Argz = 2\pi k$ и $Argz = \dfrac{2\pi}{n} + 2\pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

Тогда функция $w = z^n$ отобразит внутренность угла D взаимно однозначно и конформно на область G - плоскость (w) с разрезом вдоль луча $Argw = 2\pi l, l \in Z$.

Является ли $w = z^n$ однолистной в D? Если да, что из этого следует?

В области D функция $w=z^n$ однолистна, образом D при этом отображении является область G. Следовательно для функции $w=z^n$, определенной в области D, существует обратная функция, определенная в области G и имеющая множеством значений область D.

Обозначим эту обратную функцию $z=\left(\sqrt[n]{w}\right)_1$. Эта функция является аналитической в G. Почему?

Как обратная аналитической функции $w = z^n$, D.

Производная от этой обратной вычисляется по формуле...?...

$$\frac{d\left(\sqrt[n]{w}\right)_1}{dw}=\frac{1}{\left(z^n\right)^{/}}=\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{w_1}\right)^{n-1}}\ (*)$$ совпадающей с

известной формулой для функции действительной переменной.

Для функции $w = z^n$ существуют области однолистности, отличные от выбранной нами области D. В качестве области однолистности для данной функции можно выбрать любой угол (точнее его внутренность) с вершиной в т. $z = 0$, раствором $\dfrac{2\pi}{n}$. Эти области можно выбрать так, чтобы они не налегая друг на друга заполняли собой всю плоскость (z).

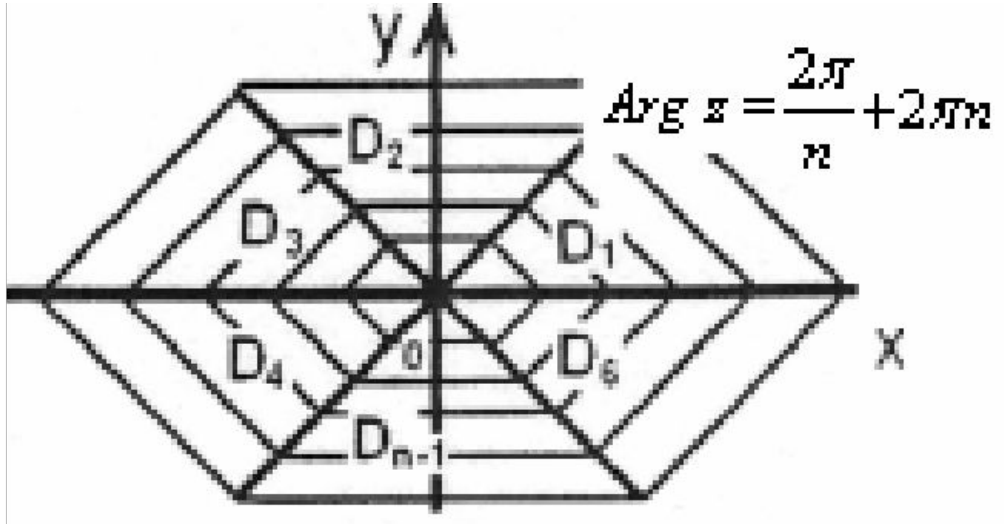


Рис. 1

Каждая из областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ отображается при помощи функции $w = z^n$ однозначно и конформно на плоскость (w) с разрезом вдоль положительной действительной полуоси Ou.

В самом деле любой луч $Arg\ z = \frac{2\pi}{n}k + 2\pi n$, где $k = \overline{0, n-1}$

отображается на луч $Argw = n\frac{2\pi}{n}k + 2\pi m = 2\pi(k + m)$.

Итак, всякий угол D_k функция $w = z^n$ отображает взаимно однозначно и комформно на одну и ту же область G (плоскость (w)) с разрезом вдоль положительной действительной оси. Соответствие, обратное соответствию $D_k \to G$, определяет однозначную функцию, обратную к $w = z^n$, которую обозначим $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$. Эта функция отображает G на D_k.

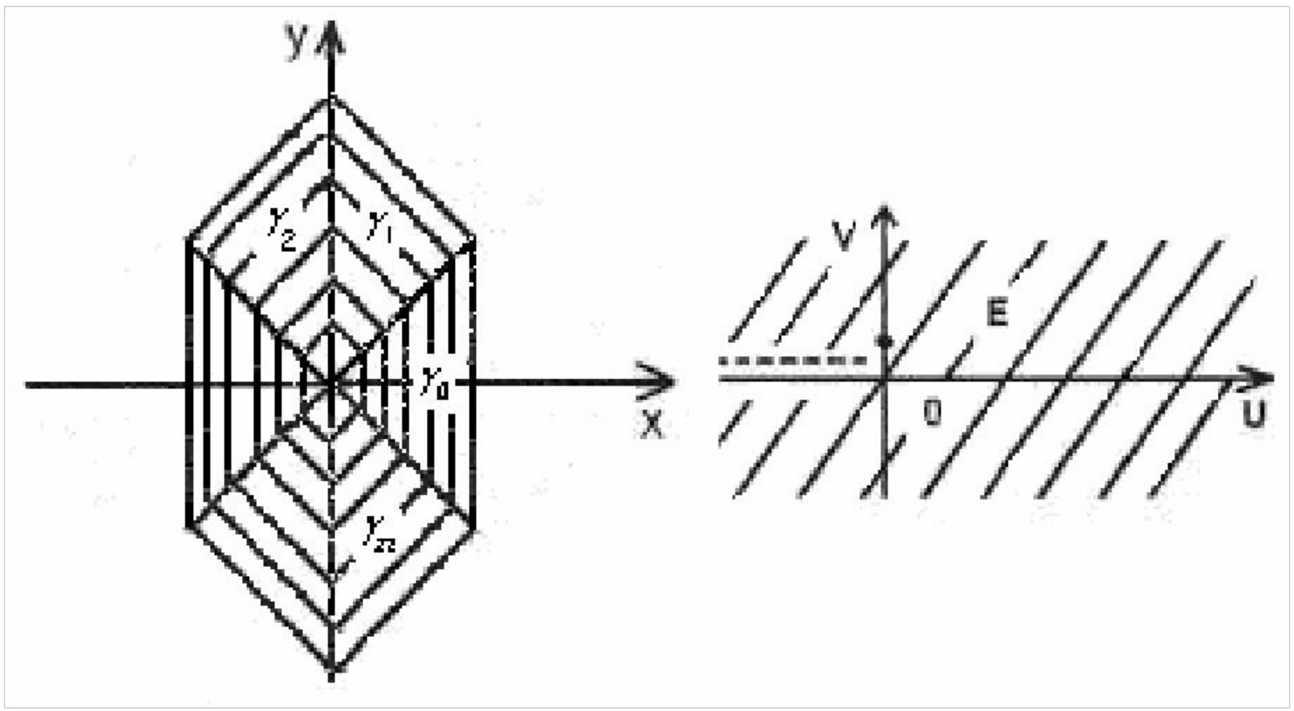
Если W изменяется в области G, то z можно считать изменяющимся в любой из областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, благодаря чему можно говорить не об одной, а об n обратных функциях для функции $w = z^n$ определенных в области G, и имеющих множество значений соответственно в области $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Множество всех этих обратных можно рассматривать как многозначную функцию, обратную к функции $w = z^n$, которую будем обозначать $z = \sqrt[n]{w}$.

