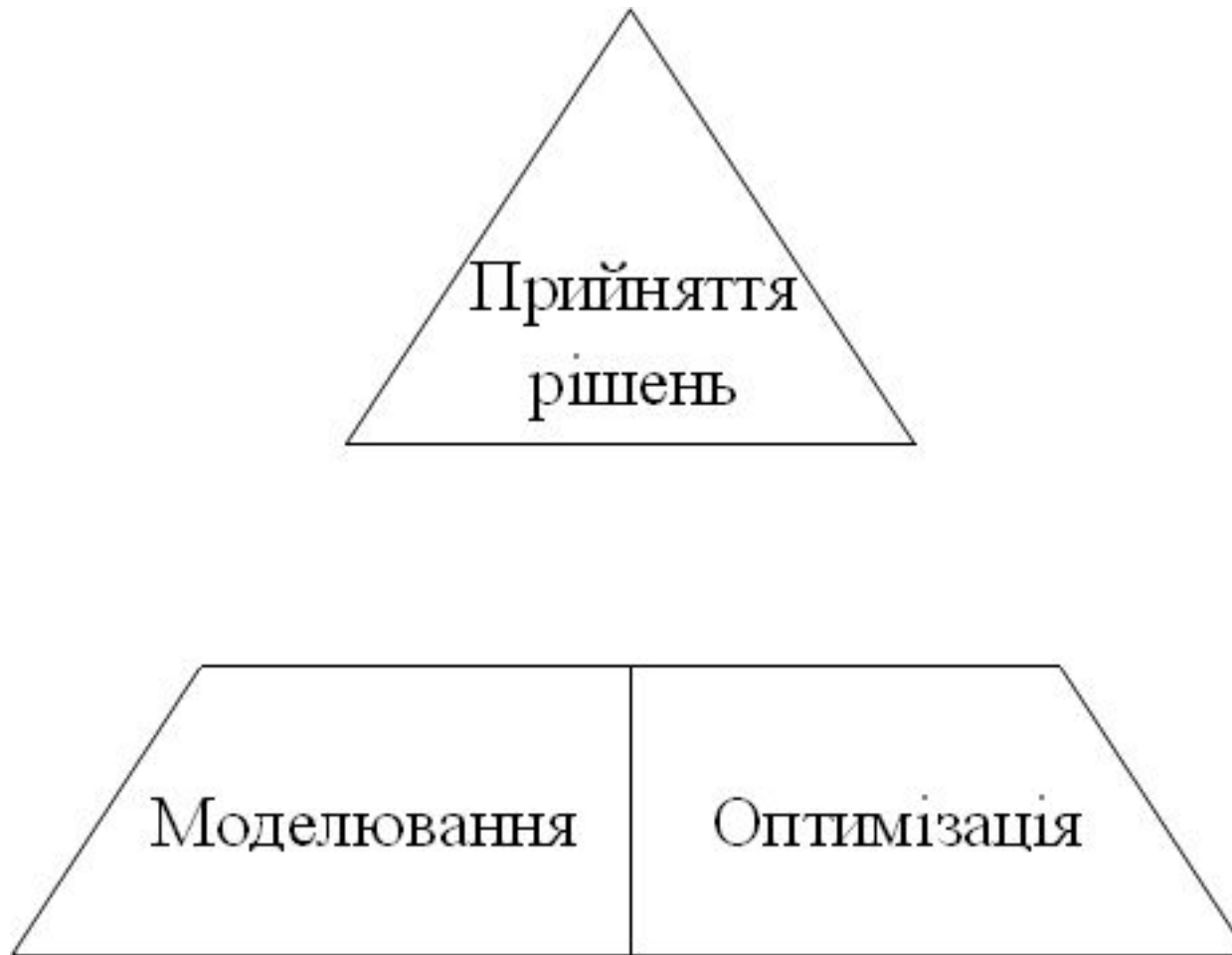


Навчально-науковий інститут комп'ютерних інформаційних технологій
Кафедра комп'ютеризованих систем управління
Навчальна дисципліна

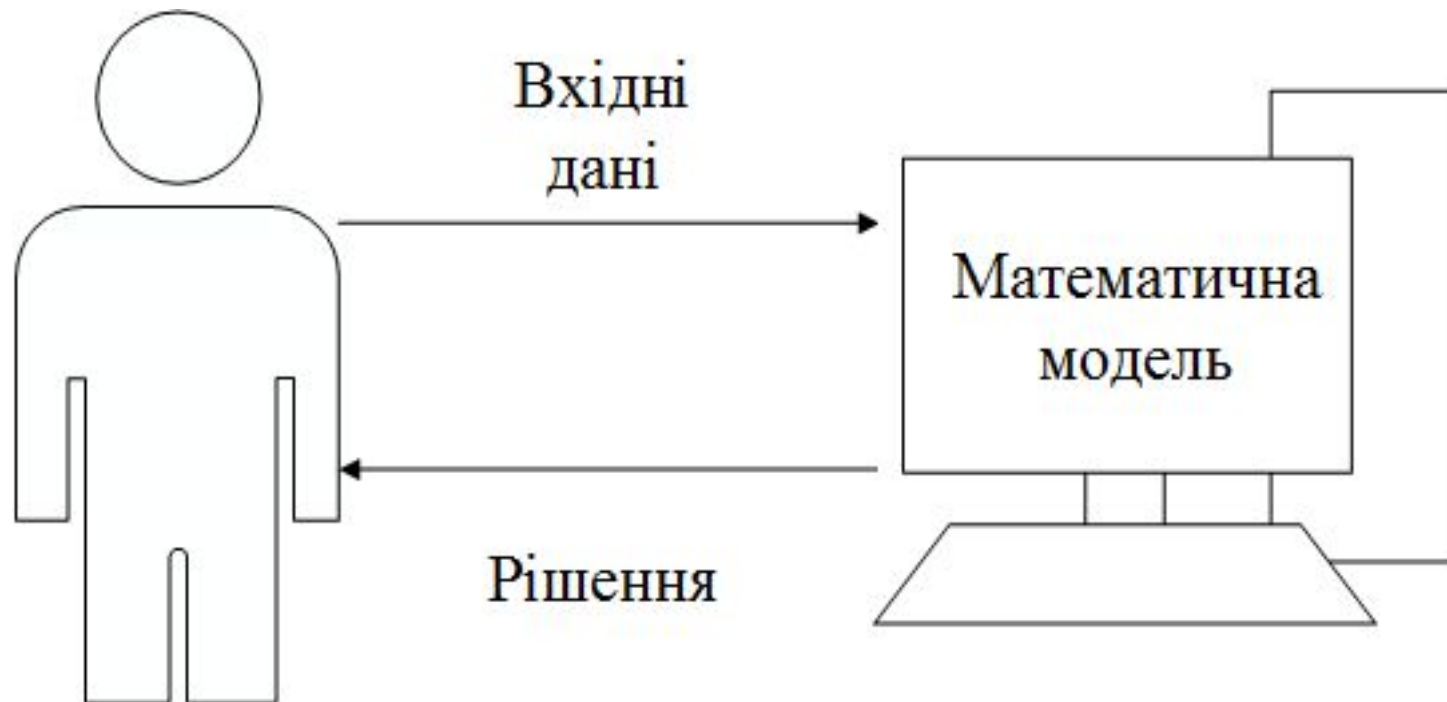
«МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»
для спеціальності
6.05010202 «Системне програмування»

<i>Курс 3</i>	<i>Семестр 5</i>
Лекцій	34 години
Лабораторних занять	34 години
Самостійна робота	67 година
Всього	135 годин
Домашнє завдання	1 (5 семестр)
Екзамен	5 семестр

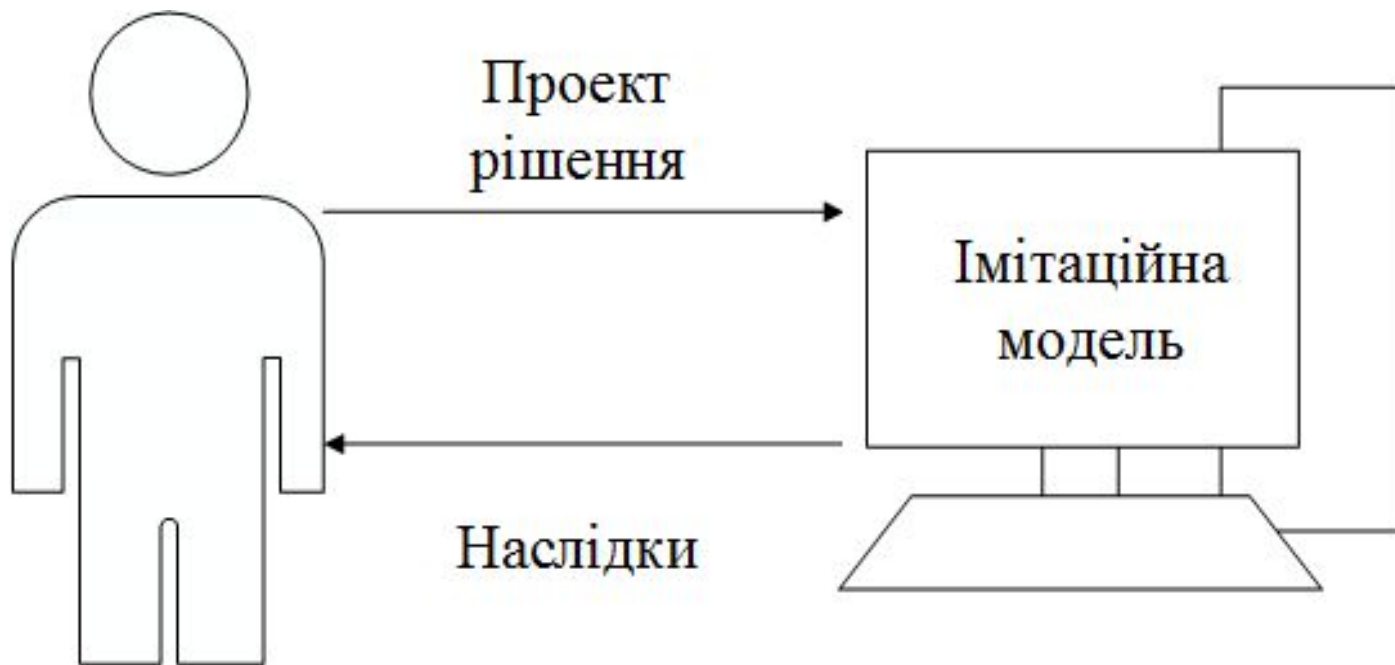
ГЛОБАЛЬНА ПРОБЛЕМА



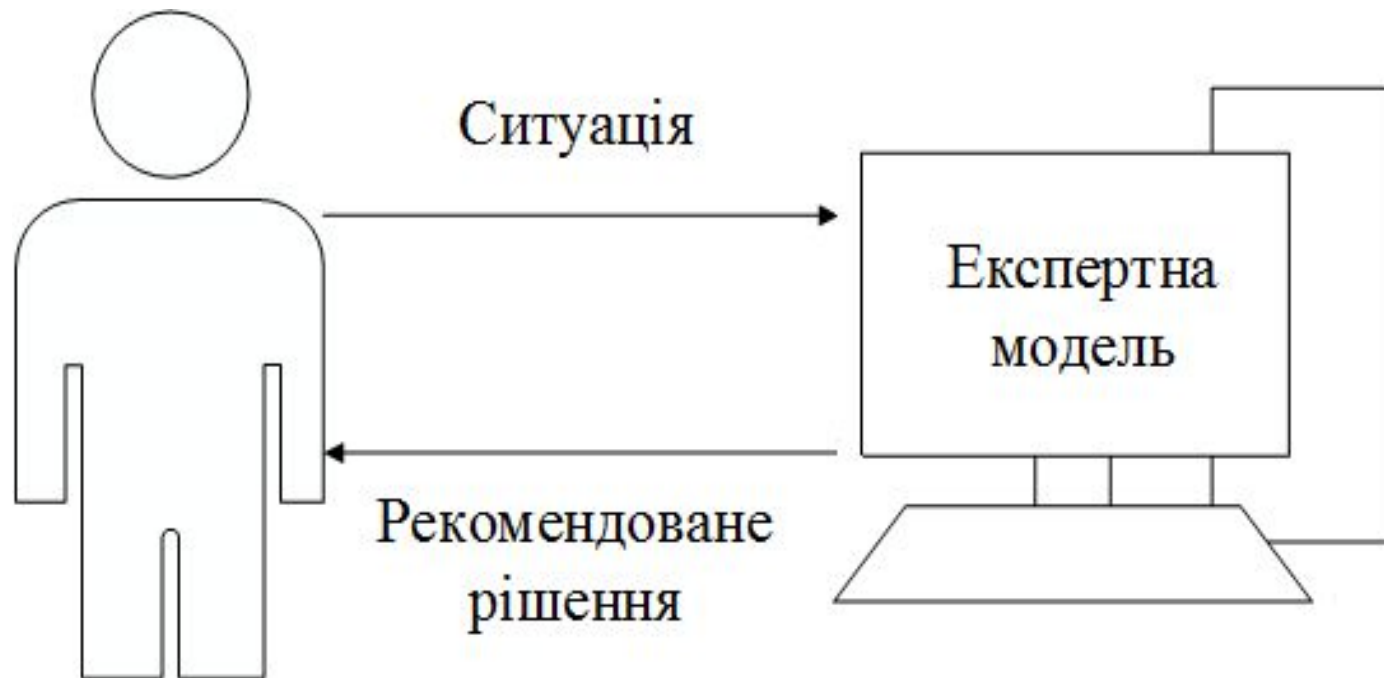
ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ



ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ



ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРТНОЇ МОДЕЛІ



Математичне програмування —

науковий напрямок, присвячений розробці та дослідженню чисельних методів розв'язання екстремальних (оптимізаційних) задач.

«В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-либо максимума или минимума»

Леонард Эйлер (1707-1783).

*Гражданин Швейцарии,
автор 800 научных работ.*

Академик Петербургской АН (1731-1741).

Академик Берлинской АН (1741-1766).

Метою викладання дисципліни є формування теоретичної бази знань та практичних навичок застосування методів математичного програмування для розв'язання задач прийняття проектних та управлінських рішень в реальних економічних, організаційних і виробничих системах.

Студент повинен знати:

- теоретичні основи математичного програмування;
- принципи побудови математичних моделей задач прийняття проектних та управлінських рішень;
- основні методи і алгоритми лінійного, нелінійного, цілочисельного, дискретного, динамічного програмування;

Студент повинен вміти:

- будувати математичні моделі задач прийняття проектних та управлінських рішень;
- визначати, до якого класу задач математичного програмування належить формалізована функціональна задача;
- вибирати для її розв'язання відповідний метод і алгоритм оптимізації;
- розробляти схеми алгоритмів розв'язання задач оптимізації;
- застосовувати існуючі уніфіковані програмні засоби розв'язання оптимізаційних задач;
- аналізувати та інтерпретувати результати розв'язання функціональних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій // Навчальний посібник для студентів ВНЗ. – Київ: Професіонал, 2004. – 349 с.
2. Ларіонов Ю.І., Марченко Л.С., Хажмурадов М.А. Дослідження операцій // Навчальний посібник. – Харків: Інжек, 2005. – 288 с.
3. Охріменко М.Г., Дзюбан І.Ю. Дослідження операцій // Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2006. – 183 с.
4. Ржавський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій // Підручник. – Київ: Академвидав, 2006. – 560 с.
5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ВІПОЛ. – 2000. – 688 с.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. – 1980. – 520 с.
7. Исследование операций: В 2-х томах./Под ред. Дж. Моудера, С.Элмаграба. – М.: Мир. – 1981. т.1- 712 с., т.2. – 677 с.
8. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. – М: Мир. – 1985. – 512 с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций: - в 2-х томах.М.: Мир. –1985. – Т.1 – 479 с. - Т.2- 496 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир. – 1975. – 536с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука. – 1980. – 208 с.

Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Области застосування методів оптимізації

1.2 Загальна постановка ЗМП

Критеріальна (цільова) функція:

$$f(x) \rightarrow opt \text{ (min, max)} \quad (1)$$

Система обмежень:

$$h_j(x) = 0, j = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$g_j(x) \geq 0, j = \overline{m+1, p} \quad (3)$$

Умови:

$$, \quad x \in E^n \quad x = (x_i; i = \overline{1, n})$$

Приклад побудови математичної моделі ЗПР (1)

Вхідні дані:

m – кількість підприємств ($i = \overline{1, m}$);

n – кількість видів виробів ($j = \overline{1, n}$);

r – кількість типів ресурсів ($k = \overline{1, r}$);

P_j – план виробництва виробів j -го виду;

a_{jk} – норматив витрат ресурсів k -го типу на одиницю виробів j -го виду;

b_{ik} – об'єм ресурсів k -го типу на i -му підприємстві;

c_{ij} – витрати на випуск одиниці виробів j -го виду на i -му підприємстві.

Приклад побудови математичної моделі ЗПР (2)

Необхідно: так розподілити планове завдання між підприємствами, щоб сумарні витрати на випуск виробів були мінімальні.

