

***Натуральные и целые  
числа.***

***Делимость целых  
чисел.***

***НОД и НОК  
натуральных чисел***

Кучаева Гульнара Азатовна,  
учитель математики  
МОБУ «СОШ № 73» г. Оренбурга

Определение. Пусть даны два натуральных числа  $a$  и  $b$ . Если существует такое  $q$ , что выполняется равенство

$$a = bq,$$

то говорят, что число  $a$  делится на число  $b$ .

# Свойства делимости:

1. Если  $a : c$  и  $c : b$ , то  $a : b$ ;
2. Если  $a : b$  и  $c : b$ , то  $(a+c) : b$ ;
3. Если  $a : b$  и  $c$  не делится на  $b$ , то  $(a+c)$  не делится на  $b$ ;
4. Если  $a : b$  и  $(a+c) : b$ , то  $c : b$ ;
5. Если  $a : b_1$  и  $c : b_2$ , то  $ac : b_1b_2$ ;
6. Если  $a : b$  и  $c$  – любое натуральное число, то  $ac : bc$ , если  $ac : bc$ , то  $a : b$ ;

7. Если  $a : b$  и  $c$  – любое натуральное число, то  $ac : b$ ;

8. Если  $a : b$  и  $c : b$ , то для любых натуральных  $n$  и  $k$  справедливо соотношение  $(an+ck):b$ ;

9. Среди  $n$  последовательно натуральных чисел одно и только одно делится на  $n$ .

# *Основные признаки делимости*

1. Число делится (без остатка или нацело) на число 2, если его последняя цифра четная или 0;
2. Число делится на число 3, если сумма его цифр делится на 3;
3. Число делится на число 4, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или являются нулями.

4. Число делится на число 5, если его последняя цифра 0 или 5;
5. Число делится на число 8, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8, или являются нулями;
6. Число делится на число 9, если сумма его цифр делится на 9;
7. Число делится на число 10, если его последняя цифра нуль.

# *Простые и составные числа*

Определение. Если натуральное число имеет только два делителя – само себя и 1, то его называют простым числом; если оно имеет более двух делителей, то его называют составным числом.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Теорема. Если натуральное число  $a$  больше натурального числа  $b$  и  $a$  не делится на  $b$ , то существует, и притом только одна, пара натуральных чисел  $q$  и  $r$ , причем  $r < b$ , такая, что выполняется равенство

$$a = bq + r.$$

### № 1

Определите: на какие из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 18, 20 делится без остатка число



562 320.

### № 2

Определите, простым или составным является число 87 516 540 321.



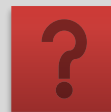
### № 3

Число  $N$  дает при делении на 8 остаток 3. Какой остаток при делении на 8 дает число в четыре раза больше данного?



#### № 4

Два числа при делении на 16 дают остаток 8. Доказать, что разность и сумма этих чисел без остатка делятся на 16.



#### № 5

Разложить на простые множители число 7000.



# НОД натуральных чисел

Определение. Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел  $a, b, c, \dots$  называется наибольшее натуральное число, на которое делятся нацело числа  $a, b, c, \dots$

Теорема. Если даны два натуральных числа  $a$  и  $p$ , причем  $p$  – простое число, то либо  $a$  делится на  $p$ , либо  $a$  и  $p$  – взаимно простые числа.

Для нахождения **НОД** чисел  $a, b, c, \dots$ :

- 1) выписывают разложения на простые множители чисел  $a, b, c, \dots$ ;
- 2) перечисляют все простые множители, входящие во все разложения;
- 3) каждый из перечисленных множителей возводят в минимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения.

## № 6

Найти наибольший общий делитель чисел 48, 60, 72.

Решение:

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 48 | 2 | 60 | 2 | 72 | 2 |
| 24 | 2 | 30 | 2 | 36 | 2 |
| 12 | 2 | 15 | 3 | 18 | 2 |
| 6  | 2 | 5  | 5 | 9  | 3 |
| 3  | 3 | 1  |   | 3  | 3 |
| 1  |   |    |   | 1  |   |

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\text{НОД}(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

# НОК натуральных чисел

Определение. Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел  $a, b, c, \dots$  называется наименьшее натуральное число, которое нацело делится на эти числа  $a, b, c, \dots$

Теорема. Для любых натуральных чисел  $a$  и  $b$  справедливо равенство

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab.$$

Следствие. Если числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, то  $\text{НОК}(a, b) = ab$ .

Для нахождения **НОК** Чисел  $a, b, c, \dots$ :

- 1) выписывают разложения на простые множители чисел  $a, b, c, \dots$ ;
- 2) перечисляют все простые множители, входящие хотя бы в одно из этих разложений;
- 3) каждый из перечисленных множителей возводят в максимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения;
- 4) произведение полученных степеней простых множителей дает **НОК** чисел  $a, b, c, \dots$

## № 7

Найти наименьшее общее кратное чисел 48, 60, 72.