Каждую из обратных функций для функции $w = z^n$ рассматривают как однозначную ветвь многозначной функции $z = \sqrt[n]{w}$. Функция $z = \sqrt[n]{w}$ имеет n ветвей, это n-значная функция. Чтобы фиксировать какую-либо из ветвей достаточно лишь указать в какой области изменяется z. В соответствии с обозначениями на рис. 1 будем пользоваться следующими обозначениями для однозначных ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$:

$\left(\sqrt[n]{w}\right)_1, \left(\sqrt[n]{w}\right)_2, \ldots, \left(\sqrt[n]{w}\right)_n$.

Замечание 1. Необходимо иметь в виду, что понятие ветви тесно связано с определенным выбором области однолистности. Так, можно было бы выбрать области однолистности следующим образом: γ_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, где γ_k - угол с вершиной в т. $z=0$, ограниченный лучами: $Arg z = -\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $Arg z = \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, где $k = \overline{0, n-1}$

Любая из областей $\gamma_л$ отображается на одну область - E комплексную плоскость (w) с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси.



В самом деле, когда т. $z = |z| e^{i \arg z}$ описывает луч $\arg z = \alpha = const$, то т. $w = z^n = e^{in \arg z}$ описывает луч $\arg z = n\alpha = const$.И если α меняется от $\frac{-\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ до $\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, то луч $\arg z = \alpha$ вращаясь против часовой стрелки пробегает всю область γ_k, в то время как соответствующий ему луч $\arg w = n\alpha$ вращаясь против часовой стрелки от луча $Argw = -\pi + 2\pi k$ до луча $Argw = -\pi + 2\pi k$ пробегает всю область E.

В области E тоже может быть определена функция, обратная функции $w = z^n$, притом n различными способами сообразно n различным областям $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Иными словами в области E могут быть определены n ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$.

Если зафиксировать одну из областей γ_n, мы получим одну из ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$.

При этом, если W лежит в верхней полуплоскости $0 < \arg w < \pi$, точка z лежит внутри угла $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$, т.е. в части плоскости принадлежащей как области D_1, так и области γ_0. Если w лежит в нижней полуплоскости $(-\pi < \arg z < 0)$, то z лежит внутри угла $-\frac{\pi}{n} < \arg z < 0$, т.е. части (z) плоскости, принадлежит как области γ_0, так и области D_n.

Что это значит?

Это значит, что рассматриваемая нами ветвь функции $z = \sqrt[n]{w}$ в верхней полуплоскости совпадает с ранее определенной ветвью $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_1$, а в нижней полуплоскости будет совпадать с другой ветвью, а именно $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_n$. Итак, было бы неправильно рассматривать ветви одной и той же многозначной функции как отдельные функции.

В приведенном примере при изменившемся выборе области однолистности две ветви $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_1$ и $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_n$, рассматривавшиеся сначала как различные, определяют одну и ту же ветвь.

Поменяв ролями z и w многозначную функцию, обратную к степенной $w = z^n$ запишем виде $w = \sqrt[n]{z}$.

Пример 1. Пусть $n=2$ и G-плоскость (z) с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси.

Этому случаю соответствует разбиение плоскости (w) на две полуплоскости $D_1: \mathrm{Re}\, w > 0$ и $D_2: \mathrm{Re}\, w < 0$.

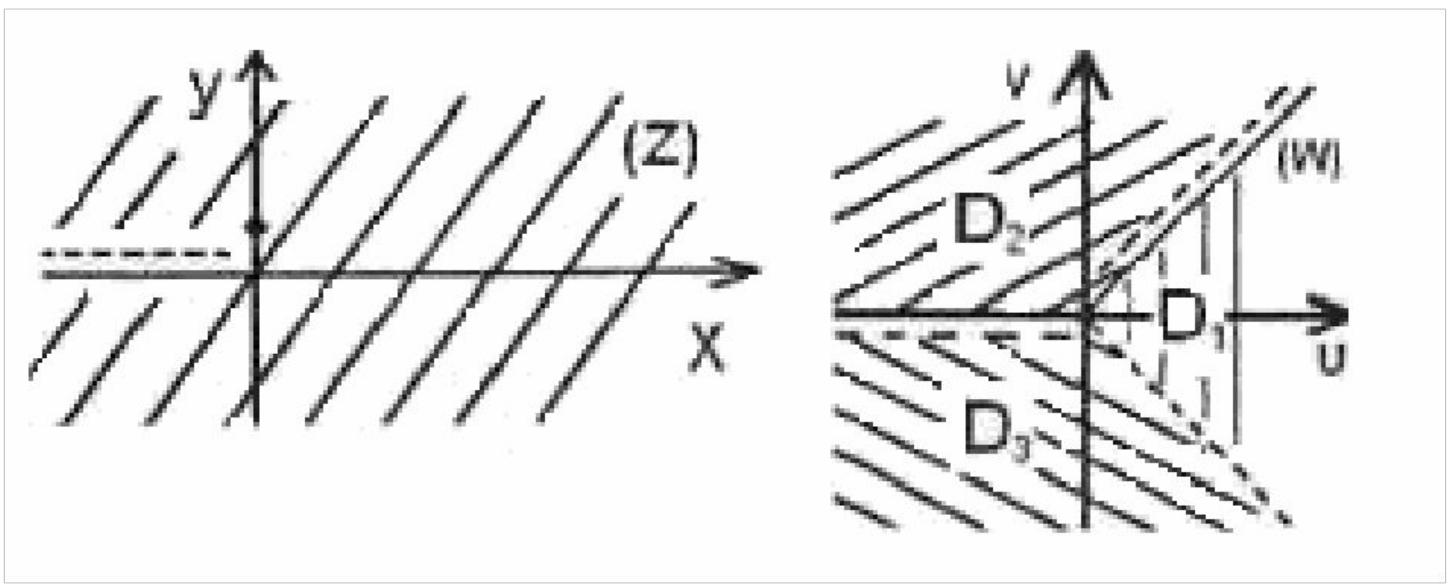
Ветвь $\sqrt{z}$, отображающая G на D_1 есть