Шукані змінні: x_{ij} – план випуску виробів j -го виду на i -му підприємстві; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Модель:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = p_j ; \quad j = \overline{1, n} ;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} x_{ij} \leq b_{ik} ; \quad i = \overline{1, m} ; \quad k = \overline{1, r} ;$$

$$x_{ij} \geq 0 ; \quad i = \overline{1, m} ; \quad j = \overline{1, n} .$$

1.3 Класифікація ЗМП



1.4 Терміни та визначення

1.4.1 Допустимість

1.4.2 Область допустимих розв'язків (ОДР)

1.4.3 Оптимальність

1.4.4 Унімодальні та мультимодальні функції

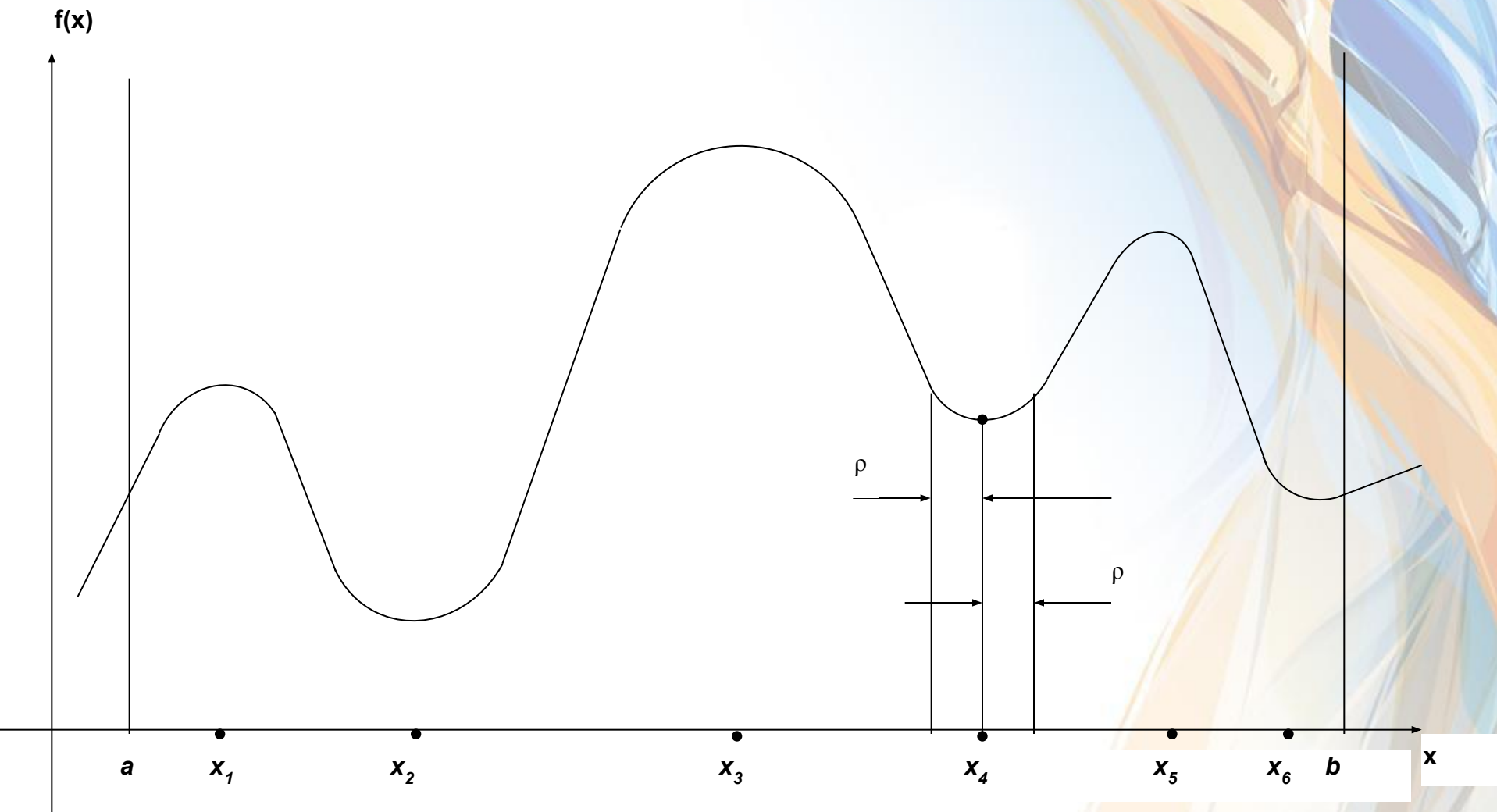


Рис. 1.2

1.4.5 Глобальний мінімум x^* :

$$f(x^*) = f_{\min} = \min\{f(x); x \in R\};$$

$$x^* = \arg \min_{x \in R} f(x).$$

1.4.6 Локальний мінімум x^* :

$$f'(x^*) = f'_{\min} = \min\{f(x); x \in R_0\};$$

$$x^* = \arg \min_{x \in R_0} f(x),$$

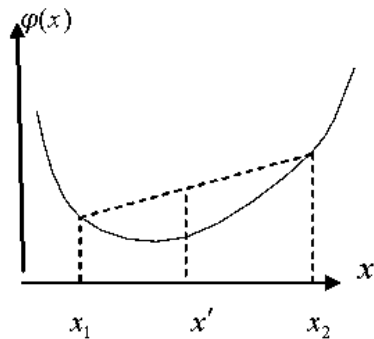
$$R_0 = \{x \in R : |x^* - x| \leq \rho\}.$$

1.4.7 Стаціонарні точки

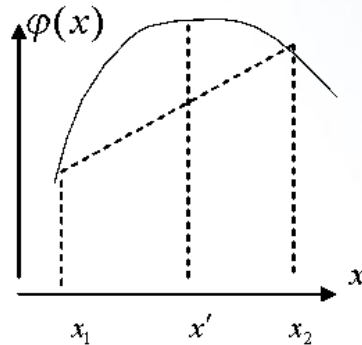
1.4.8 Наближений оптимальний розв'язок x^* :

$$|f(x^*) - f_{\min}| \leq \varepsilon.$$

1.4.9 Опуклість та увігнутість



Опукла функція



Увігнута функція

Функція $\varphi(x)$ опукла в області R , якщо:

$$\varphi[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leq \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2);$$
$$x_1 \in R; x_2 \in R; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Функція $\varphi(x)$ увігнута в області R , якщо:

$$\varphi[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \geq \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2);$$
$$x_1 \in R; x_2 \in R; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Строго опуклі та строго увігнуті функції.

Приклад

Визначити, опукла чи увігнута функція

$$\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 7$$

при $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $\alpha = 0,3$:

$$\varphi(0,7 \times 3) = \varphi(2,1) = 5,31$$

$$0,3\varphi(0) + 0,7\varphi(3) = 2,1 + 0,7 \times 10 = 9,1$$

$$\varphi(0,7 \times 3) \leq 0,3\varphi(0) + 0,7\varphi(3)$$

Висновок: функція $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 7$ опукла.

Множина Q , $Q \subset E^n$, опукла, якщо для будь-якої пари $x^{(1)} \in Q$ та $x^{(2)} \in Q$

$$\left[\forall x' \in (x^{(1)}, x^{(2)}) \right] (x' \in Q);$$

$$x' = \alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

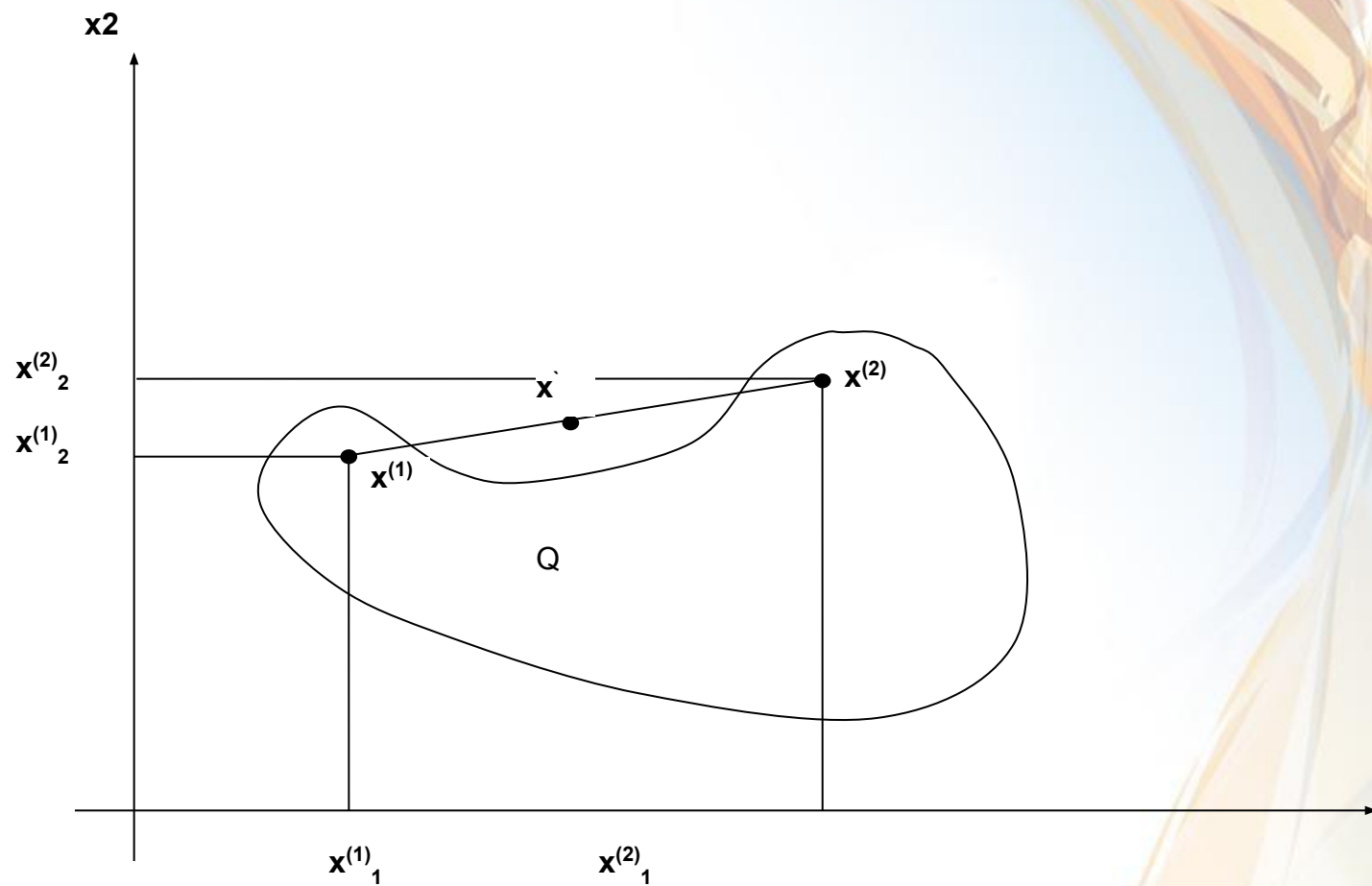


Рис. 1.4

Область допустимих рішень ЗМП з обмеженнями-нерівностями опукла, якщо:

$$(\forall j = \overline{1, m}) \{ [g_j(x) \leq 0] \& [g_j(x) - \text{опукла}] \vee [g_j(x) \geq 0] \& [g_j(x) - \text{увігнута}] \}$$

1.4.10 Градієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$:

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Приклад

$$f(x) = -2x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 + 5x_1 - 6x_2; \quad x^{(k)} = (2, 0, -1).$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -4x_1 + 5; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -4x_2 - 6; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 6x_3 - 4x_2.$$

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

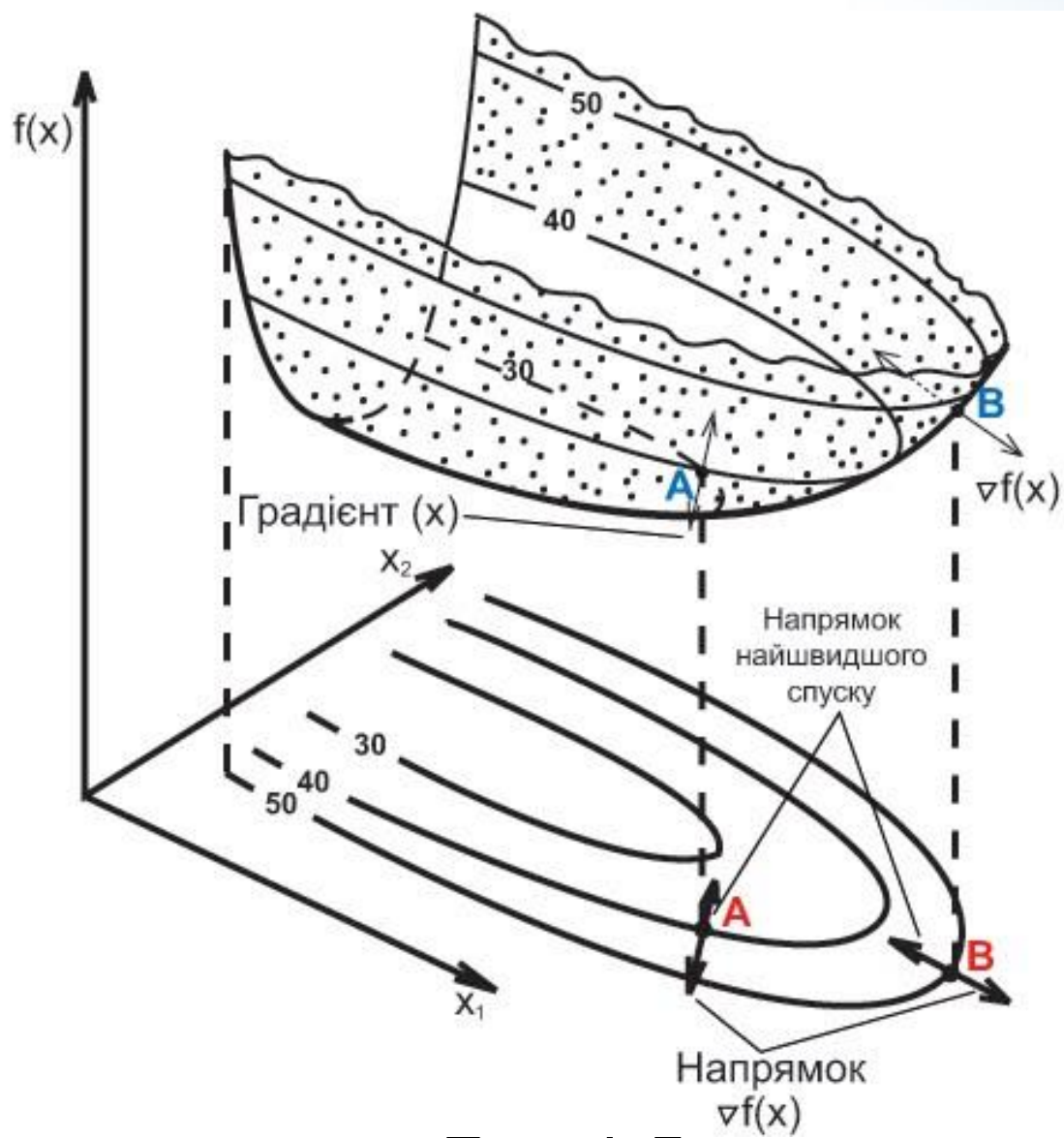


Рис.1.5

1.4.11 Апроксимація функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$:

- лінійна:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)});$$

- квадратична:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \times H(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}).$$

Матриця Гессе для функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$:

$$H(x^{(k)}) = \nabla^2 f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Приклад

$$f(x) = -2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 - 4x_1 x_2 x_3 + 5x_1 x_2^2 - 6x_1 + 7x_3; \quad x^{(k)} = (2, 0, -1).$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -4x_1 x_2 - 4x_2 x_3 + 5x_2^2 - 6;$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_1^2 + 6x_2 x_3 - 4x_1 x_3 + 10x_1 x_2;$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 3x_2^2 - 4x_1 x_2 + 7.$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -4x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = -4x_1 - 4x_3 + 10x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} = -4x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = -4x_1 - 4x_3 + 10x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 6x_3 + 10x_1; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} = 6x_2 - 4x_1;$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_1} = -4x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_2} = 6x_2 - 4x_1; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} = 0.$$

1.5 Необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку ЗМП

$$f(x) \rightarrow \min; x \in E^n.$$

x^* – оптимальний розв'язок задачі, якщо:

- 1) $f(x)$ диференціюєма в x^* ;
- 2) $\nabla f(x^*) = 0$;
- 3) $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

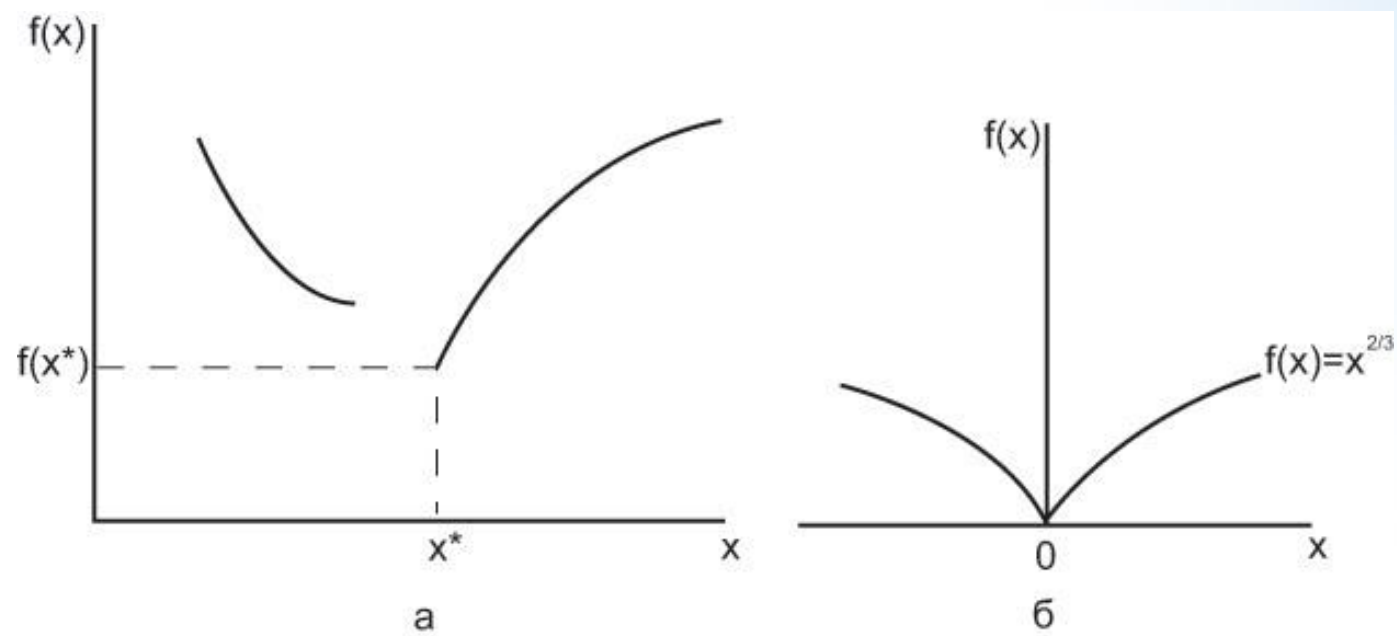


Рис.1.6

Тема 2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Канонічна форма ЗЛП

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}.$$

2.2 Основні поняття та визначення

Допустимі розв'язки ЗЛП.
Оптимальні розв'язки ЗЛП.

Варіанти:

$$m=n$$

$$m<n$$

$$m>n$$

Сумісність системи обмежень.

Ранг матриці коефіцієнтів r_A .

Ранг розширеної матриці r_B .

Ранг системи обмежень r_C .

Приклад

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 - 2x_3 = 3$$

$$r_A = r_B = r_C = 3.$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$r_A = 1; \quad r_B = 2; \quad r_A \neq r_B.$$

Лінійно незалежні обмеження

Приклад

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$r_A = r_B = r_C = 2$$

Базисні та вільні змінні:

$$x_1 = g'_1(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

.....

$$x_m = g'_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$n > m; \quad r_A = r_B = r_C = m.$$

Приклад

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 = 3 + x_3$$

$$x_2 = 5 + 3x_3 - x_4$$

$$n = 4; \quad r_A = r_B = r_C = 2.$$

2.3 Геометрична інтерпретація ЗЛП

Приклад

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7 \rightarrow \min$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = -4$$

$$x_2 + x_6 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 7}.$$

$$r_A = r_B = r_C = m = 5; \quad n - m = 2.$$

Вільні змінні: x_1 та x_2 .

Базисні змінні: $x_3, \dots, x_7$.

