

# Элементы комбинаторики

---

# Комбинаторика

---

– Комбинаторика — раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества, подчиненных определённым условиям.

Комбинаторные методы применяются в теории кодирования, планировании эксперимента, топологии, математической логике, теории игр, кристаллографии, биологии, статистической физике, экономике и т.д. Комбинаторика является основой для изучения теории вероятностей и математической статистики.

# История возникновения

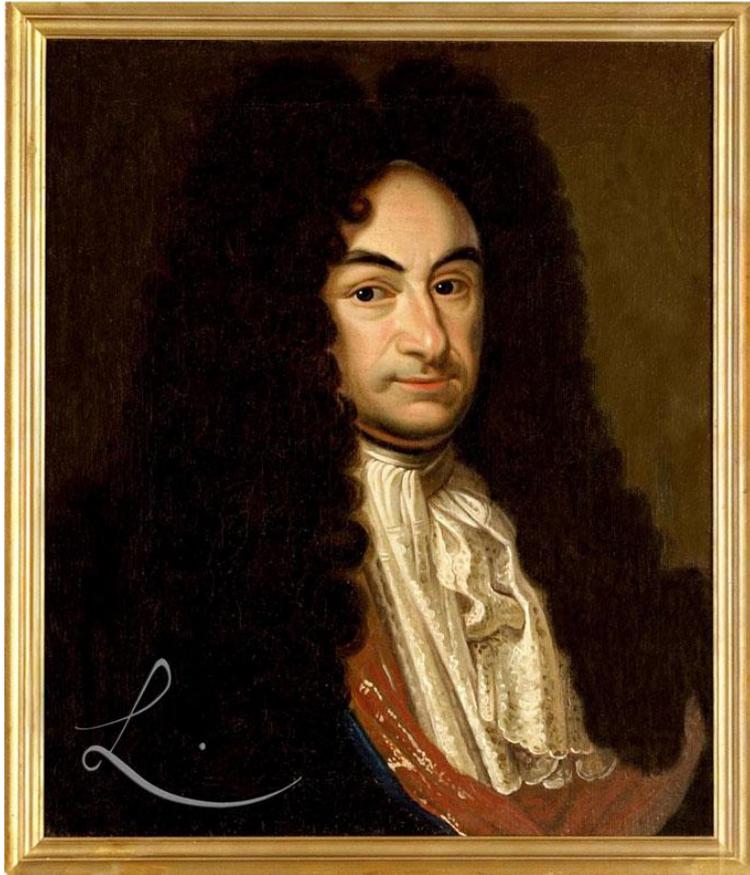
---

Комбинаторика возникла в XVI веке. В то время в жизни привилегированных слоев общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Были широко распространены лотереи. Возникали вопросы: сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей? Эти и другие проблемы оказались движущей силой в развитии комбинаторики.

Теоретические исследования вопросов комбинаторики предприняли Паскаль и Ферма, Бернулли, Лейбниц и Эйлер и др.

# Готфрид Вильгельм Лейбниц

---



Всемирно известный немецкий учёный, занимался философией, математикой, физикой, организовал Берлинскую академию наук и стал её первым президентом.

В 1666 году вводит термин "комбинаторика" в своей диссертации об искусстве комбинаторики, в которой решает основные комбинаторные задачи.

1.07.1646 - 14.11.1716

# Основные правила комбинаторики

---

## Правило сложения (суммы)

Если объект  $A$  может быть выбран  $n$  способами, а объект  $B$  –  $m$  способами, то выбор «или  $A$ , или  $B$ » может быть осуществлен  $n+m$  способами.

**Задача.** На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение:  $5 + 4 = 9$

# Основные правила комбинаторики

---

**Задача.** В магазине есть 5 различных видов коробок конфет и 4 пачки печенья. Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и пачки печенья?

**Решение:**  $5 \cdot 4 = 20$

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
$p_1$	$k_1 p_1$	$k_2 p_1$	$k_3 p_1$	$k_4 p_1$	$k_5 p_1$
$p_2$	$k_1 p_2$	$k_2 p_2$	$k_3 p_2$	$k_4 p_2$	$k_5 p_2$
$p_3$	$k_1 p_3$	$k_2 p_3$	$k_3 p_3$	$k_4 p_3$	$k_5 p_3$
$p_4$	$k_1 p_4$	$k_2 p_4$	$k_3 p_4$	$k_4 p_4$	$k_5 p_4$

# Основные правила комбинаторики

---

## Правило умножения (произведения)

Если объект  $A$  может быть выбран  $n$  способами и после каждого из таких выборов объект  $B$  –  $m$  способами, то выбор « $A$  и  $B$ » в указанном порядке может быть осуществлен  $n \cdot m$  способами.