$\left(\sqrt{z}\right)_1 = \sqrt{|z|}\left(\cos\dfrac{\arg z}{2} + i\sin\dfrac{\arg z}{2}\right)$, а ветвь, отображающая G на D_2 есть $\left(\sqrt{z}\right)_2 = \sqrt{|z|}\cdot\cos\dfrac{\arg z + 2\pi}{2} + i\sin\dfrac{\arg z + 2\pi}{2}$.

Замечание 2. В силу того, что области D_k и D_j не имеют общих точек при $k \neq j$, область D_k определяется заданием какой-либо одной точки w_0, ей принадлежащей. Поэтому, чтобы выделить однозначную ветвь $\sqrt[n]{z}$ в данной области G, достаточно задать в какой-либо одной то-чке $z_0 \in G$ значение $\sqrt[n]{z_0} = w_0$.

Пример 2. В плоскости (z) с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси (область G) выделим ветвь $\sqrt[3]{z}$, которая в т. $z_0 = 1$, принимает значение $w_0 = 1$. Здесь области D_1, D_2, D_3 на которые отображают G различные ветви $\sqrt[3]{z}$ есть D_k:

$$\frac{-\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} < \arg w < \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}.$$



Очевидно, $w_0 = 1$ принадлежит D, и ветвь $\sqrt[3]{z}$ есть

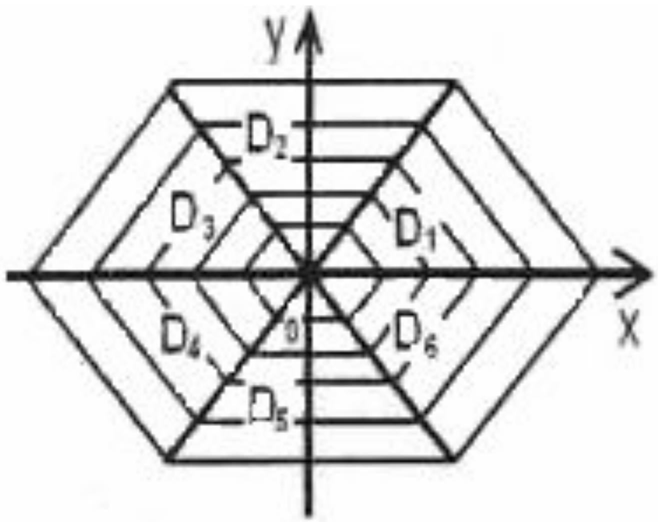
$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1 : \left(\sqrt[3]{z}\right)_1 = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{3} + i\sin\frac{\arg z}{3}\right).$$

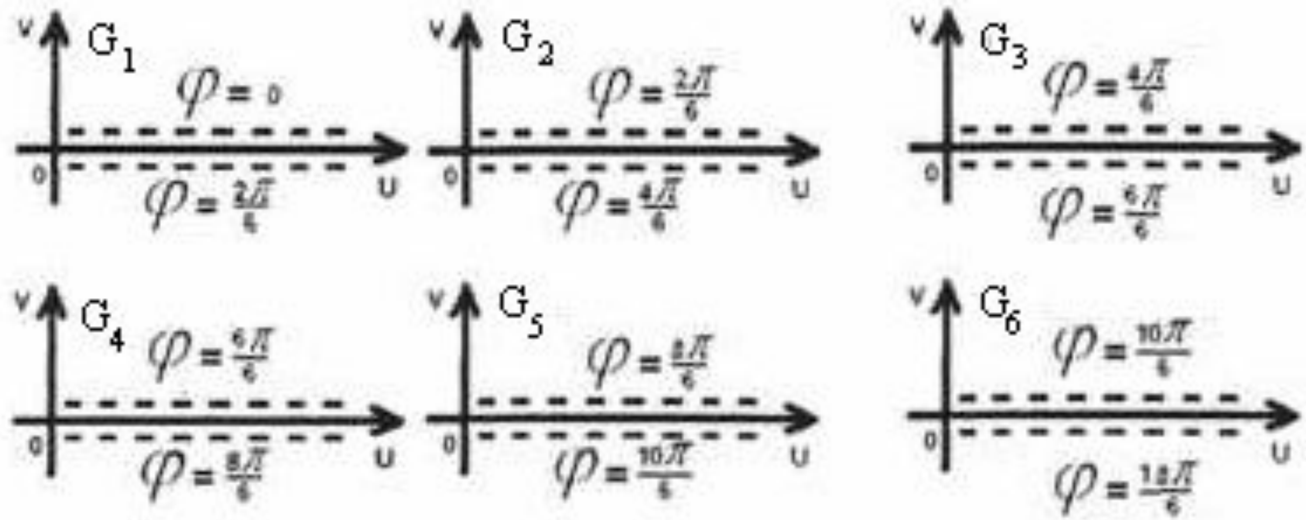
Она отображает G взаимно однозначно и конформно на

область $D_1 : -\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$.