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1$$

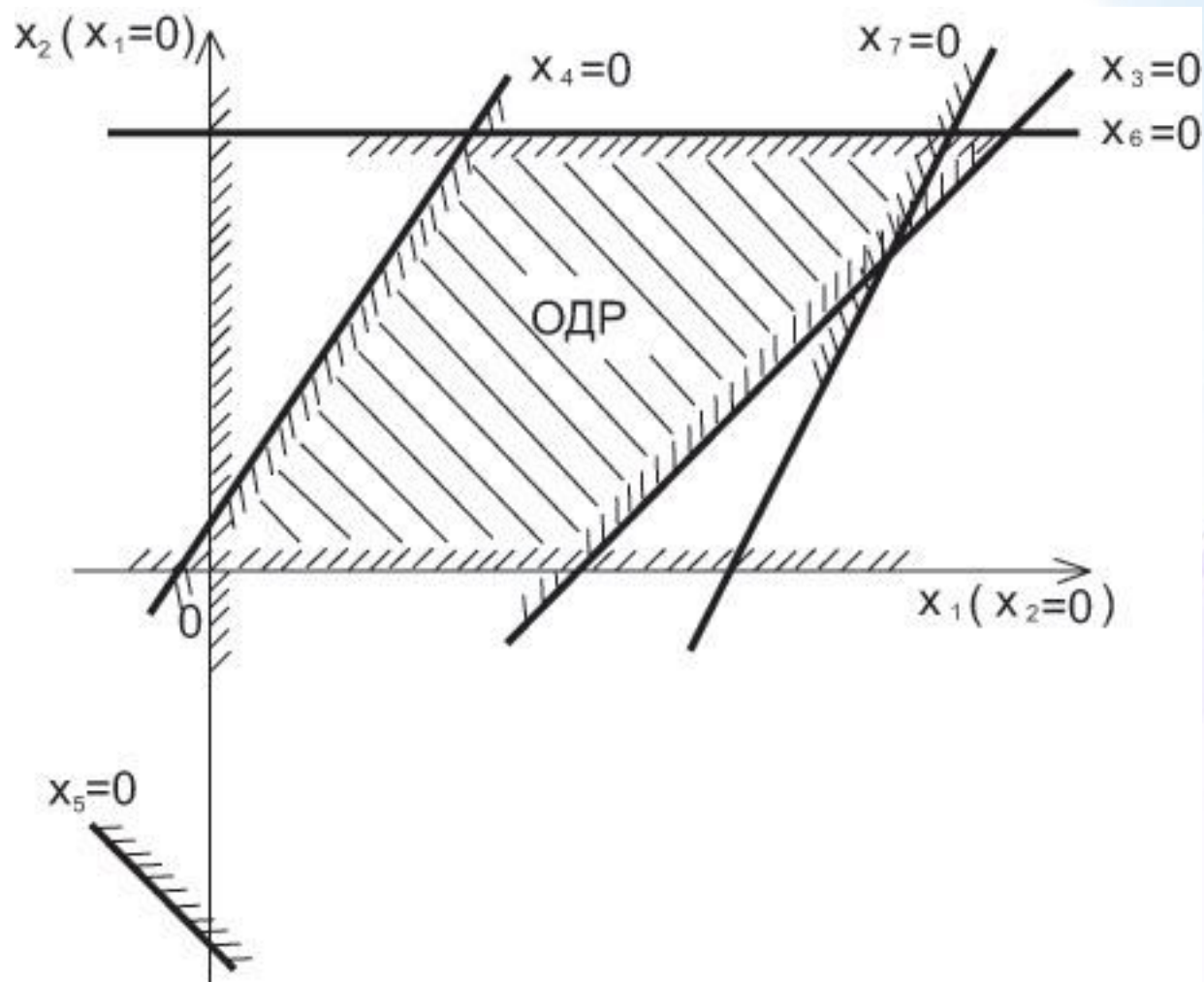
$$x_5 = x_1 + x_2 + 4$$

$$x_6 = -x_2 + 5$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6$$

Область допустимих рішень:

Рис. 1.7



ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧКИ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ

$$f(x) = -5x_1 - 2x_2 - 12$$

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2$$

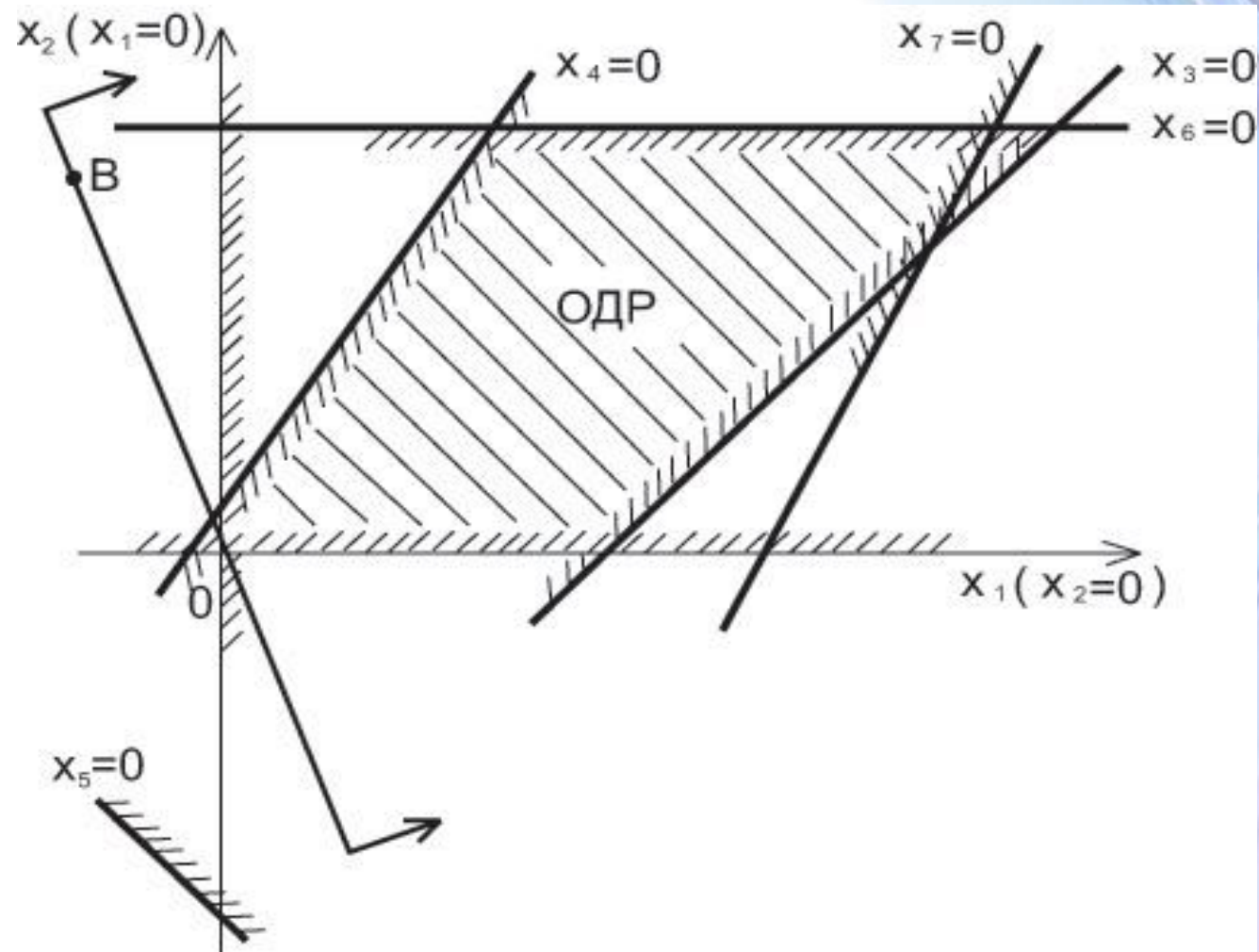
Рівняння основної прямої:

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2 = 0.$$

Переміщення основної прямої:

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2 = C \neq 0.$$

Рис. 1.8



Оптимальне рішення:

$$x_1^* = 8,5; \quad x_2^* = 5; \quad x_3^* = 0,5; \quad x_4^* = 16,5;$$

$$x_5^* = 17,5; \quad x_6^* = x_7^* = 0;$$

$$f^* = -64,5.$$

Висновки:

1. Область допустимих рішень ЗЛП – опуклий багатогранник.
(Опорні точки. Опорні рішення.)
2. У кожній опорній точці $k = n - m$ змінних дорівнює нулю.
3. Оптимальне рішення ЗЛП знаходиться на границі ОДР: у вершині або на грані багатогранника, найбільш віддаленої від початку координат у напрямку спадання значень функції $f(x)$.

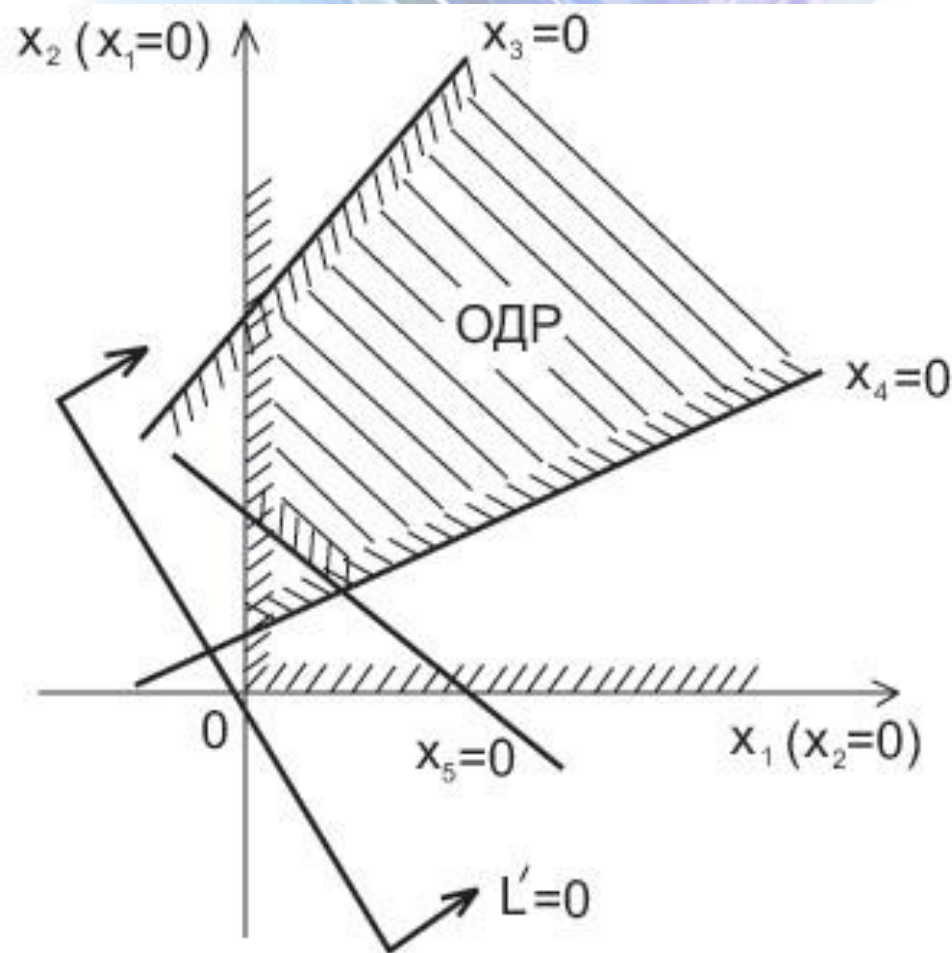
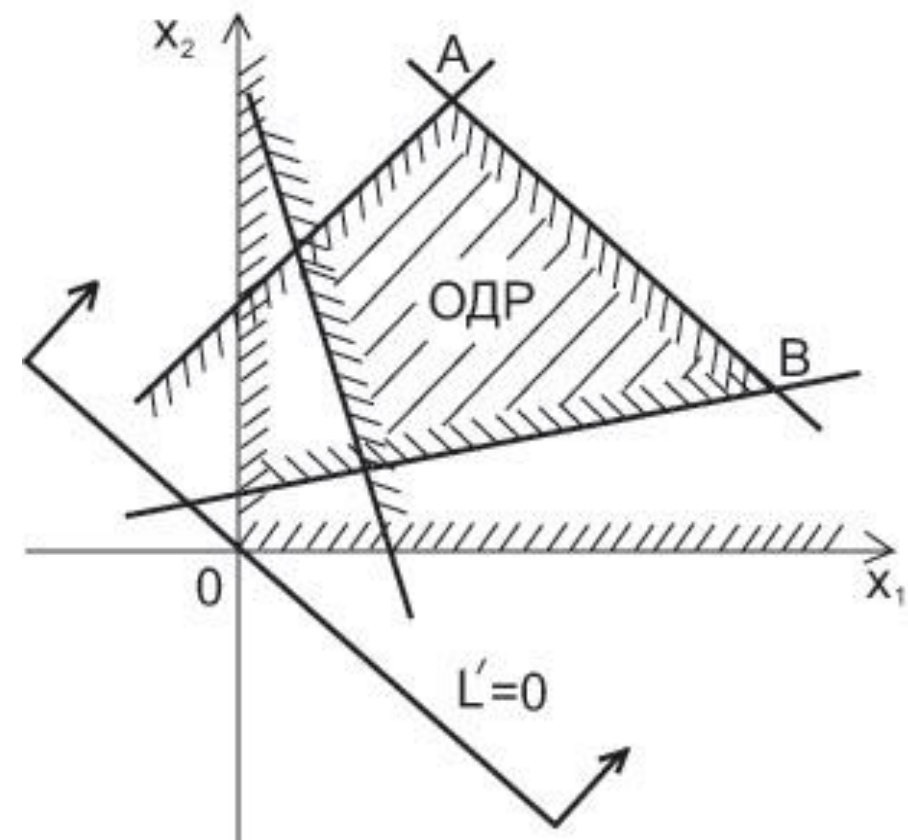


Рис. 1.9

2.4 Ідея симплекс-методу

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \alpha_{k+1,2} x_2 + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$x_{k+2} = \beta_{k+2} - (\alpha_{k+2,1} x_1 + \alpha_{k+2,2} x_2 + \dots + \alpha_{k+2,k} x_k)$$

.....

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k).$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n): \quad x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0; \quad x_{k+1} = \beta_{k+1};$$

$$x_{k+2} = \beta_{k+2}; \dots; \quad x_n = \beta_n.$$

$$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0) \rightarrow \bar{x} \text{ — опорне рішення.}$$

$$(\exists i : k+1 \leq i \leq n)(\beta_i < 0) \rightarrow x \text{ — недопустиме рішення.}$$

Нехай $\beta_{i'} < 0$; $k+1 \leq i' \leq n$.

Припустимо, $(\exists j^* : 1 \leq j^* \leq k)(\alpha_{i',j^*} < 0)$.

Тоді $(x_{j^*} \uparrow) \Rightarrow (x_{i'} \uparrow)$.

$$I_{j^*}^{(\pm)} = \left\{ i : (k+1 \leq i \leq n) \& \left[(\alpha_{i,j^*} < 0) \& (\beta_i < 0) \vee (\alpha_{i,j^*} > 0) \& (\beta_i > 0) \right] \right\}$$

Границя збільшення x_{j^*} :

$$0 = \beta_i - \alpha_{i,j^*} x_{j^*}^{\max}(i),$$

звідки

$$x_{j^*}^{\max}(i) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,j^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(\pm)}.$$

Вибір x_{i^*} :

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(\pm)} \right\}.$$

Заміна базисних змінних: $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$.

$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0) \& (\forall j = \overline{1, k})(\gamma_j \leq 0) \rightarrow \bar{x} -$
 оптимальне рішення.

$$f_{opt} = \gamma_0.$$

Нехай $(\exists j^* : 1 \leq j^* \leq k)(\gamma_{j^*} > 0)$.

Тоді

$$(x_{j^*} \uparrow) \Rightarrow [f(x) \downarrow].$$

$$I_{j^*}^{(+)} = \left\{ i : (k+1 \leq i \leq n) \& (\alpha_{i,j^*} > 0) \right\}.$$

$$\left(\bigwedge \exists i : k+1 \leq i \leq n \right) (\alpha_{i,j^*} > 0) \rightarrow [f(x) \rightarrow -\infty]$$

Границя збільшення x_{j^*} :

$$0 = \beta_i - \alpha_{i,j^*} x_{j^*}^{\max}(i),$$

звідки

$$x_{j^*}^{\max}(i) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,j^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(+)}.$$

Вибір x_{i^*} :

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(+)} \right\}.$$

Заміна базисних змінних: $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$.

2.5 Табличний алгоритм заміни базисних змінних

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,j} x_j + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

.....

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \dots + \alpha_{i,j} x_j + \dots + \alpha_{i,k} x_k)$$

.....

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Заміна базисних змінних: $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$;

$$k+1 \leq i^* \leq n; \quad 1 \leq j^* \leq k.$$

Дозволяючий рядок

Дозволяючий стовпчик

Дозволяючий елемент

	γ_0, β_i	x_1	...	x_{j^*}	...	x_k
$f(x)$	γ_0	γ_1		γ_{i^*}		γ_k
x_{k+1}	β_{k+1}	$\alpha_{k+1,1}$	...	α_{k+1,j^*}	...	$\alpha_{k+1,k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_{i^*}	β_{i^*}	$\alpha_{i^*,1}$	...	α_{i^*,j^*}	...	$\alpha_{i^*,k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_n	β_n	$\alpha_{n,1}$	...	α_{n,j^*}	...	$\alpha_{n,k}$

Приклад

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) \rightarrow \min$$

$$x_4 = \beta_4 - (\alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3)$$

$$x_5 = \beta_5 - (\alpha_{51} x_1 + \alpha_{52} x_2 + \alpha_{53} x_3)$$

$$x_6 = \beta_6 - (\alpha_{61} x_1 + \alpha_{62} x_2 + \alpha_{63} x_3)$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 6}$$

$$x_2 \Leftrightarrow x_5$$

$$x_2 = \frac{\beta_5}{\alpha_{52}} - \left(\frac{\alpha_{51}}{\alpha_{52}} x_1 + \frac{1}{\alpha_{52}} x_5 + \frac{\alpha_{53}}{\alpha_{52}} x_3 \right)$$

$$x_4 = \left(\beta_4 - \frac{\alpha_{42} \beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[\left(\alpha_{41} - \frac{\alpha_{42} \alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left(\alpha_{43} - \frac{\alpha_{42} \alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]$$

$$x_6 = \left(\beta_6 - \frac{\alpha_{62} \beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[\left(\alpha_{61} - \frac{\alpha_{62} \alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left(\frac{\alpha_{62}}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left(\alpha_{63} - \frac{\alpha_{62} \alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]$$

$$f(x) = \left(\gamma_0 - \frac{\gamma_2 \beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[\left(\gamma_1 - \frac{\gamma_2 \alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left(\gamma_3 - \frac{\gamma_2 \alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]$$

Правила перетворення:

$$1) \quad \alpha_{i^*,j^*}^H = \frac{1}{\alpha_{i^*,j^*}^C};$$

$$2) \quad \alpha_{i^*,j}^H = \frac{\alpha_{i^*,j}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C}; \quad j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j^*\}; \quad \beta_{i^*}^H = \frac{\beta_{i^*}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C};$$

$$3) \quad \alpha_{i,j^*}^H = -\frac{\alpha_{i,j^*}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C}; \quad i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{i^*\}; \quad \gamma_{j^*}^H = -\frac{\gamma_{j^*}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C};$$

$$4) \quad \alpha_{i,j}^H = \alpha_{i,j}^C - \frac{\alpha_{i^*,j}^C \times \alpha_{i,j^*}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C}; \quad i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{i^*\}; \quad j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j^*\};$$

$$\beta_i^H = \beta_i^C - \frac{\beta_{i^*}^C \times \alpha_{i,j^*}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C}; \quad i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{i^*\};$$

$$\gamma_0^H = \gamma_0^C - \frac{\gamma_{j^*}^C \times \beta_{i^*}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C}; \quad \gamma_j^H = \gamma_j^C - \frac{\gamma_{j^*}^C \times \alpha_{i^*,j}^C}{\alpha_{i^*,j^*}^C}; \quad j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j^*\}.$$

	γ_0, β_i	x_1	...	x_{j^*}	...	x_k
$f(x)$	$\gamma_0 - \frac{\beta_{i^*} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\gamma_1 - \frac{\alpha_{i^*,1} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$		$-\frac{\gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$		$\gamma_k - \frac{\alpha_{i^*,k} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$
x_{k+1}	$\beta_{k+1} - \frac{\alpha_{k+1,j^*} \times \beta_{i^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\alpha_{k+1,1} - \frac{\alpha_{i^*,1} \times \alpha_{k+1,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	...	$-\frac{\alpha_{k+1,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	...	$\alpha_{k+1,k} - \frac{\alpha_{i^*,k} \times \alpha_{k+1,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$
...	...	...	...	...	...	...
x_{i^*}	$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\frac{\alpha_{i^*,1}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	...	$\frac{1}{\alpha_{i^*,j^*}}$	...	$\frac{\alpha_{i^*,k}}{\alpha_{i^*,j^*}}$
...	...	...	...	...	...	...
x_n	$\beta_n - \frac{\alpha_{n,j^*} \times \beta_{i^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\alpha_{n,1} - \frac{\alpha_{i^*,1} \times \alpha_{n,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	...	$-\frac{\alpha_{n,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	...	$\alpha_{n,k} - \frac{\alpha_{i^*,k} \times \alpha_{n,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$

2.6 Знаходження опорного рішення

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,j} x_j + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

.....