# Основные правила комбинаторики

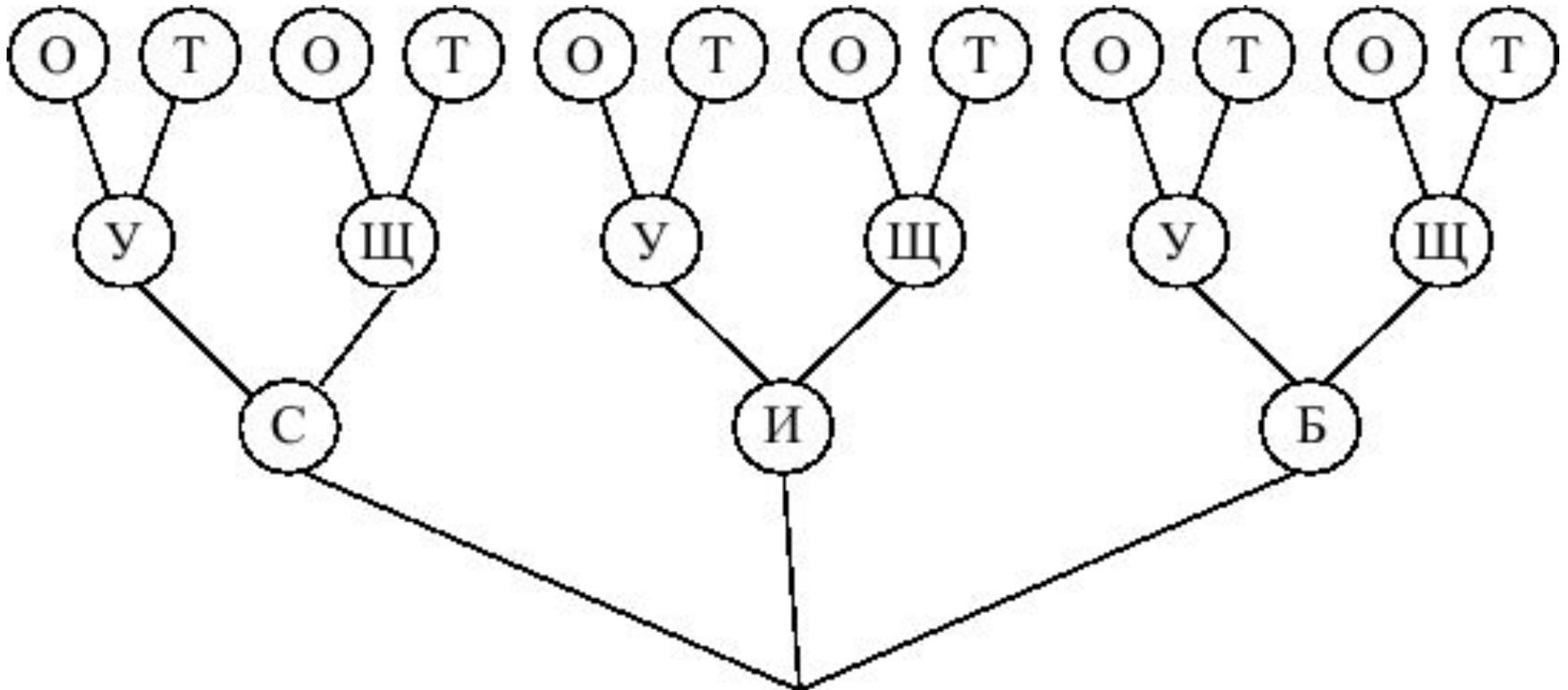
---

**Задача.** Сколько различных обедов П.И. Чичиков мог насчитать из блюд, выставленных на столе у П. П. Петуха, если бы на каждый обед выбирать только одно холодное блюдо, одно первое блюдо и одно второе блюдо?

На столе у П.П. Петуха на этот раз были выставлены из холодных блюд студень с хреном, свежая икра, свежепросоленная белужина; на первое - уха из стерлядей, щи с грибами; на второе - осетрина жареная, теленок, жаренный на вертеле.