6.6. Понятие римановой поверхности

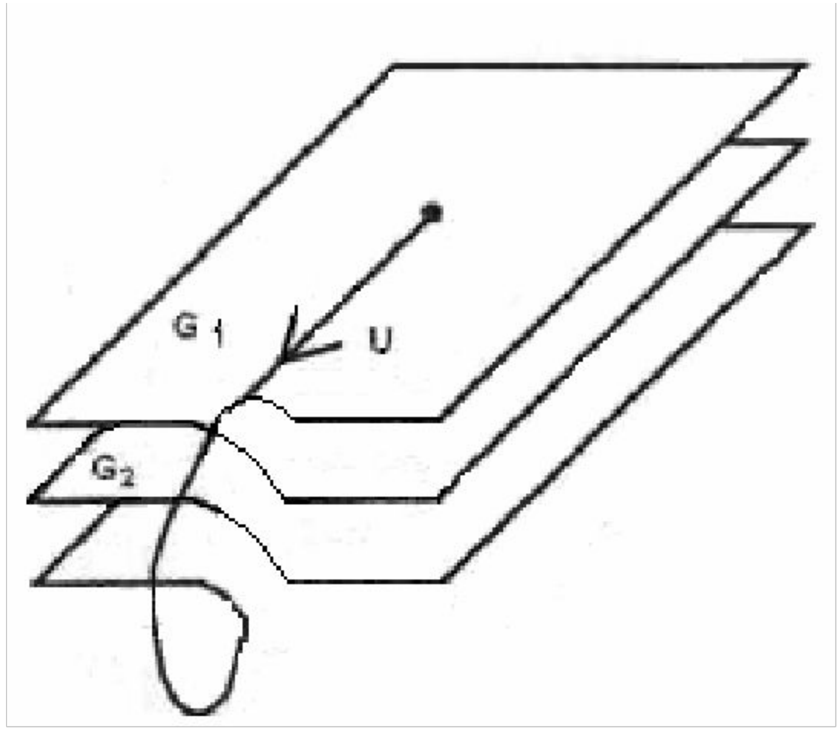
Соответствие между плоскостями (z) и (w), устанавливаемое функциями $w = z^n$ не является взаимно однозначным. Для восстановления взаимной однозначности, следует взять n экземпляров $\left(\text{листов}\right)$ плоскости (w) с разрезом вдоль положительной действительной полуоси Ov и поставить к-тый экземпляр G_k в соответствие с углом D_k.


y
x
0
D_1
D_2
D_3
D_4
D_5
D_6


G_1
$\varphi = 0$
$\varphi = \frac{2\pi}{6}$
G_2
$\varphi = \frac{2\pi}{6}$
$\varphi = \frac{4\pi}{6}$
G_3
$\varphi = \frac{4\pi}{6}$
$\varphi = \frac{6\pi}{6}$
G_4
$\varphi = \frac{6\pi}{6}$
$\varphi = \frac{8\pi}{6}$
G_5
$\varphi = \frac{8\pi}{6}$
$\varphi = \frac{10\pi}{6}$
G_6
$\varphi = \frac{10\pi}{6}$
v
u
0

При этом лучу $\arg z = \dfrac{2\pi k}{n}$, будет соответствовать нижний разрез к-того листа плоскости (w) и верхний край разреза $(k+1)$ листа.

Для восстановления однозначности соответствия их необходимо соединить, или, как говорят склеить.



Таким образом все листы плоскости (w) окажуться соединенными последовательно. Свободными окажутся лишь нижний край разреза n-ого листа и верхний разрез первого листа. Но они соответствуют одному итому же лучу - положительному направлению оси Ox: $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Поэтому их тоже нужно склеить.

Полученная поверхность называется поверхностью Римана. Функция $w = z^n$ отображает плоскость (z) на поверхность Римана взаино однозначно.

Замечание. Б. Риман стал впервые рассматривать многозначные аналитические функции комплексной переменной на мнолистных поверхностях, получивших его имя.

Значения функции $w = z^n$ расположены на n $(n > 2)$ листах плоскости (w) и поэтому называется многолистной.
При склеивании листов плоскости (n) указанным способом мы скрепляем все листы в т. $w = 0$ и $w = \infty$.

Это связано с тем, что каждому значению w, отличному от 0 и ∞, соответствует n значений z, но $w=0$ соответствует единственное значение, $z=0$, а $w=\infty$ соответствует $z=\infty$, точки $w=0$ и $w=\infty$ обладают особым свойством. Если заставить точку римановой поверхности вращаться вокруг т. $w=0$, то она будет переходить с одного листа на другой и обойдя все n листов, попадет в первоначальное положение

То же можно сказать и о т. $w = \infty$. Плоскость надлежит представить в виде сферы. Все n сфер скреплены в верхнем и нижнем плюсах.Эти точки принято называть точками разветвления римановой поверхности порядка $\left(n - 1\right)$ (по количеству листов без одного, т.к., если риманова поверхность состоит из одного листа, то на ней нет точек разветления).

6.7. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$. Формулы Эйлера

Рассмотрим следующие три степенных ряда:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (A)$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (B)$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (C)$$

Покажем, что ряд (A) сходится абсолютно во всей комплексной плоскости. Составим ряд из модулей его членов $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|z|)^n}{n!}$. Воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(|z|)^{n+1}n!}{(n+1)!(|z|)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, ряд (A) абсолютно сходится во всей комплексной плоскости.

Аналогично можно показать, что ряды (B) и (C) также сходятся абсолютно во всей комплексной плоскости.

Суммы рядов (A), (B) и (C) обозначим соответственно через e^z, $\sin z$, $\cos z$. Таким образом по определению:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (2)$$

$$\cos z = -\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (3)$$

Где определена каждая из этих функций?

Причем из сказанного выше следует, что каждая из функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ определена при любом комплексном z. Заметим, из анализа известно, если z принимает действительные значения x, то суммы рядов (A), (B), (C) суть соответственно e^x, $\sin x$, $\cos x$, то есть вновь введенные функции являются...?