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \dots + \alpha_{i,j} x_j + \dots + \alpha_{i,k} x_k)$$

.....

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Рішення $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0; \quad x_{k+1} = \beta_{k+1}; \quad x_{k+2} = \beta_{k+2}; \dots; \quad x_n = \beta_n.$$

Припустимо, $(\exists i : k+1 \leq i \leq n)(\beta_i < 0)$.

ПРАВИЛА ВИБОРУ ДОЗВОЛЯЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА

1) Вибирається рядок $i' : \beta_{i'} < 0; k + 1 \leq i' \leq n$.

2) В рядку i' вибирається коефіцієнт $\alpha_{i',j^*} < 0; 1 \leq j^* \leq k$
(дозволяючий стовпчик).

$(\forall j = \overline{1, k})(\alpha_{i'j} \geq 0) \rightarrow$ рішень немає.

3) В дозволяючому стовпчику j^* виділяються елементи, які мають однакові знаки зі своїми вільними членами:

$$I_{j^*}^{(\pm)} = \left\{ i : (k + 1 \leq i \leq n) \& [(\alpha_{i,j^*} < 0) \& (\beta_i < 0) \vee (\alpha_{i,j^*} > 0) \& (\beta_i > 0)] \right\}.$$

4) Обчислюються відношення

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(\pm)}.$$

5) В якості дозволяючого елемента обирається коефіцієнт $\alpha_{i^*j^*}$:

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(\pm)} \right\}.$$

Приклад

$$x_4 = 1 + x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$x_5 = -5 + 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 2 - x_1 - x_2$$

$$x_7 = 1 + x_2 - x_3$$

$$x_4 = 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$x_5 = -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3)$$

$$x_6 = 2 - (x_1 + x_2)$$

$$x_7 = 1 - (-x_2 + x_3)$$

Приклад

			р/ст.		
		β_i	x_1	x_2	x_3
	x_4	1	-1	-2	1
$\rightarrow$	x_5	-5	-2	1	-1
р/стр.	x_6	2	1	1	0
	x_7	1	0	-1	1

β_i / α_{ij}
$5/2=2,5$
$2/1=2$

Заміна базиса: $x_1 \Leftrightarrow x_6$.

					р/ст.
		β_i	x_6	x_2	x_3
	x_4	3	1	-3	1
→ р/стр.	x_5	-1	2	3	-1
	x_1	2	1	1	0
	x_7	1	0	-1	1

β_i / α_{ij}
$3/1=3$
$-1/-1=1$
$1/1=1$

Заміна базиса: $x_3 \Leftrightarrow x_5$.

	β_i	x_6	x_2	x_5
x_4	2	3	2	1
x_3	1	-2	-3	-1
x_1	2	1	1	0
x_7	0	2	2	1

Опорне рішення: $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$.

2.7 Пошук оптимального рішення

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_k x_k) \rightarrow \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,j} x_j + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$\dots$$

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \dots + \alpha_{i,j} x_j + \dots + \alpha_{i,k} x_k)$$

$$\dots$$

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \dots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Рішення $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n);$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0; \quad x_{k+1} = \beta_{k+1}; \quad x_{k+2} = \beta_{k+2}; \dots; \quad x_n = \beta_n;$$

$$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0).$$

$(\exists \forall j: 1 \leq j \leq k)(\gamma_j \leq 0) \Rightarrow \bar{x}$ – оптимальне рішення.

Припустимо, $(\exists j: 1 \leq j \leq k)(\gamma_j > 0).$

ПРАВИЛА ВИБОРУ ДОЗВОЛЯЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА

1) Вибирається дозволяючий стовпчик $j^* : \gamma_{j^*} > 0$.

2) В дозволяючому стовпчику j^* виділяються від'ємні елементи:

$$I_{j^*}^{(+)} = \{i : (k+1 \leq i \leq n) \& (\alpha_{ij^*} > 0)\}.$$

$[\forall i : (k+1 \leq i \leq n)](\alpha_{ij^*} \leq 0) \rightarrow f(x)$ необмежена знизу

3) Обчислюються відношення

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(+)}$$

4) В якості дозволяючого елемента вибирається коефіцієнт $\alpha_{i^*j^*}$:

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*j^*}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(+)} \right\}.$$

Приклад

$$f(x) = x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$x_4 = 2 - x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$x_5 = 1 - x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_6 = 2 - x_2 - x_3$$

$$x_i \geq 0; \quad i = \overline{1, 6}.$$

Стандартна форма:

$$f(x) = 0 - (-x_1 + 2x_2 + x_3) \rightarrow \min$$

$$x_4 = 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$x_5 = 1 - (x_1 - x_2 + x_3)$$

$$x_6 = 2 - (x_2 + x_3)$$

$$x_i \geq 0; \quad i = \overline{1, 6}.$$

		р/ст.			
	γ_0, β_i	x_1	x_2	x_3	
	$f(x)$	0	-1	2	1
	x_4	2	1	1	-2
р/стр.	x_5	1	1	-1	1
	x_6	5	0	1	1

β_i / α_{ij}
1/1=1
5/1=5

1) Заміна базиса: $x_3 \Leftrightarrow x_5$.

				р/ст.	
	γ_0, β_i	x_1	x_2	x_3	
$f(x)$	-1	-2	3	-1	
x_4	4	3	-1	2	
x_3	1	1	-1	1	
р/стр.	x_6	4	-1	2	-1

β_i / α_{ij}
4/2=2

2) Заміна базиса: $x_6 \Leftrightarrow x_2$.

				р/ст.	
	γ_0, β_i	x_1	x_6	x_5	
	$f(x)$	-7	-1/2	-3/2	1/2
р/стр.	x_4	6	5/2	1/2	3/2
	x_3	3	1/2	1/2	1/2
	x_2	2	-1/2	1/2	-1/2

β_i / α_{ij}
6/(3/2)=4
3/(1/2)=6

3) Заміна базиса: $x_4 \Leftrightarrow x_5$.

	γ_0, β_i	x_1	x_6	x_4
$f(x)$	-9	-4/3	-5/3	-1/3
x_5	4	5/3	1/3	2/3
x_3	1	-1/3	1/3	-1/3
x_2	4	1/3	2/3	1/3

Оптимальний розв'язок:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 4; \quad x_6 = 0; \quad f_{opt} = -9.$$

Тема 3. Цілочисельне програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0; \quad x_j - \text{ціле}; \quad j = \overline{1, n}.$$

3.1 Метод відсікання (відсікаючих площин) Р.Гоморі

Таблична форма:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in J^C} \alpha_{ij} x_j; \quad i \in I^B.$$

Нехай $x_{i'} = \beta_{i'} \neq \text{ціле}; \quad i' \in I^B.$

$[\alpha_{ij}]$, $[\beta_i]$ – найбільші цілі:

$$[\alpha_{ij}] \leq \alpha_{ij}; \quad [\beta_i] \leq \beta_i.$$

Формування відсікаючого обмеження

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} \alpha_{ij} x_j = \beta_{i'}. \quad (3.1)$$

$$\sum_{j \in J^C} [\alpha_{ij}] x_j \leq \sum_{j \in J^C} \alpha_{ij} x_j;$$

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} [\alpha_{ij}] x_j \leq \beta_{i'}$$

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} [\alpha_{ij}] x_j \leq [\beta_{i'}]. \quad (3.2)$$

Після віднімання (3.2) від (3.1):

$$\sum_{j \in J^C} \alpha_{ij} x_j - \sum_{j \in J^C} [\alpha_{ij}] x_j \geq \beta_i - [\beta_i];$$

$$\sum_{j \in J^C} (\alpha_{ij} - [\alpha_{ij}]) x_j \geq \beta_i - [\beta_i].$$

$$\mu_{ij} = \alpha_{ij} - [\alpha_{ij}]; \quad j \in J^C; \quad 0 \leq \mu_{ij} < 1;$$

$$v_i = \beta_i - [\beta_i]; \quad 0 < v_i < 1.$$

Відсікаюче обмеження:

$$\sum_{j \in J^C} \mu_{ij} x_j \geq v_i.$$

Перетворення в рівняння:

$$\sum_{j \in J^C} \mu_{ij} x_j - x_{n+1} = v_{i'}; \quad x_{n+1} \geq 0;$$

$$x_{n+1} = -v_{i'} + \sum_{j \in J^C} \mu_{ij} x_j. \quad (3.3)$$

Лемма. Якщо відсікання (3.3) додається до симплексної таблиці задачі лінійного програмування, то ніякі цілочисельні допустимі точки не виключаються. Нова таблиця є допустимою, якщо $\beta_{i'}$ — ціле число, та недопустимою в противному випадку.

Приклад

$$f(x) = -7x_1 - 9x_2 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 35$$

$$x_j \geq 0; \quad x_j - \text{цїле}; \quad j = \overline{1, 4}.$$

Перетворена система обмежень:

$$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2$$

$$x_4 = 35 - 7x_1 - x_2$$

Вихідна симплексна таблиця №1 послабленої задачі:

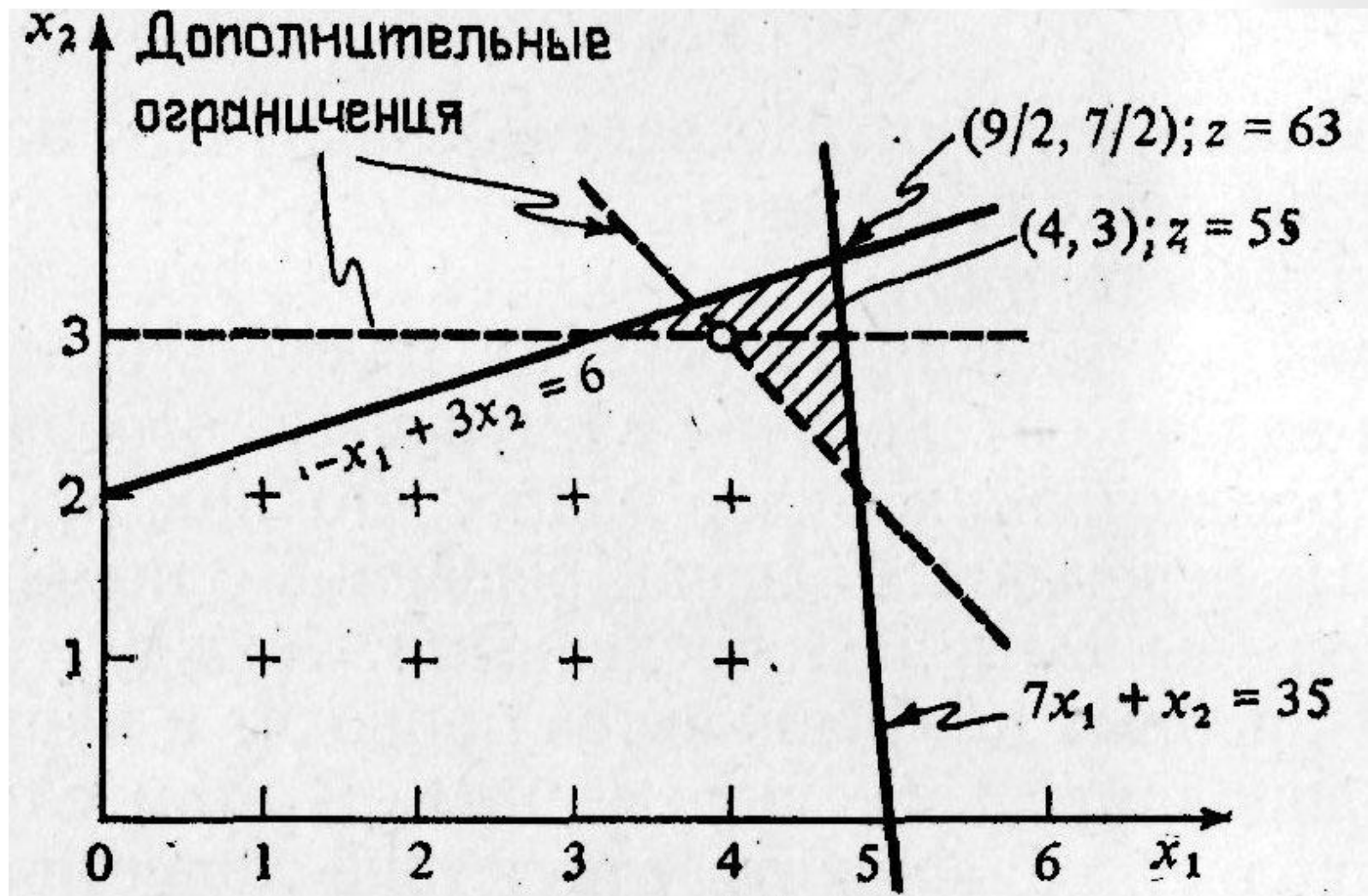
	γ_0, β_i	x_1	x_2
$f(x)$	0	7	9
x_3	6	-1	3
x_4	35	7	1

Кінцева симплексна таблиця №2 послабленої задачі:

	γ_0, β_i	x_4	x_3
$f(x)$	-63	15/11	28/11
x_2	7/2	1/22	7/22
x_1	9/2	3/22	-1/22

Розв'язок послабленої задачі:

$$x_1 = 4.5; \quad x_2 = 3.5; \quad x_3 = x_4 = 0; \quad f_{\min} = -63.$$



$$x_2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{1}{22}x_4 + \frac{7}{22}x_3 \right)$$

$$\beta_2 = 3\frac{1}{2}; \quad [\beta_2] = 3; \quad v_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{24} = \frac{1}{22}; \quad [\alpha_{24}] = 0; \quad \mu_{24} = \frac{1}{22}$$

$$\alpha_{23} = \frac{7}{22}; \quad [\alpha_{23}] = 0; \quad \mu_{23} = \frac{7}{22}$$

Рівняння відсікання для x_2 :

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4.$$

$$x_5 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{22}x_4 - \frac{7}{22}x_3 \right)$$

Початкова симплексна таблиця №3, доповнена відсіканням для x_2 :

	γ_0, β_i	x_4	x_3
$f(x)$	-63	15/11	28/11
x_2	7/2	1/22	7/22
x_1	9/2	3/22	-1/22
x_5	-1/2	-1/22	-7/22

Кінцева симплексна таблиця №4, доповнена відсіканням для x_2 :

	γ_0, β_i	x_4	x_5
$f(x)$	-59	1	8
x_2	3	0	1
x_1	32/7	1/7	-1/7
x_3	11/7	1/7	-22/7

Розв'язок задачі, доповненої відсіканням для x_2 :

$$x_1 = 32/7; \quad x_2 = 3; \quad x_2 = 11/7; \quad x_4 = 0; \quad f_{\min} = -59.$$

$$x_1 = \frac{32}{7} - \left(\frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 \right)$$

$$\beta_1 = 4\frac{4}{7}; \quad [\beta_1] = 4; \quad \nu_1 = \frac{4}{7}$$

$$\alpha_{14} = \frac{1}{7}; \quad [\alpha_{14}] = 0; \quad \mu_{14} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha_{15} = -\frac{1}{7}; \quad [\alpha_{15}] = -1; \quad \mu_{15} = -\frac{1}{7} - (-1) = \frac{6}{7}$$

Рівняння відсікання для x_1 :

$$x_6 = -\frac{4}{7} + \frac{1}{7}x_4 + \frac{6}{7}x_5.$$

$$x_6 = -\frac{4}{7} - \left(-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 \right)$$

Початкова симплексна таблиця №5, доповнена відсіканням для x_1 :

	γ_0, β_i	x_4	x_5
$f(x)$	-59	1	8
x_2	3	0	1
x_1	$32/7$	$1/7$	$-1/7$
x_3	$11/7$	$1/7$	$-22/7$
x_6	$-4/7$	$-1/7$	$-6/7$

Кінцева симплексна таблиця №6, доповнена відсіканням для x_1 :

	γ_0, β_i	x_6	x_5
$f(x)$	-55	7	2
x_2	3	0	1
x_1	4	1	-1
x_3	1	1	-4
x_4	4	-7	6

Розв'язок вихідної (цілочисельної) задачі:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 4; \quad f_{\min} = -55.$$

3.2 Метод гілок та границь

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min ; \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i ; \quad i = \overline{1, m} ; \quad (3.5)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j ; \quad x_j - \text{ціле}; \quad j = \overline{1, n} . \quad (3.6)$$

Кількість планів (варіантів розв'язку задачі) $\vec{x} = (x_j | j = \overline{1, n})$:

$$|G| = \prod_{j=1}^n (d_j + 1) .$$

Приклад

$$0 \leq x_1 \leq 3; 0 \leq x_2 \leq 1; 0 \leq x_3 \leq 2.$$

$$|G| = 4 \times 2 \times 3 = 24:$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \dots\dots\dots \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(x_{i'} = \beta_{i'} \neq \text{ціле}) \Rightarrow \text{розбивання } G :$

$$G_1 \subset G : \quad x_{i'} \leq [\beta_{i'}] ;$$

$$G_2 \subset G : \quad x_{i'} \geq [\beta_{i'}] + 1 ; \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset .$$

Додаткові обмеження:

$$\text{для } G_1 : \quad x_{n+1} = [\beta_{i'}] - x_{i'} ; \quad x_{n+1} \geq 0 ;$$

$$\text{для } G_2 : \quad x_{n+1} = -[\beta_{i'}] - 1 + x_{i'} ; \quad x_{n+1} \geq 0 .$$

На k -му кроці:

$$G_{\mu}^{(k)}; \quad \mu = \overline{1, \lambda_k}.$$

$$x_{\mu}^{(k)} = \arg \min_{x \in G_{\mu}^{(k)}} f(x);$$

$$\xi(G_{\mu}^{(k)}) = f(x_{\mu}^{(k)}); \quad \mu = \overline{1, \lambda_k};$$

$$x^* = (x_j^* | j = \overline{1, n}); \quad (\forall j = \overline{1, n})(x_j - \text{цїле}).$$

Алгоритм

1. Перевірка на оптимальність:

$$f(x^*) \leq \min \{ \xi(G_{\mu}^{(k)}) \mid \mu = \overline{1, \lambda_k} \}.$$

2. Перевірка умови завершення обчислень.