# Основные правила комбинаторики

---



$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  различных обедов

# Дерево всевозможных вариантов

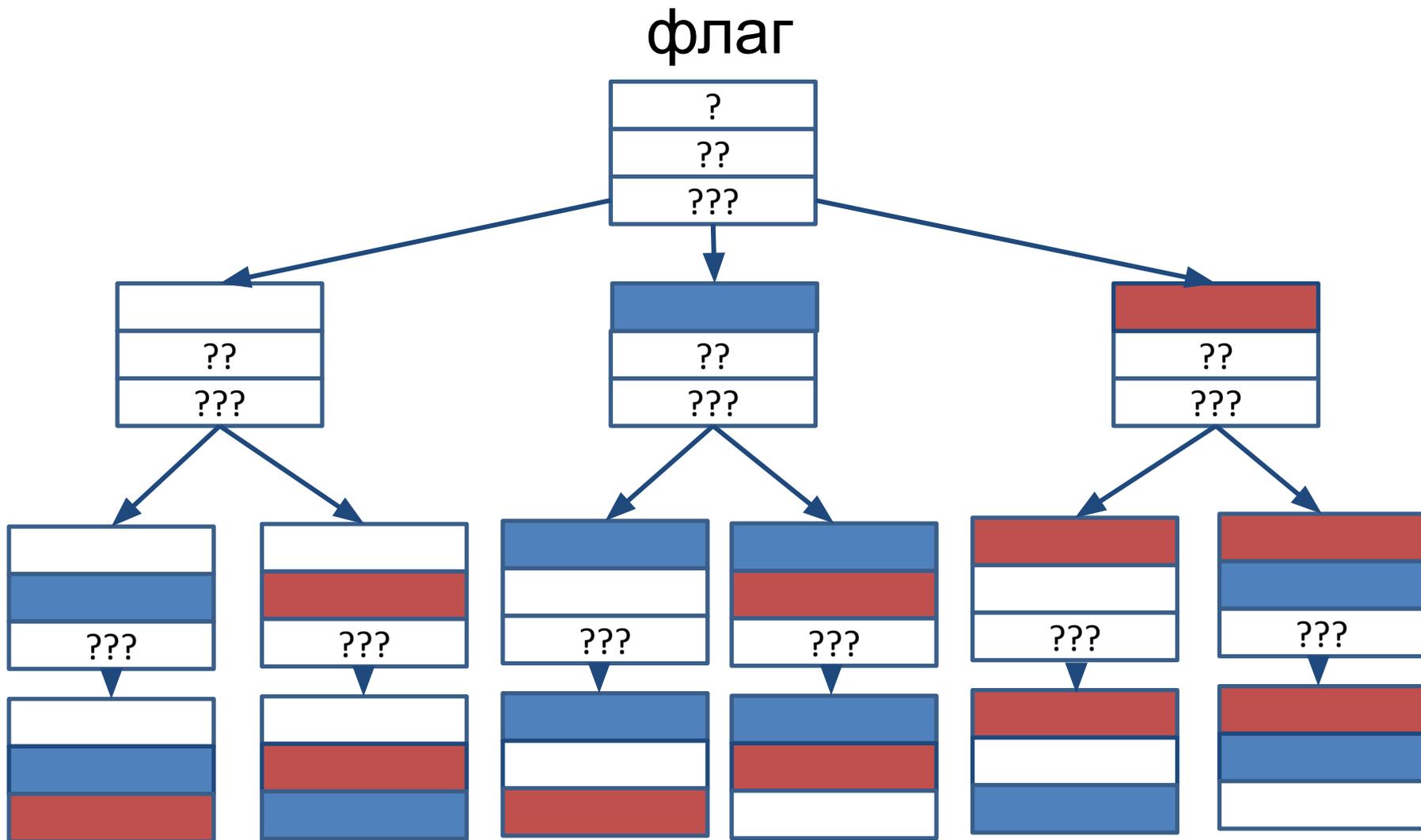
---

**Задача.** Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой, отличный от других флаг?

**Чем данная задача отличается от предыдущей?**

# Дерево всевозможных вариантов

---



# Факториал

---

От (англ.) *factor* – множитель.

Произведение первых подряд идущих  $n$  натуральных чисел называют **факториалом** и обозначают через  $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ и т.д.}$$

# Размещения

---

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов.

**Размещением** из  $n$ -элементного множества по  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) элементов называется  $k$ -элементное подмножество, в котором **важен** порядок расположения элементов.