являются аналитическим продолжением функций действительного переменного на всю комплексную плоскость, ибо функции $e^z, \sin z$, $\cos z$ являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости, так как сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости, радиус которого в данном случае равен $+\infty$.

В комплексной плоскости Эйлером установлено замечательное соотношение: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$. (4)

Для доказательства тождества (4) заменим в ряде e^{z} букву z через iz и соберем отдельно члены, не содержащие i, и члены содержащие i, получим:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \ldots =$$

$$= 1 + iz - \frac{(z)^2}{2!} - i\frac{(z)^3}{3!} + \frac{(z)^4}{4!} + i\frac{(z)^5}{5!} - \frac{(z)^6}{6!} - i\frac{(z)^7}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{(z)^2}{2!} + \frac{(z)^4}{4!} - \frac{(z)^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{(z)^3}{3!} + \frac{(z)^5}{5!} - \frac{(z)^7}{7!} + \ldots\right)$$

Заметив, что ряд стоящий в первых скобках, выражает $\cos z$, а ряд, стоящий во вторых скобках, определяет $\sin z$, получаем тождество (4).

Из (2) и (3) следует, что $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$. (5)

Заменяя в тождестве Эйлера (4), z на $-z$, получаем:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (6)$$

Формулы (6) также носят имя Эйлера.

6.8 Некоторые свойства показательной функции

1. $\left(e^{z}\right)^{\prime}=e^{z}$ (7)

В самом деле,

$$\left(e^{z}\right)^{\prime}=\left(1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{4}}{4!}+\ldots\right)=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\ldots=e^{z}$$

Чем воспользовались?

Здесь мы воспользовались свойством, что всякий степенной ряд представляет собой аналитическую функцию внутри круга сходимости, причем производная от этой функции может быть получена путем почленного дифференцирования степенного ряда.

2. $e^{a} * e^{b} = e^{a+b}$, где, $a, b \in \mathbb{R}$ (8)

По определению:

$$e^{a} = 1 + a + \frac{a^{2}}{2!} + \frac{a^{3}}{3!} + \ldots + \frac{a^{n}}{n!} + \ldots$$

$$e^{b} = 1 + b + \frac{b^{2}}{2!} + \frac{b^{3}}{3!} + \ldots + \frac{b^{n}}{n!} + \ldots$$

Замечая, что ряды в правой части можно почленно перемножать, ибо они сходятся абсолютно, получаем:…?

$$e^{a} * e^{b} = \left(1 + a + \frac{a^{2}}{2!} + \frac{a^{3}}{3!} + \ldots + \frac{a^{n}}{n!} + \ldots\right)\left(1 + b + \frac{b^{2}}{2!} + \frac{b^{3}}{3!} + \ldots + \frac{b^{n}}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + (a + b) + \left(\frac{a^{2}}{2!} + ab + \frac{b^{2}}{2!}\right) + \left(\frac{a^{3}}{3!} + \frac{a^{2}}{2!}b + a\frac{a^{2}}{2!} + \frac{b^{3}}{3!}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{a^{n}}{n!} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}b + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} * \frac{b^{2}}{2!} + \ldots + \frac{b^{n}}{n!}\right) + \ldots =$$

$$= 1 + (a + b) + \frac{(a + b)^{2}}{2!} + \frac{(a + b)^{3}}{3!} + \ldots + \frac{(a + b)^{n}}{n!} + \ldots = e^{a+b}$$

3. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^{a}}$ (9)

В самом деле, полагая в формуле (8) $b = -a$ найдем:

$e^{a} * e^{-a} = e^{a-a} = e^{0} = 1$

Откуда следует справедливость формулы (9)

4. $\frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$ (10)

Для доказательства воспользуемся формулами (8) и (9):

$$\frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a} * e^{-b} = e^{a+(-b)} = e^{a-b}$$

Определение. Корни уравнения $f(z)=0$ называются нулями функции $f(z)$.

Теорема. Показательная функция нулей не имеет.

В самом деле, $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$. Поэтому $\left|e^{z}\right|=e^{x}$, где $x\in R$. Так как $\left|e^{z}\right|\neq 0$, ибо, $\left|e^{x}\right|\neq 0$, то $e^{z}\neq 0$ при любом $z\in \mathbb{C}$.

6. Показательная функция $w = e^z$ является периодической функцией с периодами кратными числу $2\pi i$.

Пусть w является периодом функции $w = e^z$, что по определению означает, что $e^{z+w} = e^z$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Деля обе части последнего равенства на e^z, получаем: $e^w = 1$.

Пусть $w = \alpha + i\beta$. Тогда $e^{\alpha + i\beta} = 1$, то есть $e^{\alpha}\left(\cos\beta + i\sin\beta\right)$.

Беря модули от обеих частей этого соотношения, получим, что $e^{\alpha} = 1$. Но так как α есть действительное число, то это означает, что $\alpha = 0$.

Таким образом, с учетом, что $e^{\alpha} = 1$ имеем $\cos\beta + i\sin\beta = 1$.

Откуда следует, что $\begin{cases} \cos\beta = 1, \\ \sin\beta = 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} \beta = 2\pi k,\ k \in Z, \\ \beta = \pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$

То есть $\beta = 2\pi n,\ n \in Z$

Таким образом, $w = \alpha + i\beta = i2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, если учесть, что w не может быть равным нулю, ибо период функции есть число, неравное нулю.

6.9 Некоторые свойства тригонометрических функций

1. $(\sin z)' = \cos z \quad (11)$

2. $(\cos z)' = -\sin z \quad (12)$

Справедливость этих формул устанавливается путем почленного дифференцирования степенных рядов для этих функций.

3. С помощью формул Эйлера и правил умножения степеней легко проверить, что известные тригонометрические формулы справедливы и для комплексных значений аргумента.