3. Вибір $G_{\mu^*}^{(k)}$:

$$\xi(G_{\mu^*}^{(k)}) = \min \{ \xi(G_{\mu}^{(k)}) \mid \mu = \overline{1, \lambda_k} \}.$$

4. Розбиття $G_{\mu^*}^{(k)}$ на $G_{\mu^*,1}^{(k)}$ та $G_{\mu^*,2}^{(k)}$:

$$G_{\mu^*,1}^{(k)} : x_{n+1} = [\beta_{i^*}] - x_{i^*}; \quad x_{n+1} \geq 0;$$

$$G_{\mu^*,2}^{(k)} : x_{n+1} = -[\beta_{i^*}] - 1 + x_{i^*}; \quad x_{n+1} \geq 0.$$

5. Розв'язок послаблених задач ЛП над $G_{\mu^*,1}^{(k)}$ та $G_{\mu^*,2}^{(k)}$

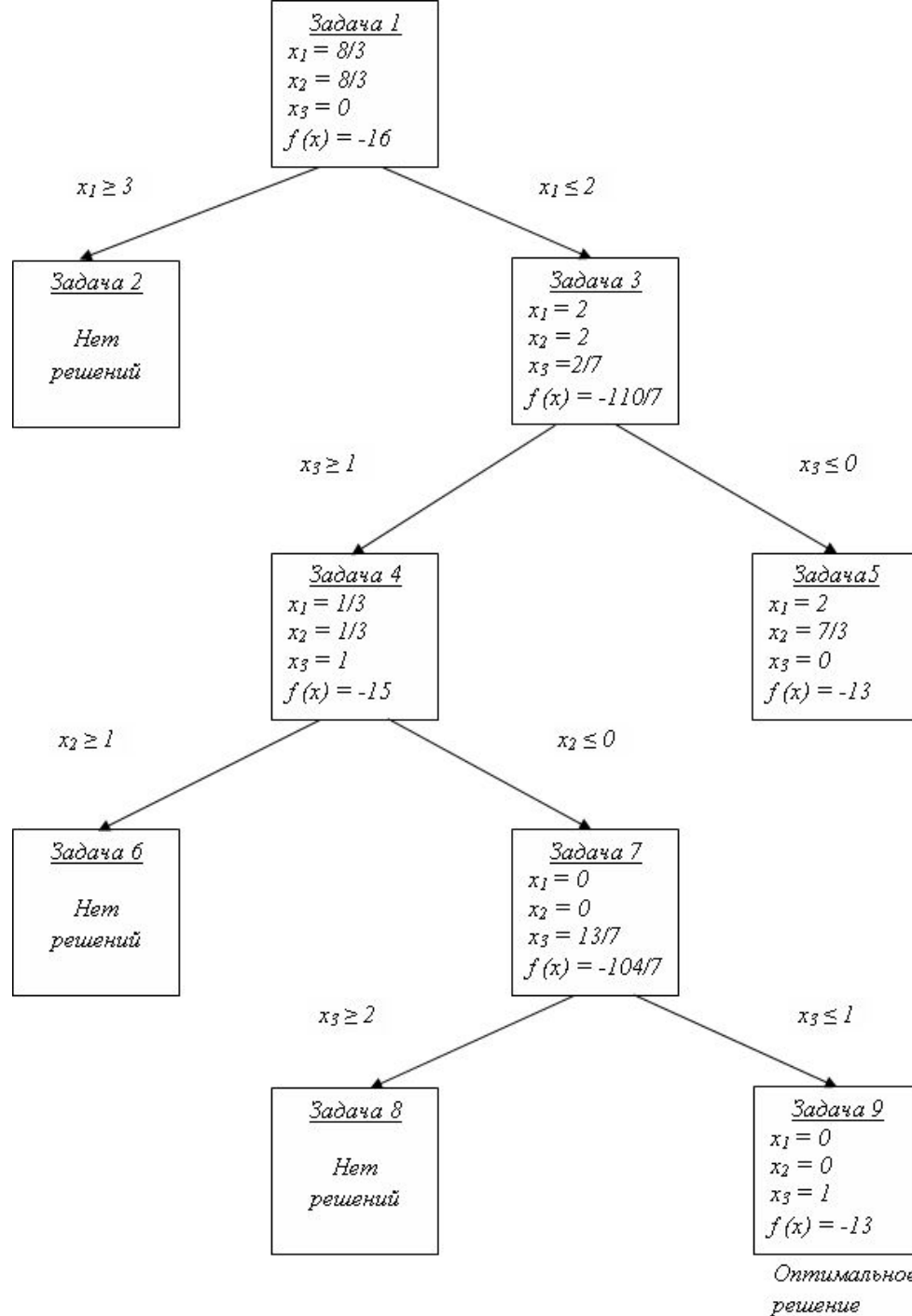
Приклад

$$f(x) = -3x_1 - 3x_2 - 13x_3 \rightarrow \min$$

$$x_4 = 8 + 3x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

$$x_5 = 8 - 6x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$0 \leq x_j \leq 5; \quad x_j - \text{цїле}; \quad j = \overline{1,3}; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0.$$



3.3 Комбінаторна оптимізація

$$f(x) = \sum_{i \in I_0} c_i x_i \rightarrow \max ; \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in I_j} a_{ji} x_i \leq b_j; \quad j = \overline{1, n} ; \quad (3.8)$$

$$x = (x_i \mid i = \overline{1, m}) ; \quad x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, m} .$$

$$G = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m ;$$

$$X_i = \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, m}; \quad |G| = 2^m .$$

Підмножини варіантів: G_k ; $k = \overline{1, \lambda}$.

Частковий план підмножини G_k :

$$x^C(k) = (x_i \mid i \in I_k^0 \boxtimes I_k^1), \\ (\forall i \in I_k^0)(x_i = 0) \& (\forall i \in I_k^1)(x_i = 1).$$

Доповнюючий план підмножини G_k :

$$x^D(k) = (x_i \mid i \in I_k), \\ (\forall i \in I_k)(x_i \in \{0, 1\}).$$

Активні обмеження: $J_k \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Модель, приведена у відповідність k -тій підмножині варіантів:

$$f_k(x) = \sum_{i \in I_{0k}} c_i x_i + c_k^1 \rightarrow \max ; \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in I_{jk}} a_{ji} x_i \leq b_{jk} ; \quad j \in J_k ; \quad (3.10)$$

$$x = (x_i | i \in I_k) ; \quad x_i \in \{0, 1\} ; \quad i \in I_k .$$

$$I_{0k}^0 = I_0 \boxtimes I_k^0; \quad I_{0k}^1 = I_0 \boxtimes I_k^1; \quad I_{0k} = I_0 \boxtimes I_k;$$

$$I_{jk}^0 = I_j \boxtimes I_k^0; \quad I_{jk}^1 = I_j \boxtimes I_k^1; \quad I_{jk} = I_j \boxtimes I_k; \quad j = \overline{1, n};$$

$$c_k^1 = \sum_{i \in I_{0k}^1} c_i \quad ;$$

$$b_{jk} = b_j - \sum_{i \in I_{jk}^1} a_{ij} \quad , \quad j \in J_k.$$

Підмножини та величини, необхідні для дослідження моделі (3.9)-(3.10):

$$I_{0k}^3 = \{i \in I_{0k} : c_i > 0\};$$

$$I_{jk}^2 = \{i \in I_{jk} : a_{ji} < 0\}; \quad I_{jk}^3 = \{i \in I_{jk} : a_{ji} > 0\};$$

$$I_{jk}^2(i') = \{i'\} \boxtimes \{i \in I_{jk}^2 : a_{ji} \leq a_{ji'}\};$$

$$I_{jk}^3(i'') = \{i''\} \boxtimes \{i \in I_{jk}^3 : a_{ji} \geq a_{ji''}\};$$

$$s_{jk}^{(p)} = \sum_{i \in I_{jk}^p} a_{ji}; \quad p \in \{2, 3\}, \quad j \in J_k;$$

$$\xi(G_k) = c_k^1 + \sum_{i \in I_{0k}^3} c_i; \quad k = \overline{1, \lambda}.$$

Аналіз підмножин варіантів

Твердження 1. Підмножина G_k не містить допустимих планів, якщо для деякого обмеження $j \in J_k$ виконується умова:

$$(I_{jk}^2 = \emptyset) \& (b_{jk} < 0) \vee (I_{jk}^2 \neq \emptyset) \& (s_{jk}^{(2)} > b_{jk}).$$

Приклади.

a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq -1;$

b) $-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 \leq -9.$

Твердження 2. Обмеження $j \in J_k$ не є активним по відношенню до планів підмножини G_k , якщо для нього виконується умова:

$$(I_{jk}^3 = \emptyset) \& (b_{jk} \geq 0) \vee (I_{jk}^3 \neq \emptyset) \& (s_{jk}^{(3)} \leq b_{jk}).$$

Приклади.

a) $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 1$;

b) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 4x_5 \leq 9$.

Твердження 3. Якщо $I_{jk}^2 \neq \emptyset$ ($j \in J_k$) та для деякого $i' \in I_{jk}^2$ виконується умова

$$s_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < s_{jk}^{(2)} - a_{ji'},$$

то з доповнюючих планів підмножини G_k допустимими можуть бути тільки ті, в яких $[\forall i \in I_{jk}^2(i')][x_i = 1]$.

Приклад.

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 4x_5 - 7x_6 \leq -11.$$

$$i' = 4; \quad a_{ji'} = -5; \quad x_4 = x_6 = 1.$$

Твердження 4. Якщо $I_{jk}^3 \neq \emptyset$ ($j \in J_k$) та для деякого $i'' \in I_{jk}^3$ виконується умова:

$$(I_{jk}^2 = \emptyset) \& (0 \leq b_{jk} < a_{ji''}) \vee (I_{jk}^2 \neq \emptyset) \& (s_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < s_{jk}^{(2)} + a_{ji''}),$$

то з доповнюючих планів підмножини G_k допустимими можуть бути лише ті, в яких $[\forall i \in I_{jk}^3(i'')][x_i = 0]$.

Приклади.

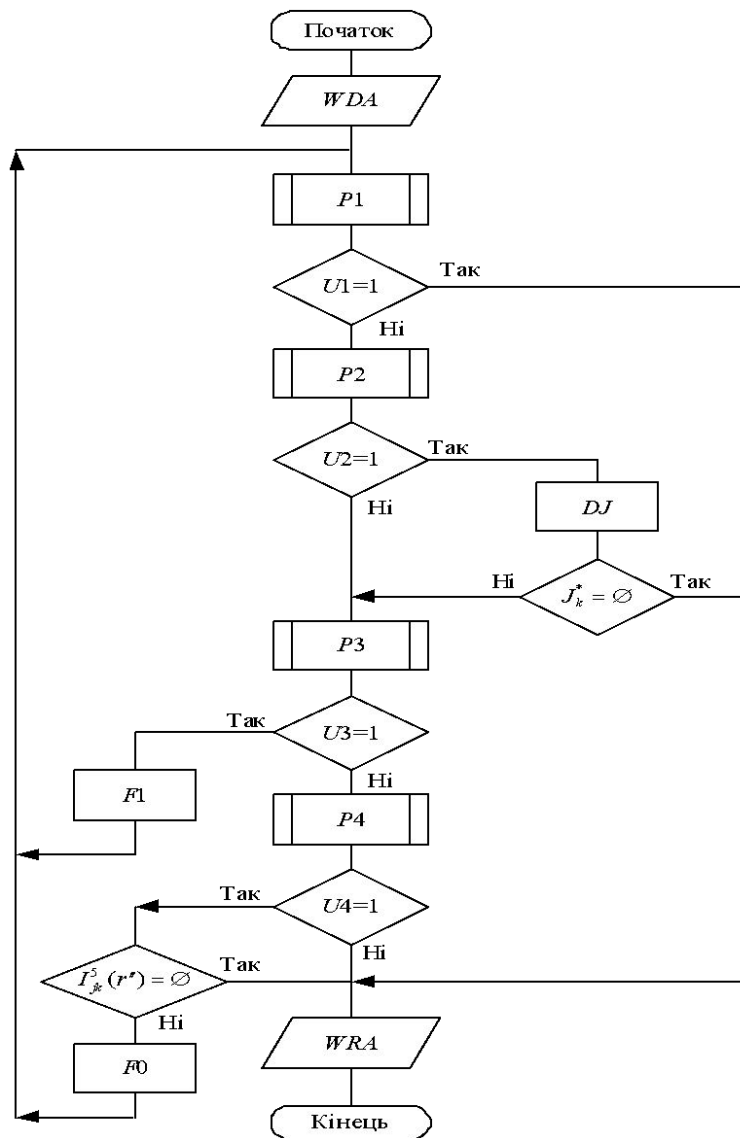
a) $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 13x_5 \leq 9;$

$i'' = 4; \quad a_{ji''} = 7; \quad x_4 = x_5 = 0;$

b) $-x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 9x_5 + 13x_6 \leq -9.$

$i'' = 4; \quad a_{ji''} = 7; \quad x_4 = x_6 = 0.$

Схема алгоритму аналізу підмножини варіантів



ФУНКЦІЇ БЛОКІВ

WDA — ввід вхідних даних;

WRA — вивід результатів аналізу підмножини G_k ;

P_1, P_2, P_3, P_4 — перевірка виконання умов тверджень 1, 2, 3 та 4 відповідно;

U_1, U_2, U_3, U_4 — фіксація факту виконання ($UN = 1$) або невиконання ($UN = 0$) N -го твердження; $N = \overline{1,4}$;

F_1, F_0 — привласнення безальтернативним змінним значення 1 та 0 відповідно, перетворення аналізованої системи обмежень;

DJ — видалення номерів обмежень, що втратили властивість активності.

Алгоритм

1. Вибір підмножини варіантів G_{k^*} ; $1 \leq k^* \leq \lambda$, яка підлягає розбиттю:

$$\xi(G_{k^*}) = \max \left\{ \xi(G_k); \quad k = \overline{1, \lambda} \right\}.$$

2. Вибір незалежної змінної x_{i^*} ; $i^* \in I_{k^*}$, значення якої підлягає фіксації:

$$c_{i^*} = \max \{ c_i; \quad i \in I_{ok^*} \}.$$

3. Розбиття підмножини варіантів G_{k^*} :

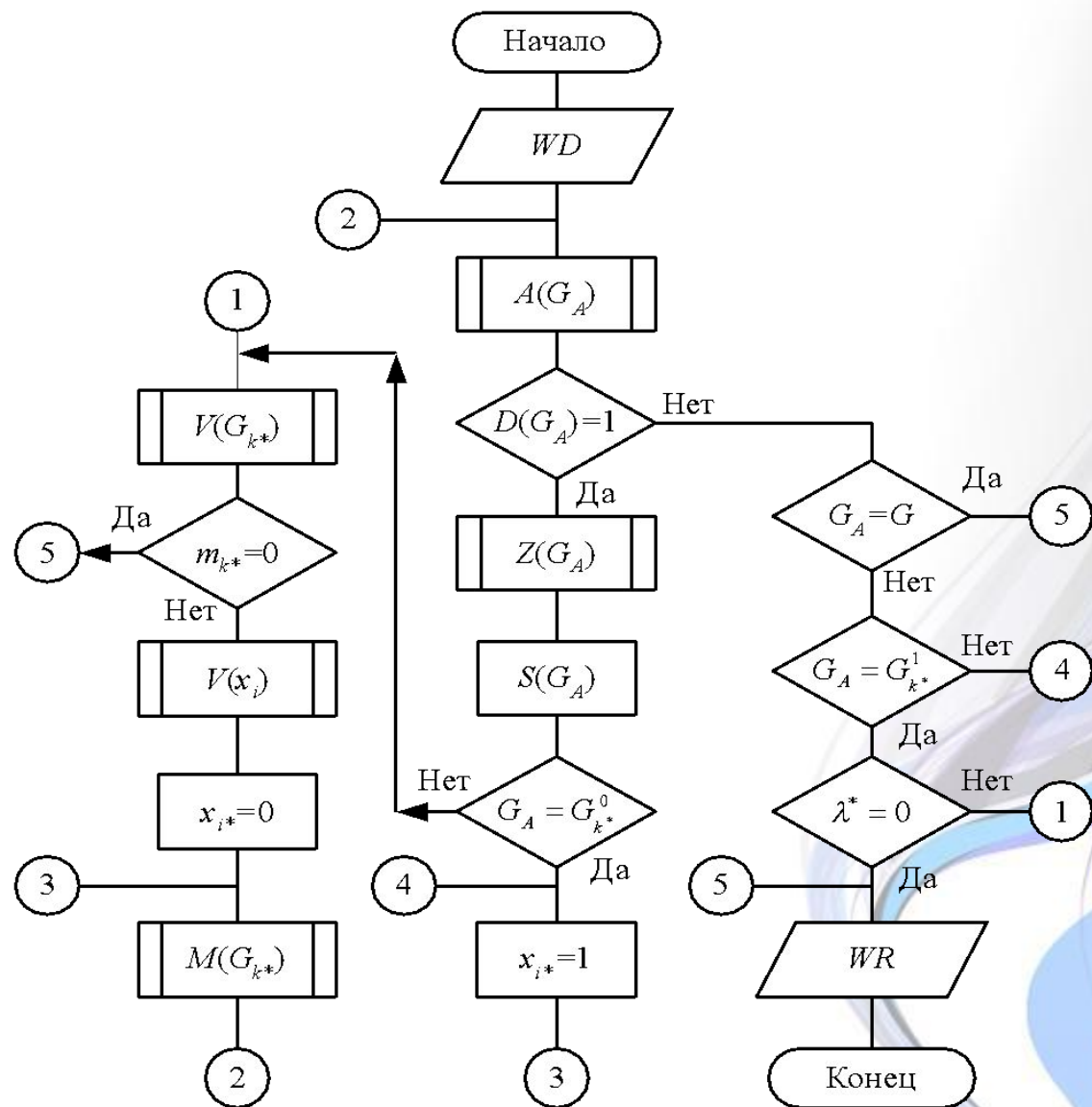
$$(G_{k^*} | x_{i^*} = 0) \Rightarrow G_{k^*}^0;$$

$$(G_{k^*} | x_{i^*} = 1) \Rightarrow G_{k^*}^1.$$

4. Аналіз підмножин $G_{k^*}^0$ та $G_{k^*}^1$.

5. Перевірка допустимих планів на оптимальність:

$$\max \{ f(x); x \in X^* \} \geq \max \left\{ \xi(G_k); \quad k = \overline{1, \lambda^*} \right\};$$
$$x^* = \arg \max \{ f(x); x \in X^* \}.$$



ФУНКЦІЇ БЛОКІВ (1)

WD – ввід вхідних даних;

WR – вивід результатів обчислень;

MDP – фіксація часткових планів та оцінок цільової функції підмножин варіантів;

$A(G_A)$ – аналіз множини варіантів G_A (G , G_k^0 або G_k^1);

$D(G_A)$ – фіксація показника наявності ($D(G_A)=1$) або відсутності ($D(G_A)=0$) припустимих планів в підмножині G_A ;

$Z(G_A)$ – обчислення оцінки цільової функції на G_A ;

ФУНКЦІЇ БЛОКІВ (2)

$S(G_A)$ – занесення оцінки цільової функції та часткового плану даної підмножини варіантів G_A у масив MDP ;

$M(G_{k^*})$ – перетворення математичної модель, що відповідає підмножині G_{k^*} , до виду, адекватному підмножині $G_{k^*}^1$;

$V(G_{k^*})$ – вибір підмножини варіантів для подальшого розбиття;

$V(x_{i^*})$ – вибір незалежної змінної x_{i^*} , $i^* \in I_{k^*}$ для привласнення конкретних значень.

Приклад.

$$f(x) = -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 5x_3 \leq 0 \quad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \quad (2)$$

$$-7x_2 + 8x_5 - 4x_6 \leq -3 \quad (3)$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_7 \leq 2 \quad (4)$$

$$2x_2 - 9x_5 - 7x_7 \leq -5 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, 7}$$

Крок 1.

Розбиття G :

$$G_1 \subset G: \quad x_2 = 0; \quad \xi(G_1) = 4;$$

$$G_2 \subset G: \quad x_2 = 1; \quad \xi(G_2) = 9.$$

Аналіз G_2 :

$$f_2(x) = 5 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max$$

$$-2x_1 - 5x_3 \leq -6 \quad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \quad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq 4 \quad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \leq 4 \quad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -7 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 9.$$

З обмеження (1): $x_1 = x_3 = 1$.