**Пример.**  $\{1,2,3,4,5\}$  –  $n=5$  элементов

Размещения по  $k=1$ : 1, 2, 3, 4, 5

Размещения по  $k=2$ : 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54

Размещения по  $k=3$ : 123, 124, 125, 132, 134, 135, 142, 143, 145, 152, 153, 154, ... 512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542, 543

Размещения по  $k=4$ : 1234, 1235, 1243, 1245, 1324, 1325, ...

# Перестановки

---

**Перестановкой** для  $n$ -элементного множества называется  $n$ -элементное размещение.

или:

**Перестановкой** называют упорядоченную выборку элементов из некоторого множества.

**Пример.**  $\{1,2,3,4,5\}$  –  $n=5$  элементов

Перестановки: 12345, 12354, 12435, 12453, 12534, 12543, 13245, 13254, 13425, 13452, 13524, 13542, ...

# Сочетания

---

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов.

**Сочетанием** из  $n$ -элементного множества по  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) элементов называется  $k$ -элементное подмножество, в котором **не важен** порядок расположения элементов.

**Пример.**  $\{1,2,3,4,5\}$  –  $n=5$  элементов

Сочетания по  $k=1$ :  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

Сочетания по  $k=2$ :  $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$

Сочетания по  $k=3$ :  $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}$

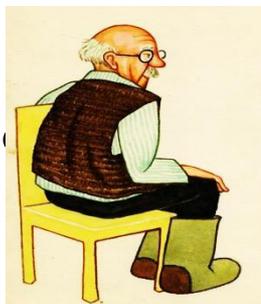
Сочетания по  $k=4$ :  $\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}$

	Порядок существенен (упорядочен.)	Порядок несущественен (неупорядочен.)
Элементы не повторяются		
Элементы повторяются		

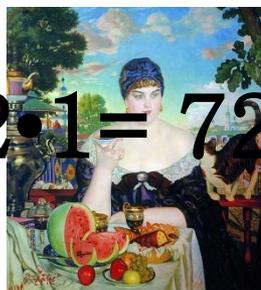
**Задача.** В семье 6 человек, а за столом в кухне 6 стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?



6



5



4



3



2



1

6

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

очти 2 года



№1



№2



№3



№4



№5



№6

**Задача:** Сколькими способами можно переставить буквы в слове «треугольник»?

В слове «треугольник» 11 букв и все буквы различны, порядок важен.

$$P_{11} = 11! = 39916800$$

**Задача:** Сколькими способами можно переставить буквы в слове «математика».

В слове «математика» 10 буквы, элементы повторяются (м-2, а-3, т-2, е-1, и-1, к-1).

Порядок важен.

$$\overline{P}_{10} = \overline{P}_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4} = 151200$$

**Задача:** Имеются пять предметов для подарков.

Сколько

можно составить различных подарочных наборов из двух предметов?

С помощью перечисления: ab, ac, ad, af, bc, bd, bf, cd, cf, df — 10 наборов. По формуле: порядок предметов здесь не важен и элементы повторяются не могут, поэтому число различных наборов равно

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 = 10$$

**Задача:** На почте продаются открытки 10 сортов. Сколько вариантов существует для покупки 12 открыток.

Порядок не важен (сочетание), открытки могут повторяться (с повторением).

$$\overline{C}_{10}^{12} = \frac{(10+12-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$$

**Задача:** Сколькими способами можно составить трехцветный флаг какого-либо государства с тремя горизонтальными полосами одной и той же ширины, если есть материя пяти различных цветов?

Комбинации могут отличаться друг от друга как составом элементов, так и порядком их расположения

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

**Задача:** В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный флажок. Сколько различных случаев распределения флажков на здание.

Порядок важен, не все элементы используются (размещение) с повторением

$$\overline{A}_2^8 = 2^8 = 256$$

**Задача:** В группе 20 студентов, из которых 5 отличников, 11 хорошистов и остальные троечники. Сколькими способами можно выбрать группу для выполнения лабораторной работы, состоящей из 3 хорошистов, 1 отличника и 1 троечника.

**Задача:** Имеется 4 чашки, 5 блюдец, 6 ложек (все чашки, блюдца, ложки различны). Сколькими способами можно накрыть стол к чаю на 3 человека, если каждый получает 1 чашку, 1 блюдце и 1 ложку.