Рассмотрим некоторые из них:

а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (13)

Действительно,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 - \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{iz} + e^{-iz} - e^{iz} + e^{-iz}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} 2e^{iz} 2e^{-iz} = e^0 = 1$$

b) формулы сложения и вычитания

$$\sin(z \pm t) = \sin z \cos t \pm \cos z \sin t \qquad (14)$$

$$\cos(z \pm t) = \cos z \cos t \mp \sin z \sin t \qquad (15)$$

Докажем, например, формулу (14):

$$\sin z \cos t + \cos z \sin t = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} * \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} * \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(z+t)} - e^{-i(z+t)} + e^{i(z-t)} - e^{-i(z+t)} + e^{i(z-t)} + e^{-i(z-t)} - e^{i(z+t)} - e^{-i(z+t)}}{4i} =$$

$$= \frac{2e^{i(z+t)} - 2e^{-i(z+t)}}{4i} = \frac{e^{i(z+t)} - e^{-i(z+t)}}{2i} = \sin(z+t)$$

Заменяя t на $-t$, и учитывая, что $\cos t$ - четная, $\sin t$ - нечетная функции, получим:

$$\sin(z-t) = \sin z \cos(-t) + \cos z \sin(-t) = \sin z \cos t - \cos z \sin t$$

Формула (14) доказана.

с) Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=\cos z \qquad (16), \qquad \sin(\pi+z)=-\sin z \qquad (20).$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-\cos z \qquad (17), \qquad \cos(\pi+z)=-\cos z \qquad (21).$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z \qquad (18), \qquad \sin(\pi-z)=\sin z \qquad (22).$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin z \qquad (19), \qquad \cos(\pi-z)=-\cos z \qquad (23).$$

Формулы (16)-(23) вытекают из формул (14) и (15).

Покажем, например, справедливость формулы (16):

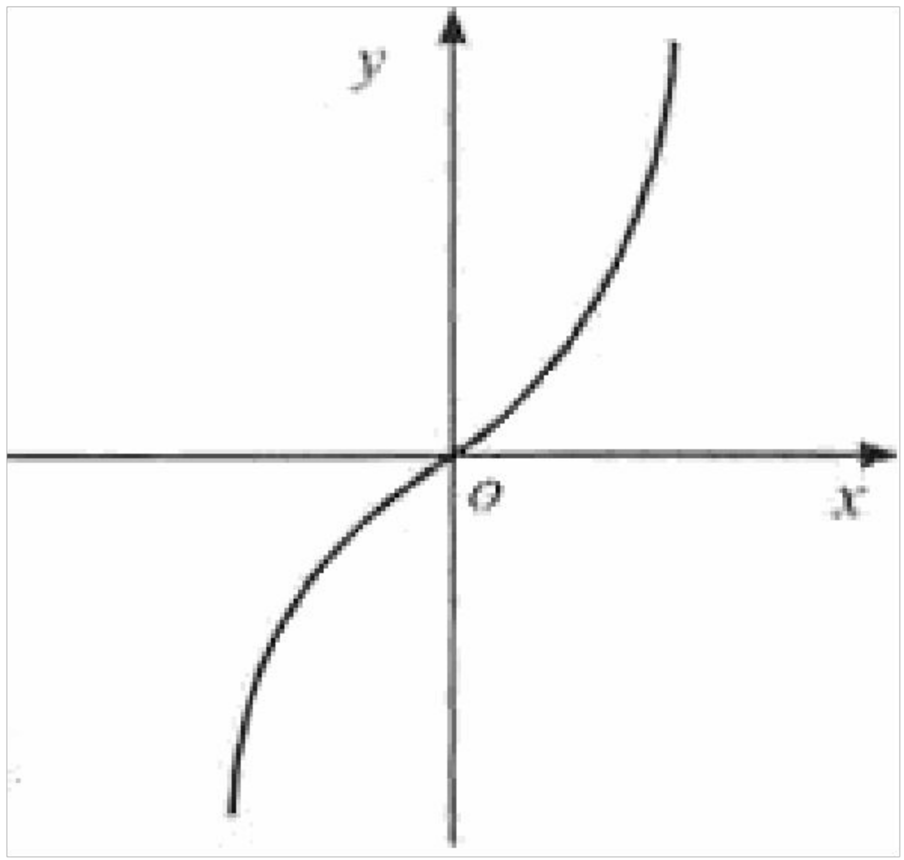
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos z+\cos\frac{\pi}{2}\sin z=1*\cos z+0*\sin z=\cos z$$

4. Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

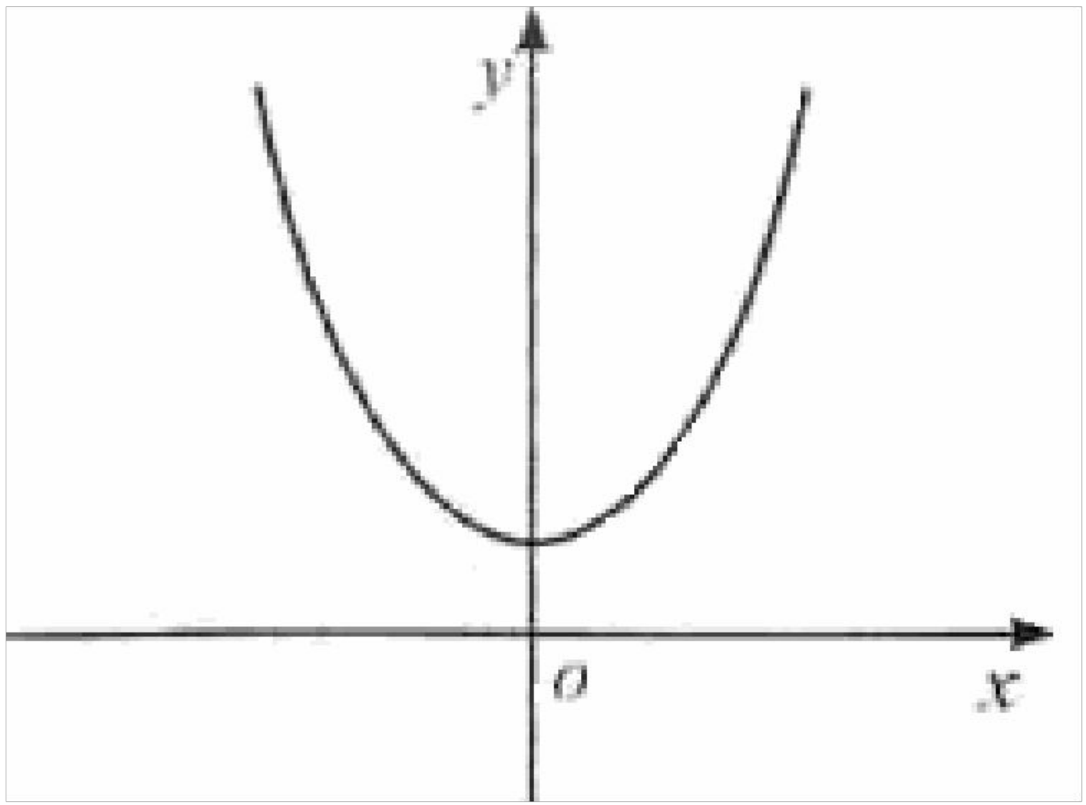
По определению: $shz=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$; $chz=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