Після підстановки $x_1 = x_3 = 1$:

$$f_2(x) = -4 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max$$

$$7x_4 + 5x_5 \leq 10 \quad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq 4 \quad (3)$$

$$x_7 \leq 0 \quad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -7 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 5, 6, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 0.$$

З обмеження (4): $x_7 = 0$.

Після підстановки $x_7 = 0$:

$$f_2(x) = -4 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$7x_4 + 5x_5 \leq 10 \quad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq 4 \quad (3)$$

$$-9x_5 \leq -7 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 5, 6\}$$

$$\xi(G_2) = 0.$$

З обмеження (5): $x_5 = 1$.

Після підстановки $x_5 = 1$:

$$f_2(x) = -8 + 3x_4 + x_6 \rightarrow \max$$

$$7x_4 \leq 5 \quad (2)$$

$$-4x_6 \leq -4 \quad (3)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 6\}$$

$$\xi(G_2) = -4.$$

З обмеження (2): $x_4 = 0$.

Після підстановки $x_4 = 0$:

$$f_2(x) = -8 + x_6 \rightarrow \max$$

$$-4x_6 \leq -4$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{6\}$$

(3)

$$\xi(G_2) = -7.$$

З обмеження (3): $x_6 = 1$.

Після підстановки $x_6 = 1$:

$$x = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0); \quad \xi(G_2) = f(x) = -7.$$

Аналіз G_1 :

$$f_1(x) = -2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \rightarrow \max$$

$$-2x_1 - 5x_3 \leq 0 \tag{1}$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \tag{2}$$

$$8x_5 - 4x_6 \leq -3 \tag{3}$$

$$4x_1 + x_7 \leq 2 \tag{4}$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -5 \tag{5}$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 4.$$

Обмеження (1) – не активне.

З обмеження (3): $x_6 = 1$.

Після підстановки $x_6 = 1$:

$$f_1(x) = 1 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 6x_7 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \quad (2)$$

$$8x_5 \leq 1 \quad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \leq 2 \quad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \leq -5 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 4.$$

З обмеження (3): $x_5 = 0$.

Після підстановки $x_5 = 0$:

$$f_1(x) = 1 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 6x_7 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 7x_4 \leq 7 \quad (2)$$

$$4x_1 + x_7 \leq 2 \quad (4)$$

$$-7x_7 \leq -5 \quad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 7\}$$

$$\xi(G_2) = 4.$$

З обмеження (5): $x_7 = 1$.

Після підстановки $x_7 = 1$:

$$f_1(x) = -5 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 7x_4 \leq 7 \quad (2)$$

$$4x_1 \leq 1 \quad (4)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4\}$$

$$\xi(G_2) = -2.$$

З обмеження (4): $x_1 = 0$.

Після підстановки $x_1 = 0$:

$$f_1(x) = -5 - 7x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$7x_4 \leq 7$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{3, 4\}$$

(2)

$$\xi(G_2) = -2.$$

Крок 2.

Розбиття G_1 :

$$G_3 \subset G_1: \quad x_4 = 0; \quad \xi(G_3) = -5;$$

$$G_4 \subset G_1: \quad x_4 = 1; \quad \xi(G_4) = -2.$$

Аналіз G_4 :

$$f_4(x) = -2 - 7x_3 \rightarrow \max$$
$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{3\}$$

$$\xi(G_2) = -2.$$

Крок 3.

Розбиття G_4 :

$$G_5 \subset G_4: \quad x_3 = 0; \quad \xi(G_5) = -2;$$

$$G_6 \subset G_4: \quad x_3 = 1; \quad \xi(G_6) = -9.$$



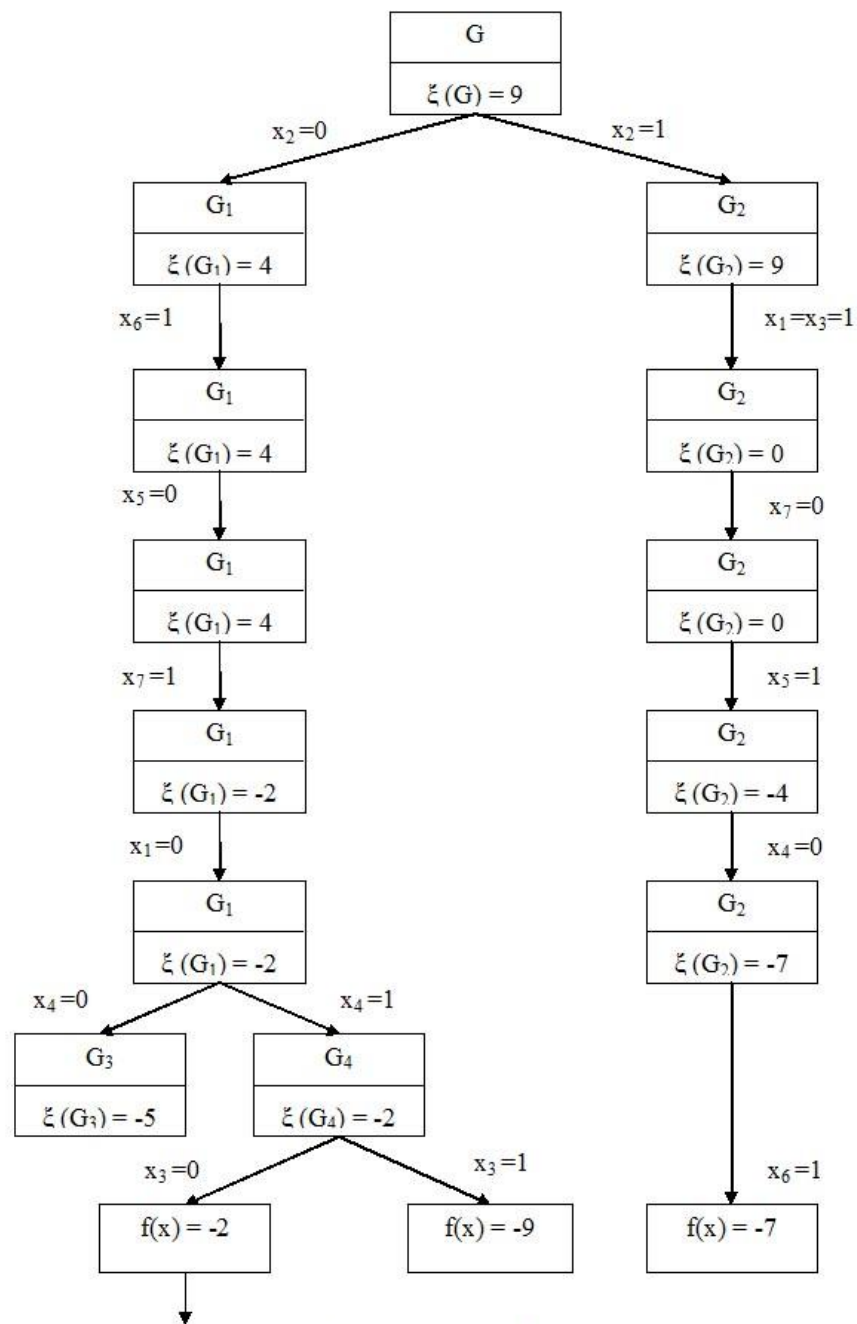
Аналіз G_5 :

$$I_5 = \emptyset.$$

Оптимальний розв'язок:

$$x = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1); \quad \xi(G_5) = f_5(x) = -2.$$



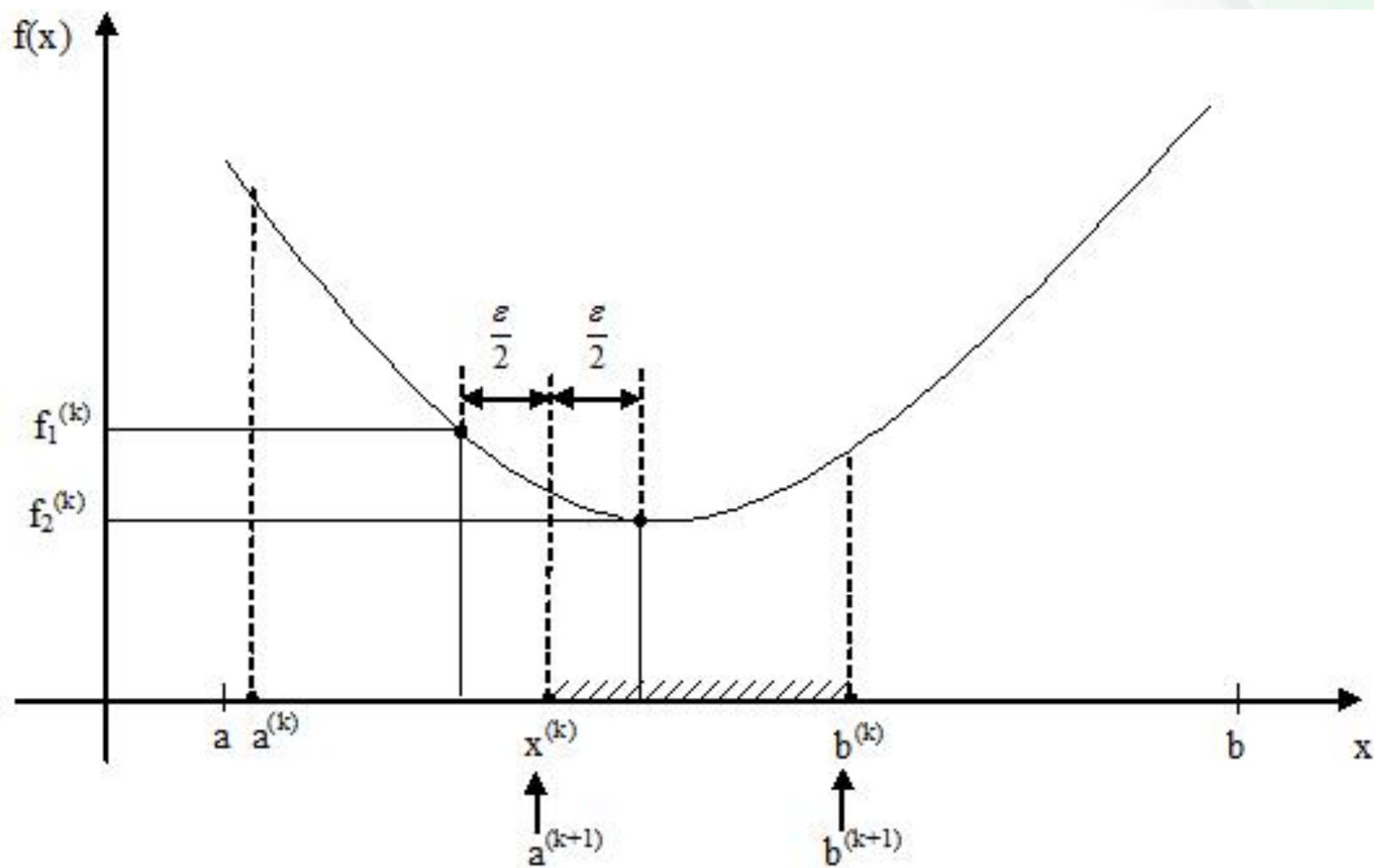


Оптимальное решение $x^* = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$; $f(x^*) = -2$

Тема 4. Методи одномірної оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min ; \quad x \in E^1 ; \quad a \leq x \leq b .$$

4.1 Метод дихотомії



Вихідні дані: $f(x)$; (a, b) ; $\varepsilon \approx 0.01$.

$$a^{(1)} = a; \quad b^{(1)} = b.$$

На k -му кроці:

$$x^{(k)} = \frac{1}{2}[a^{(k)} + b^{(k)}];$$
$$f_1^{(k)} = f\left[x^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2}\right]; \quad f_2^{(k)} = f\left[x^{(k)} + \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Якщо $f_1^{(k)} > f_2^{(k)}$, то $a^{(k+1)} = x^{(k)}$; $b^{(k+1)} = b^{(k)}$.

Якщо $f_1^{(k)} < f_2^{(k)}$, то $a^{(k+1)} = a^{(k)}$; $b^{(k+1)} = x^{(k)}$.

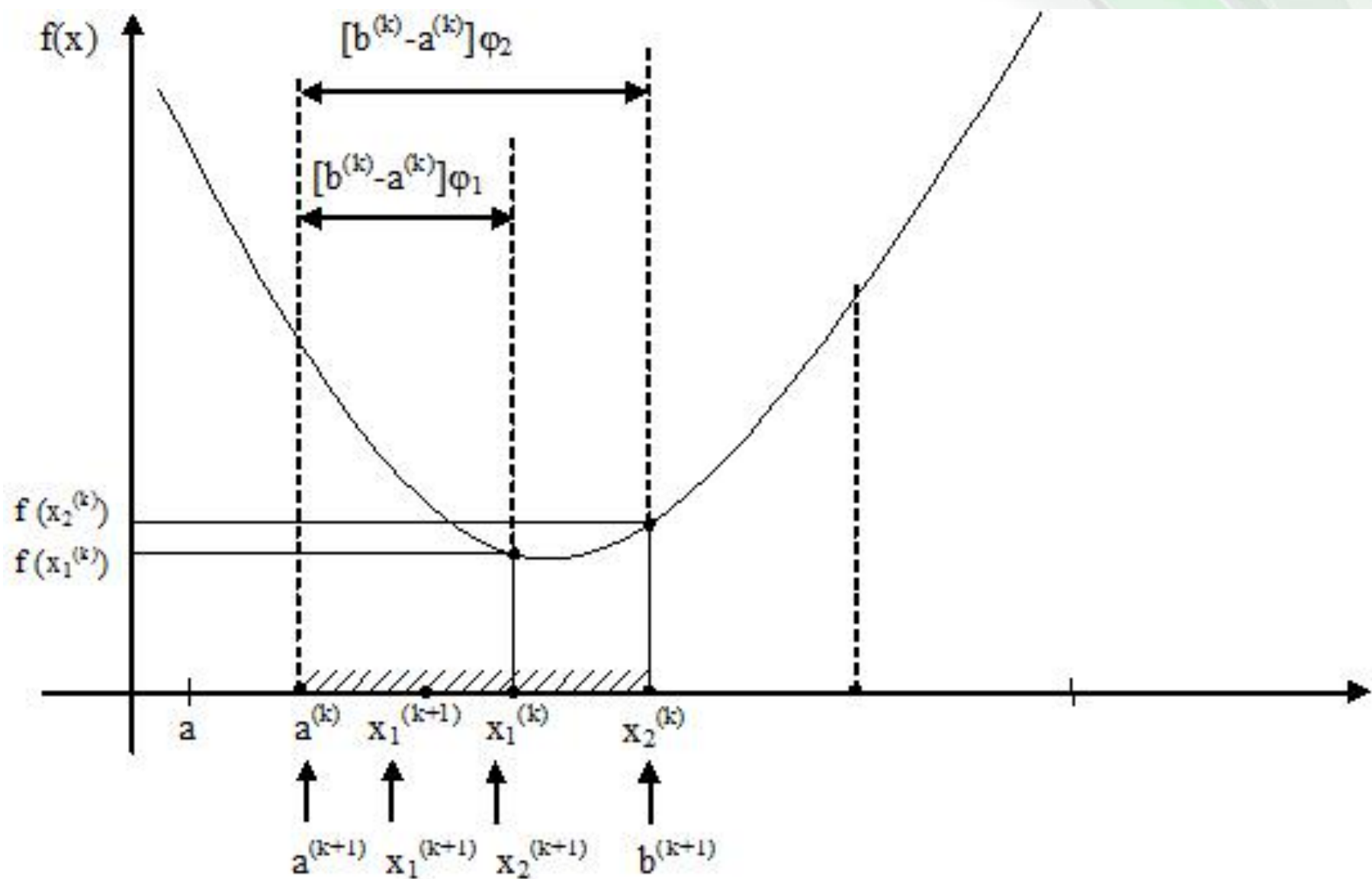
Критерій закінчення пошуку:

$$[b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] < \varepsilon.$$
$$x^* = \frac{1}{2}[a^{(k+1)} + b^{(k+1)}]; \quad f_{\min} = f(x^*).$$

4.2 Метод золотого перетину

$$\varphi_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38; \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1; \quad \varphi_1 = (\varphi_2)^2.$$



Вихідні дані: $f(x)$; (a, b) ; $\varepsilon \approx 0.01$.

$$a^{(1)} = a; \quad b^{(1)} = b.$$

На k -му кроці:

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= a^{(k)} + [b^{(k)} - a^{(k)}] \times \varphi_1; \\x_2^{(k)} &= a^{(k)} + [b^{(k)} - a^{(k)}] \times \varphi_2.\end{aligned}$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$, то:

$$a^{(k+1)} = a^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_1^{(k+1)} = a^{(k+1)} + [b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] \times \varphi_1; \quad x_2^{(k+1)} = x_1^{(k)}.$$

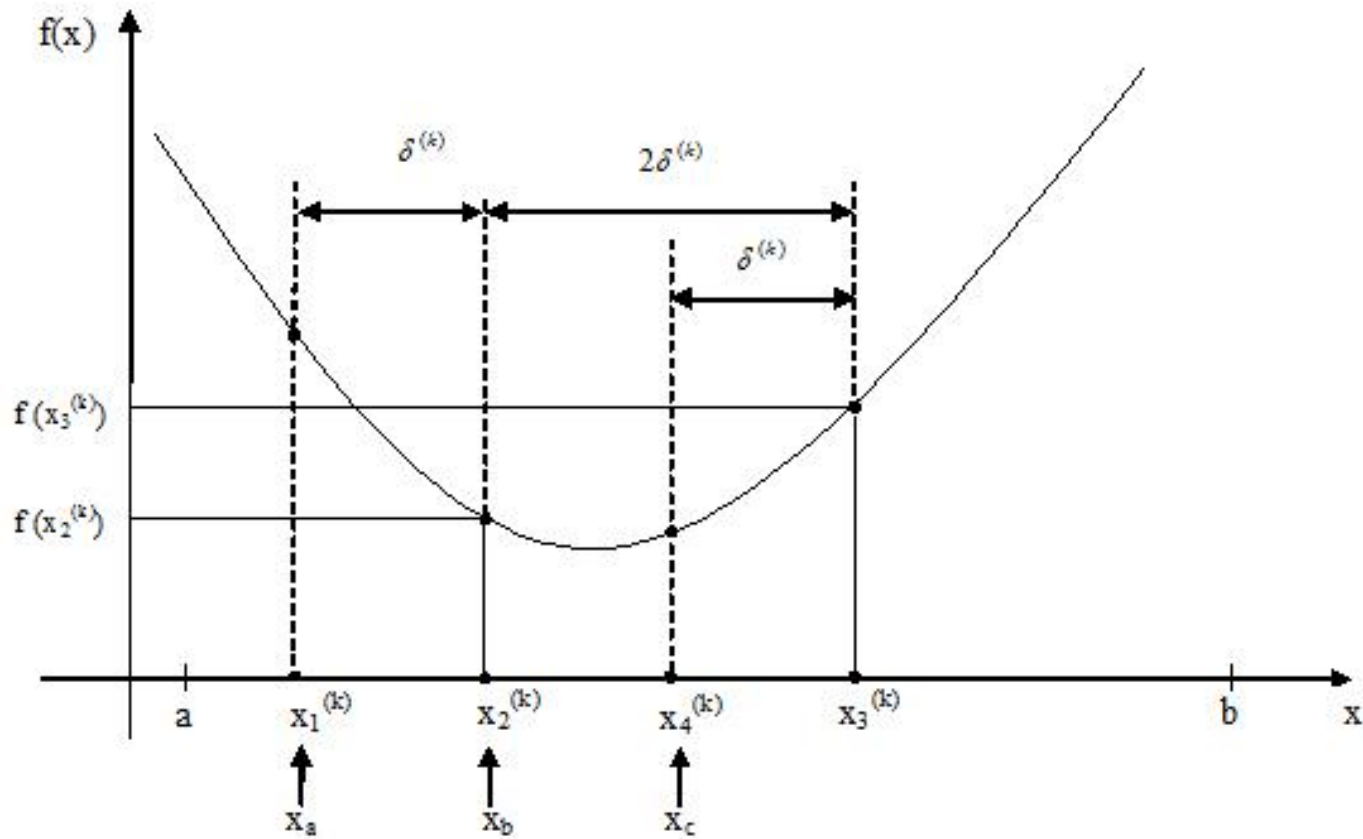
Якщо $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$, то:

$$a^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = b^{(k)}; \quad x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = a^{(k+1)} + [b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] \times \varphi_2.$$

Критерій закінчення пошуку:

$$\begin{aligned}[b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] &< \varepsilon. \\x^* &= \frac{1}{2}[a^{(k+1)} + b^{(k+1)}]; \quad f_{\min} = f(x^*).\end{aligned}$$

4.3 Метод однократної інтерполяції (метод ДСК)



Вихідні дані: $f(x)$; (a, b) ; $x^{(0)} \in (a, b)$; $\delta^{(0)}$; $\gamma \approx 0.001$.

$$x_1^{(k)} = \begin{cases} x^{(0)} & \text{при } k = 1 \\ x_{\min}^{(k-1)} & \text{при } k > 1 \end{cases};$$

$$f(x_{\min}^{(0)}) = f(x^{(0)});$$

$$\delta^{(k)} = \begin{cases} \delta^{(0)} & \text{при } k = 1 \\ \frac{1}{2} \delta^{(k-1)} & \text{при } k > 1 \end{cases}.$$

На k -му кроці ($k \geq 1$):

1. $x_2^{(k)} = x_1^{(k)} + \delta^{(k)}$;

Якщо $f(x_2^{(k)}) \leq f(x_1^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 2.