Решение:

|    |   |    |   |    |   |                                                          |
|----|---|----|---|----|---|----------------------------------------------------------|
| 48 | 2 | 60 | 2 | 72 | 2 | $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$   |
| 24 | 2 | 30 | 2 | 36 | 2 | $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$   |
| 12 | 2 | 15 | 3 | 18 | 2 | $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$ |
| 6  | 2 | 5  | 5 | 9  | 3 |                                                          |
| 3  | 3 | 1  |   | 3  | 3 |                                                          |
| 1  |   |    |   | 1  |   |                                                          |

$$\text{НОК}(48, 60, 72) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$$

- 1) 562320 – четное, значит делится без остатка на 2;
- 2)  $5 + 6 + 2 + 3 + 2 + 0 = 18$ , 18 делится на 3 и на 9, значит 562320 делится на 3 и на 9;
- 3) 562320 – две последние цифры образуют число 20, которое делится на 4, значит 562 320 делится на 4;
- 4) 562320 – оканчивается на 0, значит 562320 делится на 5 и на 10;
- 5) Т.к. 562320 делится на 2 и на 3, а числа 2 и 3 – взаимно простые, то 562320 делится на произведение 2 и 3, т.е. на 6;
- 6) 562320 – три последние цифры образуют число 320, которое делится на 8, значит 562320 делится на 8;
- 7) Т.к. 562320 делится на 3 и 5 (3 и 5 – взаимно простые), то 562320 делится на 15;
- 8) Т.к. 562320 делится на 2 и 9 (2 и 9 – взаимно простые), то 562320 делится на 18;
- 9) Т.к. 562320 делится на 4 и 5 (4 и 5 – взаимно простые), то 562320 делится на 20.



Если найдется хотя бы один делитель числа 87 516 540 321, отличный от 1 и самого этого числа, то 87 516 540 321 – составное.

$$8 + 7 + 5 + 1 + 6 + 5 + 4 + 0 + 3 + 2 + 1 = 42$$

42 делится на 3, значит и число

87 516 540 321 делится на 3, а значит заданное число является составным.



•

$$N = 8b + 3$$

$$4N = 4(8b + 3) = 32b + 12 = 8 \cdot 4b + (8 \cdot 1 + 4)$$

$$4N = 8(4b + 1) + 4$$

Ответ: 4.



- $$\begin{array}{r} + n = 16b_1 + 8 \\ k = 16b_2 + 8 \\ \hline \end{array}$$

$$n + k = 16b_1 + 16b_2 + 8 + 8$$

$$\begin{aligned} n + k &= 16b_1 + 16b_2 + 8 + 8 = \\ &= 16(b_1 + b_2) + 16 = \\ &= 16(b_1 + b_2 + 1) + 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} - n = 16b_1 + 8 \\ k = 16b_2 + 8 \\ \hline \end{array}$$

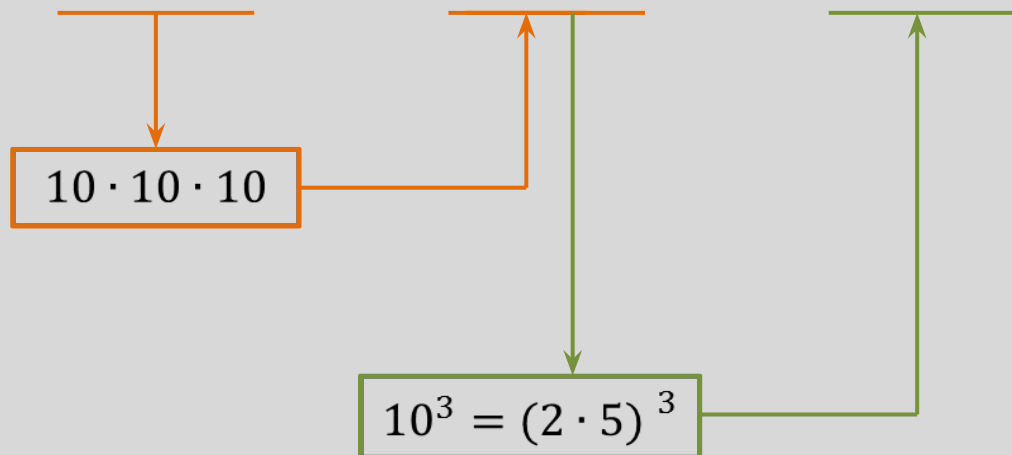
$$n - k = 16b_1 - 16b_2 + 8 - 8$$

$$\begin{aligned} n - k &= 16b_1 - 16b_2 + 8 - 8 = \\ &= 16(b_1 - b_2) + 0. \end{aligned}$$



# Разложить на простые множители число 7000

- $7000 = 7 \cdot 1000 = 7 \cdot 10^3 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$



# Используемая литература

1. Алгебра.10 класс. Часть 1. Учебник.  
Профильный уровень. Мордкович А.Г., Семенов  
П. В.;