Напомним свойства этих функций для действительных значений z, то есть для $z=x$, где $x\in\mathbb{R}$.

$y = shx$ есть нечетная функция, которая является всюду возрастающей, причем при $x \to +\infty$ $shx \to +\infty$. При $x < 0$ график функции является выпуклым вверх, а при $x > 0$ - выпуклым вниз:



$y = chx$ есть четная функция, которая является убывающей при $x < 0$ и возрастающей при $x > 0$. График функции является выпуклым вниз



Имеем

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i sh z$$

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = ch z$$

Таким образом,

$$\sin iz = i sh z;\ \cos iz = ch z \qquad (24)$$

5. Нулями функции $w = \sin z$ являются числа πn, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\sin z = 0$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x ch y + i \cos x sh y = 0$$

Здесь мы воспользуемся формулами (14) и (24).

Комплексное число равно нулю, если равны нулю действительная и мнимая части, то есть, если: $\begin{cases} \sin x ch y = 0, \\ \cos x sh y = 0. \end{cases}$

Так как $chy \neq 0$ при любом $y \in \mathbb{R}$, то должно быть $\sin x = 0$.

Откуда следует, что $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Подставляя найденное значение x во второе уравнение:

$\cos \pi n shy = 0$.

Имеем, $(-1)^n shy = 0$. Следовательно, $shy = 0$, то есть $y = 0$.

Таким образом, $z = x + iy = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично показываем, что нулями функции $w = \cos z$ являются числа $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ являются периодическими, их периодами являются числа, кратные 2π.

В самом деле, пусть w есть период функции $\sin z$. По определению периода функции это означает, что

$\sin(z + w) = \sin z$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Откуда, $\sin(z + w) - \sin z = 0$.

Преобразуем в произведение, получим: $2\cos\left(z + \frac{w}{2}\right)\sin\frac{w}{2} = 0$.

Так как равенство должно быть справедливым для любого z, то это будет тогда, когда $\sin\frac{w}{2} = 0$.

Поэтому $\frac{w}{2} = \pi n$, то есть $w = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Здесь мы $n = 0$ исключаем, ибо период функции есть число, неравное нулю.

Подобным же образом устанавливается справедливость утверждения и для функции $\cos z$.

7. Для комплексных значений аргумента уже нельзя утверждать, что $|\sin z| \leq 1$ и $|\cos z| \leq 1$, ибо из соотношения $\sin iy = ishy$ и $\cos iy = ichy$ следует, что $|\sin iy| = |shy|$ и $|\cos iy| = |chy|$, а $|shy|$ и $|chy|$, где y ∈ ▯, неограничены.

6.10 Отображение посредством показательной функции

Рассмотрим функцию $w = e^z$,которая определена и является аналитической на всей z −плоскости.

Покажем, что любая точка $w_0 \neq 0$ имеет хотя бы один прообраз в z − плоскости.

Для этого решим уравнение $w_0 = e^z$ относительно $z = x + iy$

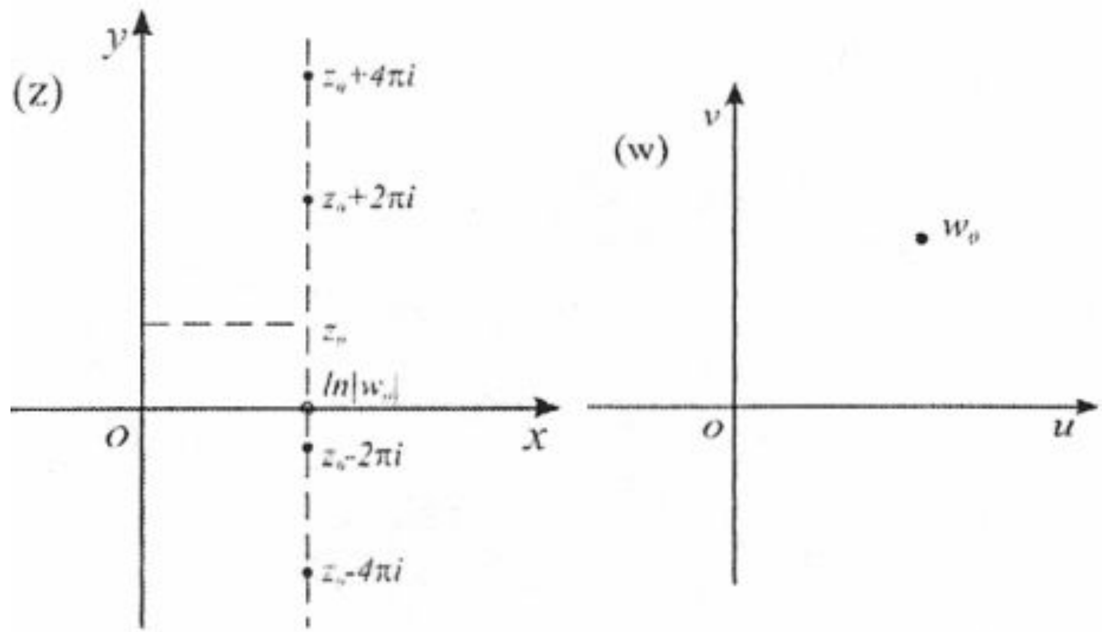
$w_0 = e^{x+iy} \Leftrightarrow w_0 = e^x e^{x+iy} \Leftrightarrow w_0 = e^x (\cos y + i \sin y)$

Тогда $|\mathrm{w}_0| = e^x$ и $Arg w_0 = \mathrm{y}$. Из $|\mathrm{w}_0| = e^x$ находим $x = \ln |w_0|$.