У противному випадку прийняти $\delta^{(k)} := -\delta^{(k)}$ і повторити пункт 1.

Якщо при повторному виконанні пункту 1 $f(x_2^{(k)}) > f(x_1^{(k)})$, то прийняти $\delta^{(k+1)} = \frac{1}{2}\delta^{(k)}$ і повторити пункт 1.

2. $x_3^{(k)} = x_2^{(k)} + 2\delta^{(k)}$.

Якщо $f(x_3^{(k)}) \leq f(x_2^{(k)})$, то прийняти $\delta^{(k)} := 2\delta^{(k)}$ і $\Rightarrow$ пункт 1.

У противному випадку $\Rightarrow$ пункт 3.

3. $x_4^{(k)} = x_3^{(k)} - \delta^{(k)}$.

Якщо $f(x_4^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 4.

У противному випадку $\Rightarrow$ пункт 5.

4. $x_a = x_1^{(k)}$; $x_b = x_2^{(k)}$; $x_c = x_4^{(k)}$ і $\Rightarrow$ пункт 6.

5. $x_a = x_2^{(k)}$; $x_b = x_4^{(k)}$; $x_c = x_3^{(k)}$.

6. $x_{\min}^{(k)} = x_b - \frac{S_1^{(k)}}{S_2^{(k)}};$

$$S_1^{(k)} = \delta^{(k)}[f(x_a) - f(x_c)];$$
$$S_2^{(k)} = 2[f(x_a) - 2f(x_b) + f(x_c)].$$

7. Якщо $x_{\min}^{(k)} < a$, то $x_{opt} = a$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

Якщо $x_{\min}^{(k)} > b$, то $x_{opt} = b$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

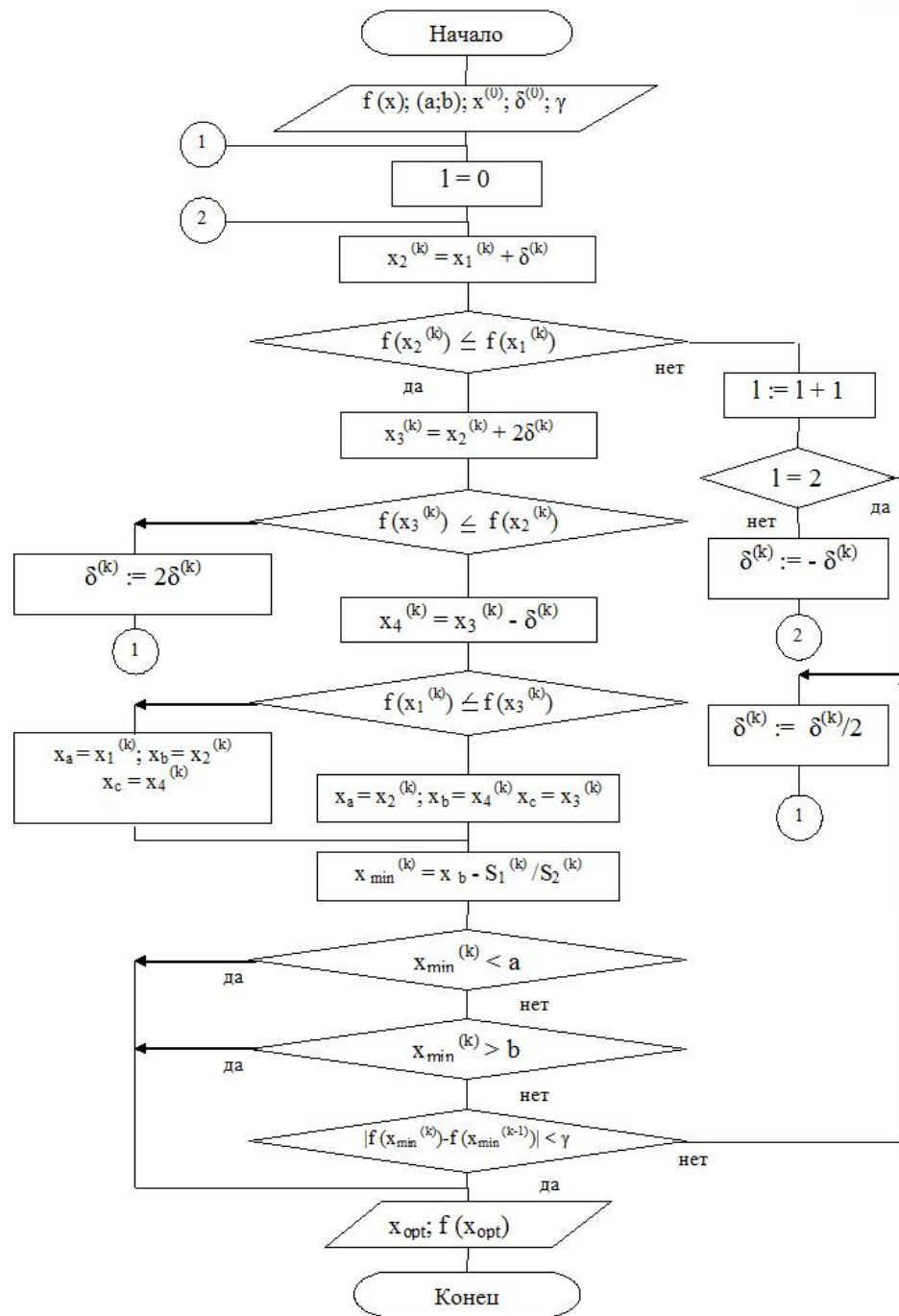
8. Якщо

$$\left| f(x_{\min}^{(k)}) - f(x_{\min}^{(k-1)}) \right| \leq \gamma ,$$

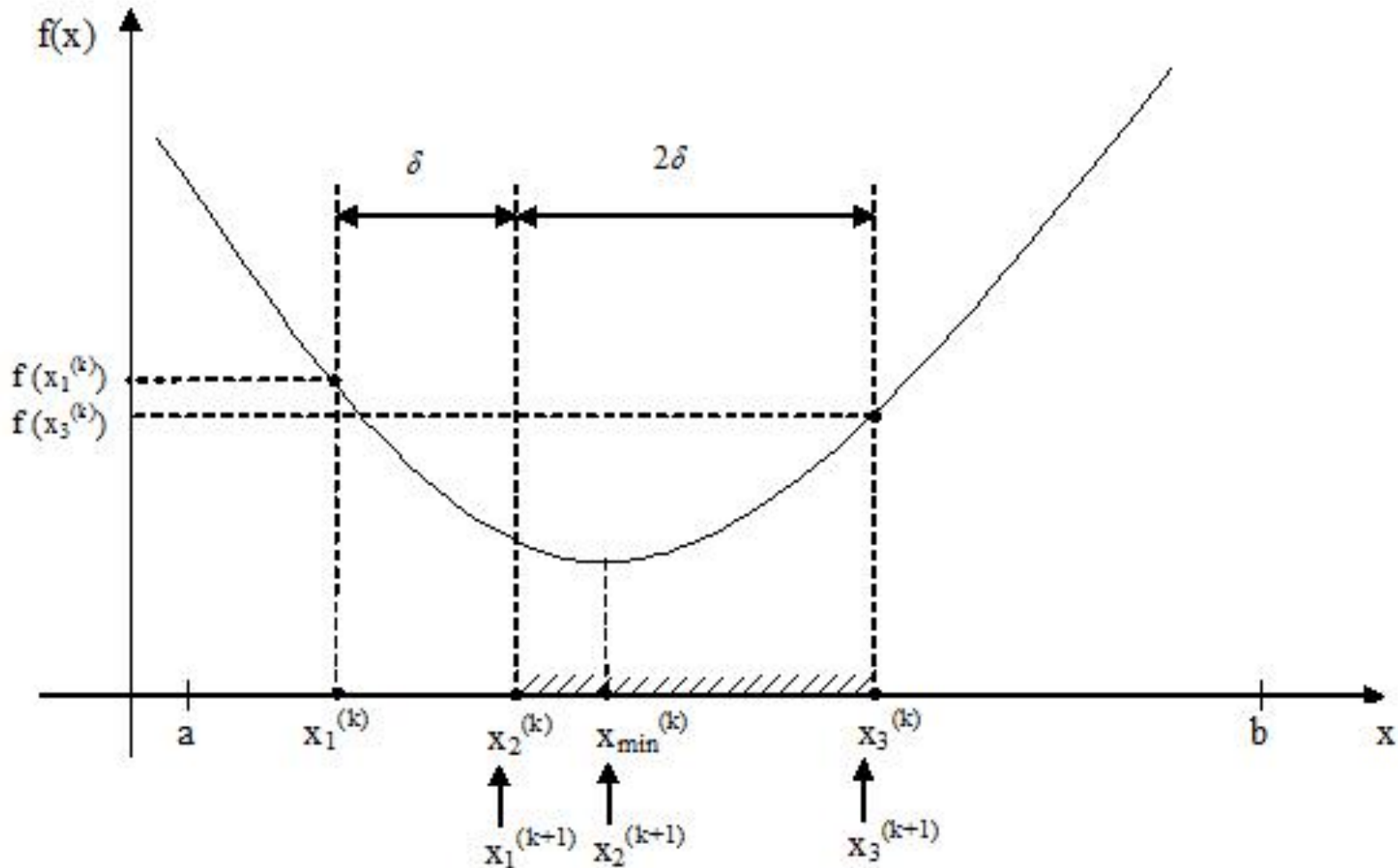
то:

$$x_{opt} \approx x_{\min}^{(k)} ; \quad f_{opt} \approx f(x_{opt}) \quad \text{і} \Rightarrow \text{кінець обчислень.}$$

У протилежному випадку $\Rightarrow (k+1)$ -й крок.



4.4 Метод багаторазової інтерполяції (метод Пауелла)



Вихідні дані: $f(x)$; (a, b) ; $x^{(0)} \in (a, b)$; δ ; $\gamma \approx 0.001$.

Попередній етап:

$$x_1^{(1)} = x^{(0)};$$

$$x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + \delta;$$

$$x_3^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)} + 2\delta, & \text{якщо } f(x_2^{(1)}) < f(x_1^{(1)}) \\ x_1^{(1)} - \delta & \text{в протилежному випадку} \end{cases}.$$

На k -му кроці ($k \geq 1$):

$$1. \ x_{\min}^{(k)} = \frac{S_1^{(k)}}{2 \times S_2^{(k)}};$$

$$\begin{aligned} S_1^{(k)} = & [(x_1^{(k)})^2 - (x_2^{(k)})^2]f(x_3^{(k)}) + \\ & + [(x_2^{(k)})^2 - (x_3^{(k)})^2]f(x_1^{(k)}) + \\ & + [(x_3^{(k)})^2 - (x_1^{(k)})^2]f(x_2^{(k)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^{(k)} = & [x_1^{(k)} - x_2^{(k)}]f(x_3^{(k)}) + \\ & + [x_2^{(k)} - x_3^{(k)}]f(x_1^{(k)}) + \\ & + [x_3^{(k)} - x_1^{(k)}]f(x_2^{(k)}). \end{aligned}$$

2. Якщо $x_{\min}^{(k)} < a$, то $x_{opt} = a$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

Якщо $x_{\min}^{(k)} > b$, то $x_{opt} = b$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

3. Якщо

$$\left| f(x_{\min}^{(k)}) - f(x_{\min}^{(k-1)}) \right| \leq \gamma ,$$

то:

$$x_{opt} \approx x_{\min}^{(k)} ; \quad f_{opt} \approx f(x_{opt}) \quad \text{і} \Rightarrow \text{кінець обчислень.}$$

4. Якщо $f(x_1^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$ і $x_{\min}^{(k)} < x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_2^{(k)}.$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$, але $x_{\min}^{(k)} \geq x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}.$$

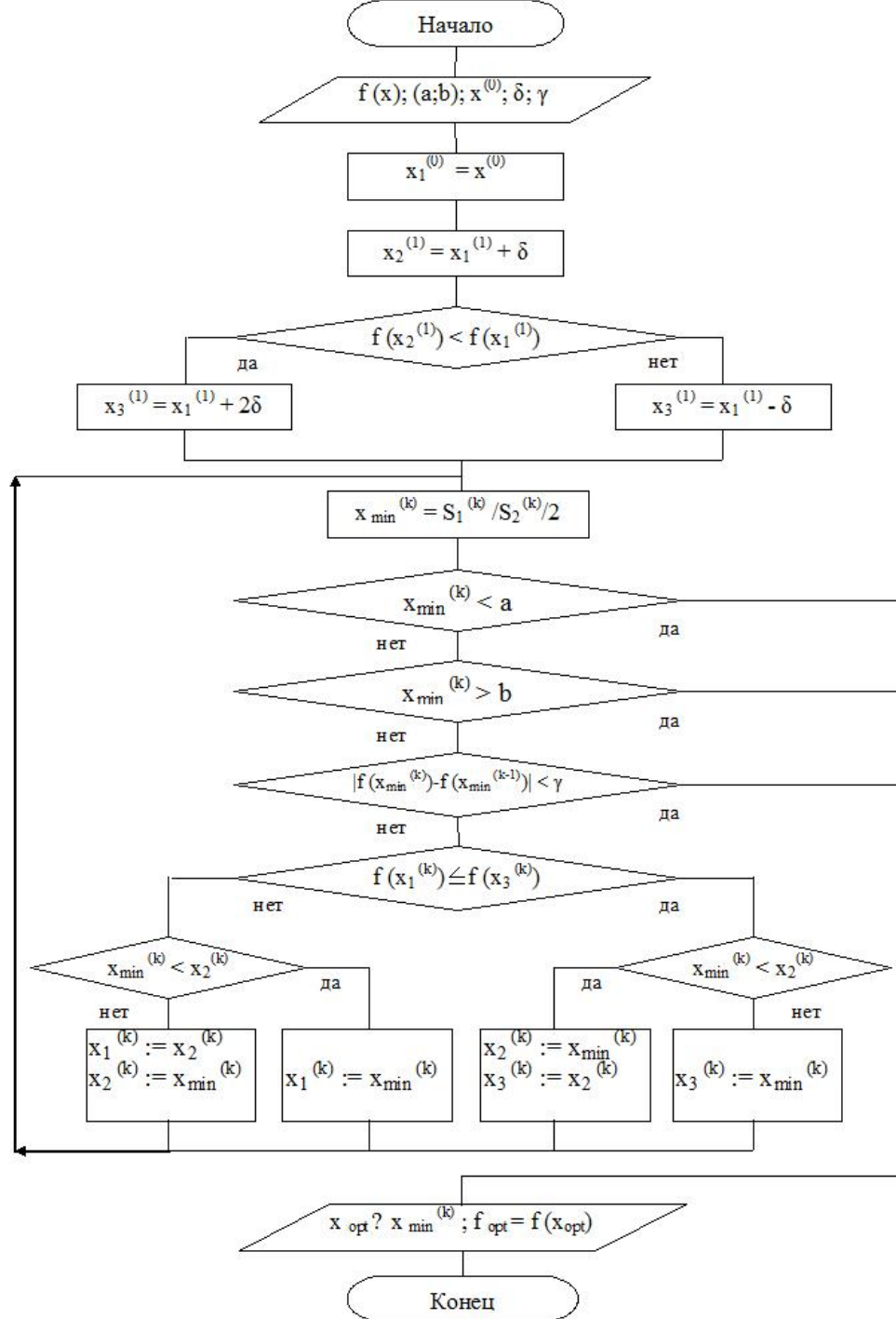
Якщо $f(x_1^{(k)}) > f(x_3^{(k)})$ і $x_{\min}^{(k)} < x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)}.$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) > f(x_3^{(k)})$, але $x_{\min}^{(k)} \geq x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)}.$$

$\Rightarrow (k+1)$ -й крок.