Значит $z = \ln |w_0| + Arg w_0 = \ln |w_0| + i(\arg w_0 + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

при $k = 0$, $z_0 = \ln |w_0| + i \arg w_0$.

Таким образом, любая точка $w \neq 0$ имеет бесконечно много прообразов, которые расположены на прямой, параллельной оси Oy, и находятся друг от друга на расстоянии, кратном 2π.



(z)
y
$z_0+4\pi i$
$z_0+2\pi i$
z_0
$ln|w_0|$
O
x
$z_0-2\pi i$
$z_0-4\pi i$
(w)
v
w_0
o
u

Из предыдущих рассуждений видно, что z - плоскость посредством показательной функции отображается на область, получающуюся из w - плоскости ислючением одной точки $w = 0$. Причем отображение это не взаимно однозначно.

На z - плоскости рассмотрим область

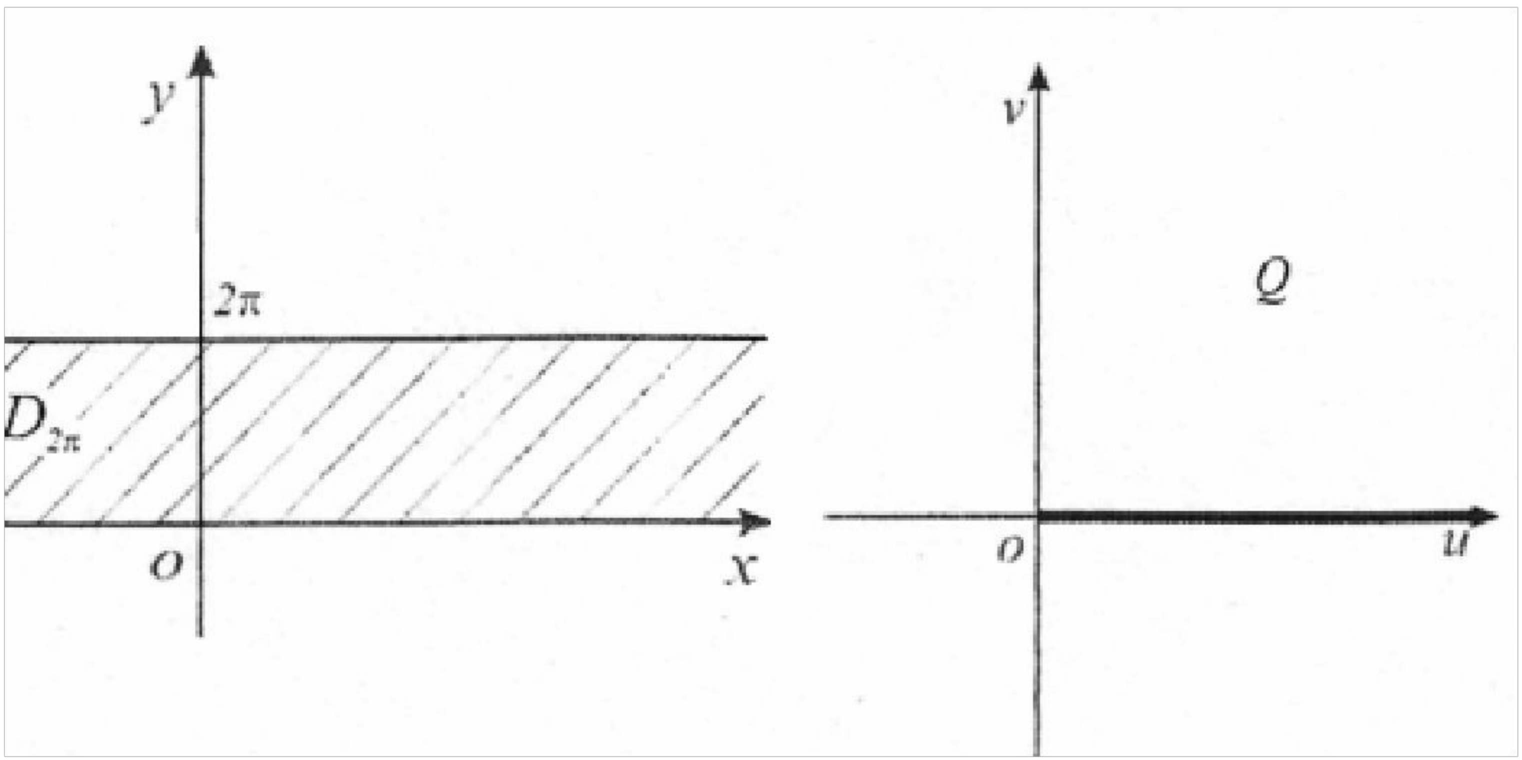
$D_{2\pi} = \{z \mid z = x + iy \wedge -\infty < x < +\infty \wedge 0 < y < 2\pi\}$. Найдем ее образ при отображении $w = e^{z}$.

$w = e^{x}e^{iy}$, $|w| = e^{x}$. Если $-\infty < x < +\infty$, то $0 < |w| < +\infty$.

$Argw = y$, значит, $0 < Argw < 2\pi$.

Таким образом любая точка $z \in D_{2\pi}$ отображается в область Q получающуюся из w - плоскости удалением действительной неотрицательной полуоси.

Верно и обратное: прообразом любой точки $w \in Q$, является единственная точка $z \in D_{2\pi}$.



Итак, мы имеем взаимно однозначное отображение области $D_{2\pi}$ на область Q посредством показательной функции. Область $D_{2\pi}$ называется областью однолистности функции $w = e^z$. Очевидно, что областью однолистности показательной функции будет внутренность любой полосы, параллельрной действительной оси, ширина которой меньше или равна 2π.