Тема 5. МЕТОДИ БАГАТОМІРНОЇ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

$$f(x) \rightarrow \min ; \quad x \in E^n$$

5.1 Градієнтний метод (найшвидшого спуску)

$$x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)}$$

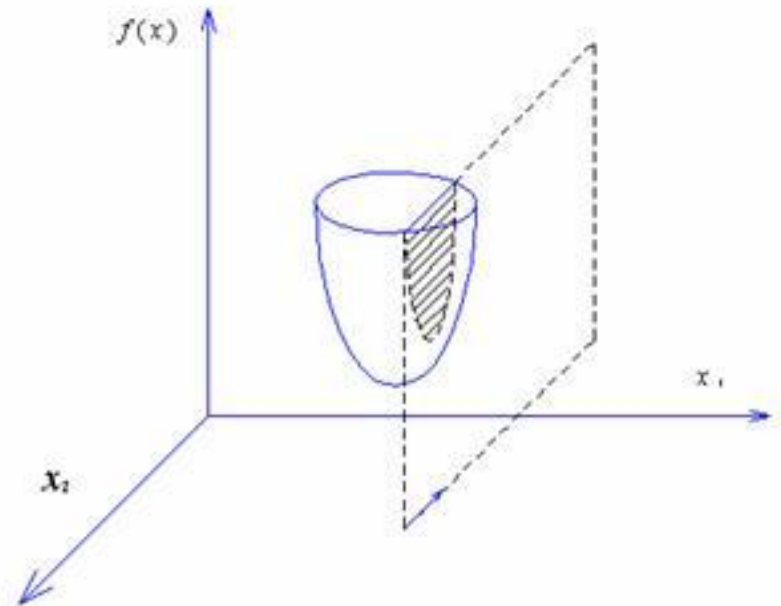
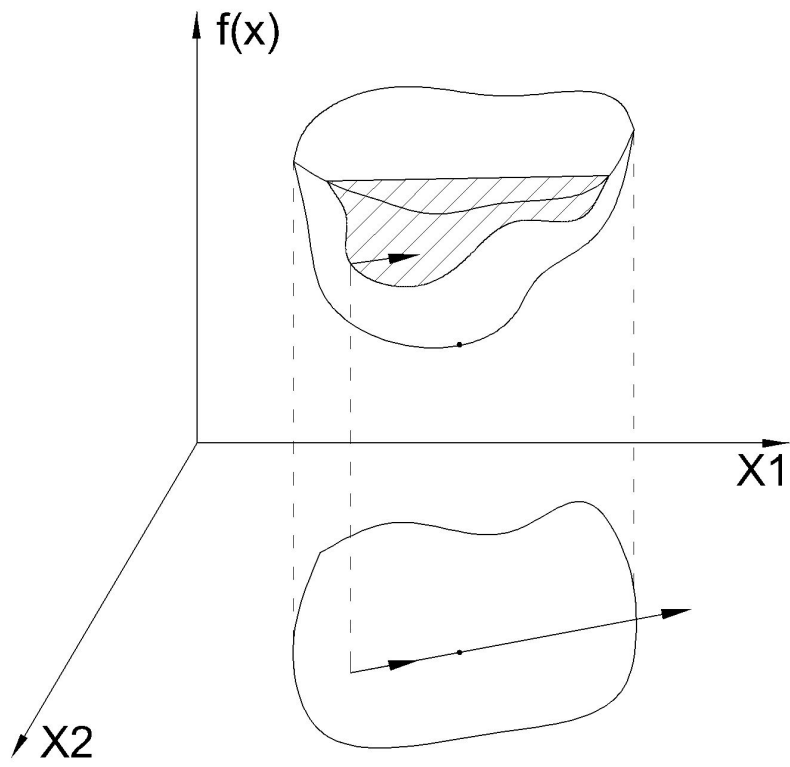
На k -му кроці:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)};$$

$$\Delta x^{(k)} = \lambda^{(k)} \times e^{(k)};$$

$$e^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|\nabla f(x^{(k)})\|};$$

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i} \right]^2}.$$



Вибір довжини кроку:

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} + \lambda \times e^{(k)}) \rightarrow \min .$$

Завершення процесу:

$$\left| \nabla f(x^{(k+1)}) \right| \leq \gamma .$$

Приклад

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$

$$x^{(k)} = (1, 2)$$

$$f(1, 2) = 2 + 3 \times 4 - 4 - 5 \times 2 = 2 + 12 - 4 - 10 = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \times e^{(k)}$$

$$e^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|\nabla f(x^{(k)})\|}$$

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i} \right]^2}$$

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 6x_2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 4 \\ 12 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| = \sqrt{0^2 + 7^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$e_1^{(k)} = -\frac{0}{7} = 0 \quad e_2^{(k)} = -\frac{7}{7} = -1$$

$$x_1^{(k)} = 1 + \lambda \times 0 = 1 \quad x_2^{(k)} = 2 + \lambda \times (-1) = 2 - \lambda$$

$$\varphi(\lambda) = 2 + 3(2 - \lambda)^2 - 4 - 5(2 - \lambda) = 3\lambda^2 - 7\lambda \rightarrow \min$$

$$\lambda = \frac{7}{6}$$

$$x_1^{(k+1)} = 1 + \lambda \times 0 = 1 \quad x_2^{(k+1)} = 2 + \lambda \times (-1) = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$$

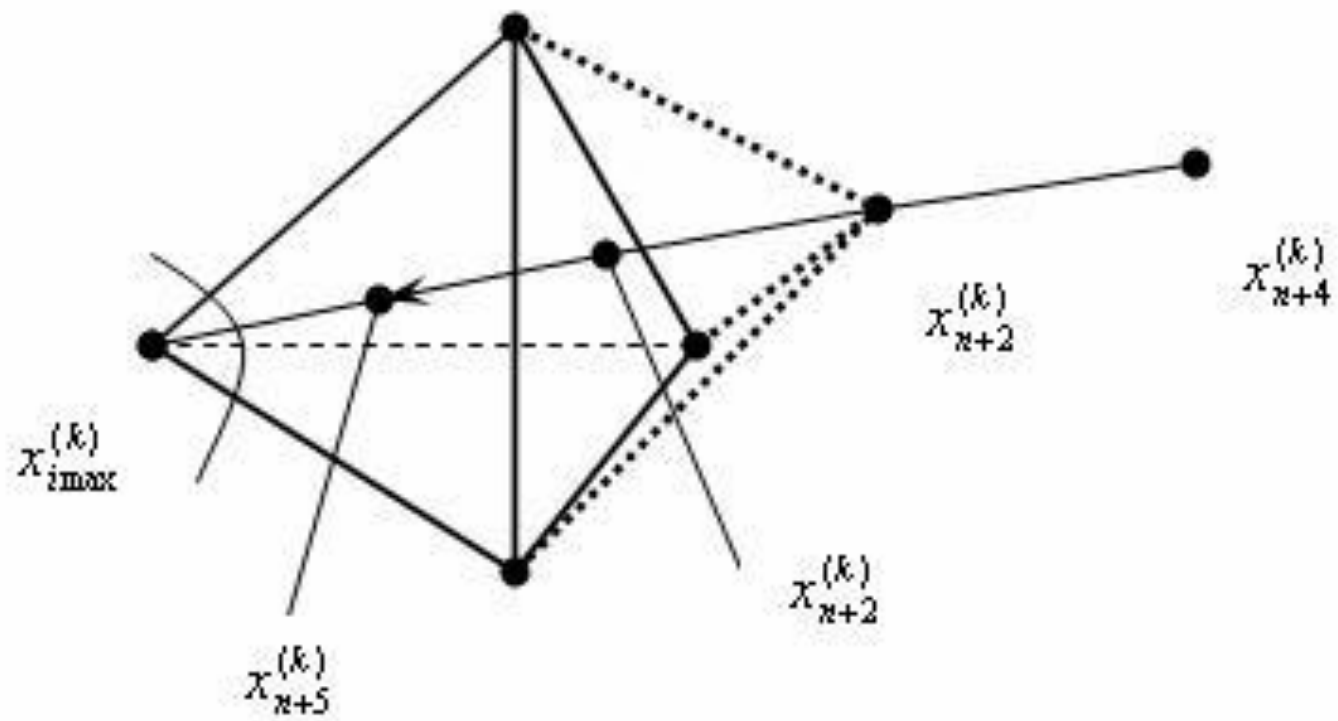
$$f(1, \frac{5}{6}) = 2 + 3 \times \left(\frac{25}{36}\right) - 4 - 5 \times \left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{147}{36} = -4\frac{1}{12}$$

5.2 Метод пошуку по багатограннику, що деформується

Симплекс в E^n .

Вершини симплексу:

$$\{x_i \mid i = \overline{1, n+1}\};$$
$$x_i = (x_{ij}; j = \overline{1, n}).$$



Визначення координат вершин симплексу:

$$x_1 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ d_2 & d_1 & d_2 & \dots & d_2 \\ d_2 & d_2 & d_1 & \dots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_2 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 \end{bmatrix} \quad (n+1) \times n$$

$$d_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1);$$

$$d_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1).$$

$$x_{ij} = x_{1j} + \begin{cases} d_1, \text{ якщо } j = i - 1 \\ d_2 \text{ в протилежному випадку;} \end{cases} \quad i = \overline{2, n+1}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Позначення

Вершини багатогранника:

$$x_i^{(k)} = (x_{ij}^{(k)} \mid j = \overline{1, n}); \quad i = \overline{1, n+1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Значення цільової функції в вершинах:

$$f(x_i^{(k)}); \quad i = \overline{1, n+1}.$$

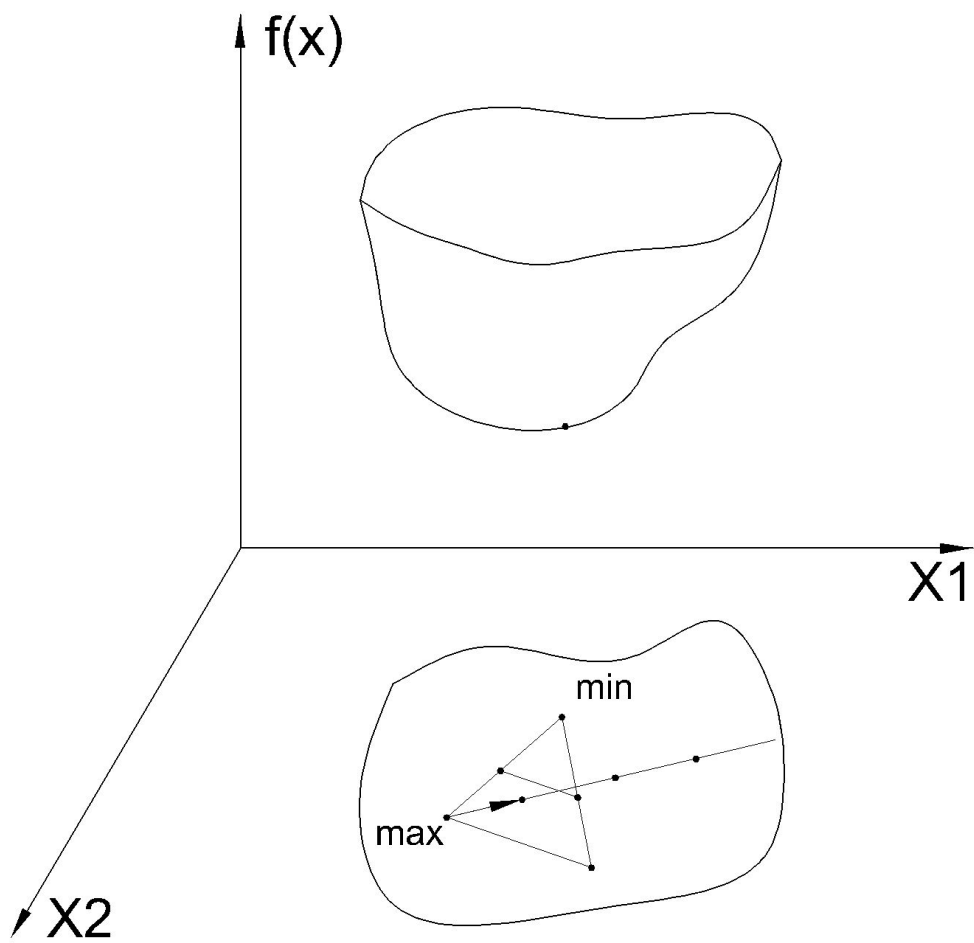
$$x_{i_{\min}}^{(k)} = \arg \min \{f(x_i^{(k)}); i = \overline{1, n+1}\};$$

$$x_{i_{\max}}^{(k)} = \arg \max \{f(x_i^{(k)}); i = \overline{1, n+1}\}.$$

$x_{n+2}^{(k)}$ – центр тяжіння вершин багатогранника, за виключенням $x_{i_{\max}}^{(k)}$.

Координати центра тяжіння:

$$x_{n+2, j}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)} \right) - x_{i_{\max}, j}^{(k)} \right]; \quad j = \overline{1, n}.$$



Алгоритм

Операції на k -му кроці:

1. Визначення $x_{i_{\min}}^{(k)}$ та $x_{i_{\max}}^{(k)}$.
2. Обчислення координат центра тяжіння $x_{n+2}^{(k)}$.
3. Якщо

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [f(x_i^{(k)}) - f(x_{n+2}^{(k)})]^2 \right\}^{1/2} \leq \varepsilon, \text{ то } \Rightarrow \text{кінець обчислень.}$$

3. Відображення:

$$x_{n+3}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \alpha(x_{n+2}^{(k)} - x_{i_{\max}}^{(k)}); \quad \alpha \approx 1.$$

Якщо $f(x_{n+3}^{(k)}) \leq f(x_{i_{\min}}^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 4.

В протилежному випадку $\Rightarrow$ пункт 7.

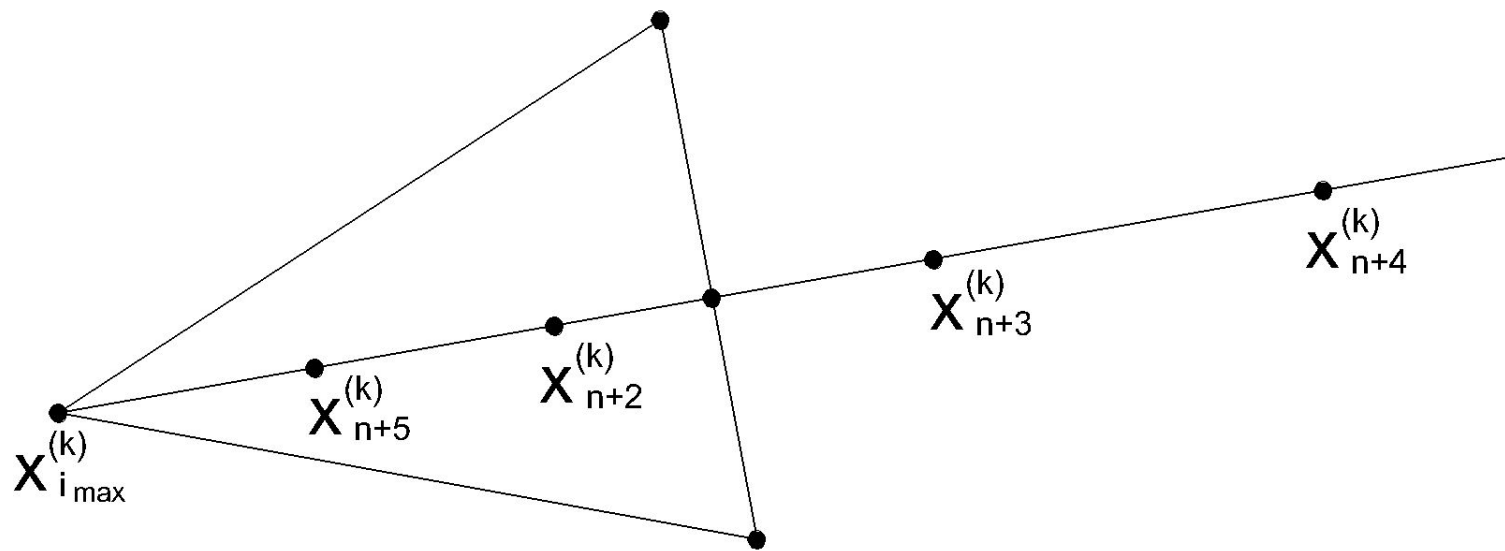
4. Розтягнення:

$$x_{n+4}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \gamma(x_{n+3}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}); \quad 2 \leq \gamma \leq 3.$$

Якщо $f(x_{n+4}^{(k)}) \leq f(x_{i_{\min}}^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 5.

В протилежному випадку $\Rightarrow$ пункт 6.

5. Заміна вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на $x_{n+4}^{(k)}$ та $k := k + 1$
6. Заміна вершини $x_{i_{\min}}^{(k)}$ на $x_{n+3}^{(k)}$ та $k := k + 1$



7. Якщо

$$f(x_{n+3}^{(k)}) \leq f(x_{i_{\max}}^{(k)}),$$

то $\Rightarrow$ пункт 8.

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 10.

8. Стиснення:

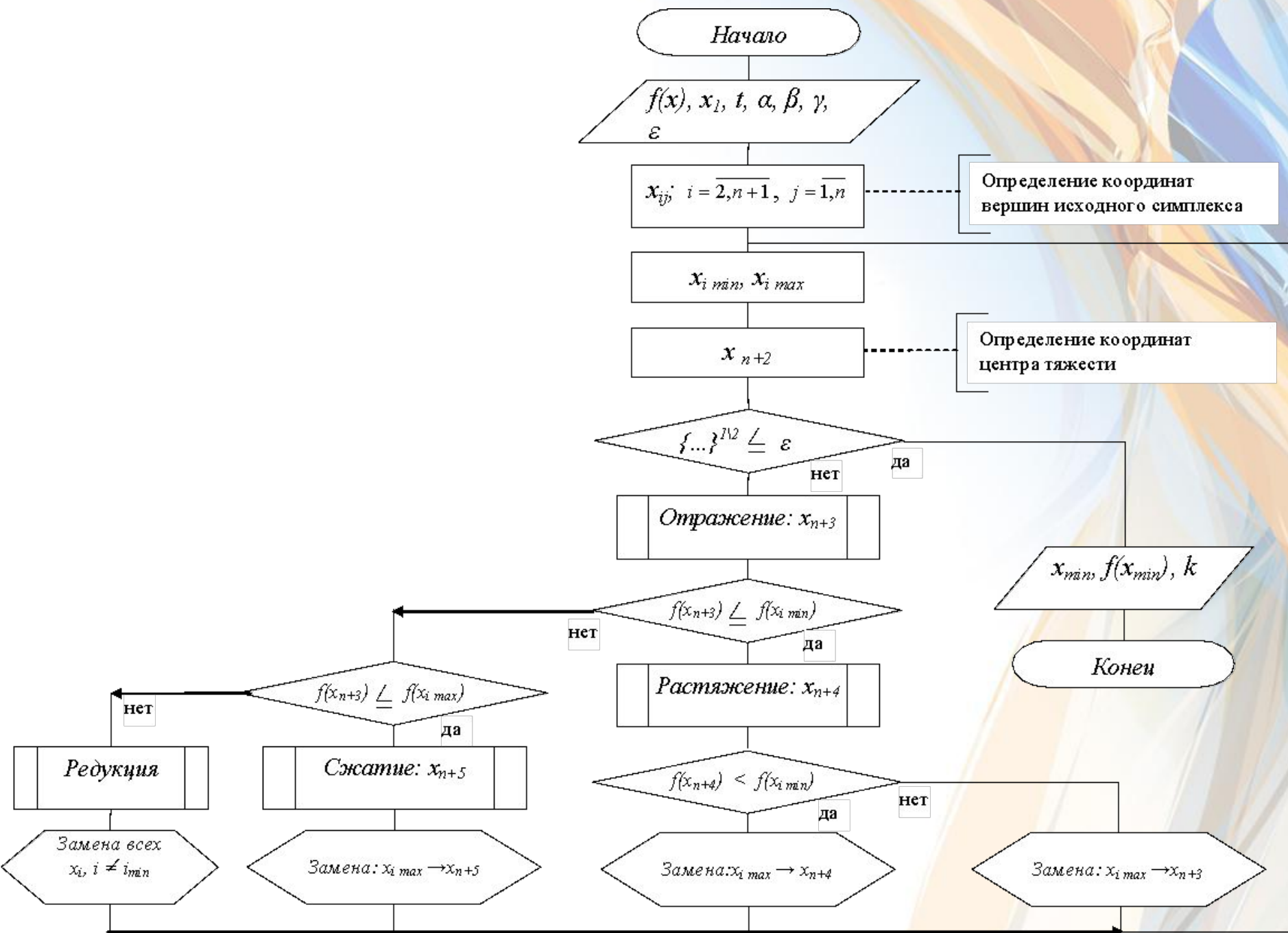
$$x_{n+5}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \beta(x_{i_{\max}}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}); \quad 0,4 \leq \beta \leq 0,6.$$

9. Заміна вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на $x_{n+5}^{(k)}$ та $k := k + 1$.

10. Редукція:

$$x_i^{(k)} = x_{i_{\min}}^{(k)} + \frac{1}{2}(x_i^{(k)} - x_{i_{\min}}^{(k)}); \quad i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_{\min}\}.$$

Далі $k := k + 1$.



Тема 6. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h_i(x) &= 0; \quad i = \overline{1, m}; \\ g_i(x) &\geq 0; \quad i = \overline{m+1, p}; \\ x &\in E^n; \quad x = (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

6.1 Метод лінійної апроксимації

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x^{(k)}) &= f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) \rightarrow \min \\ \tilde{h}_i(x^{(k)}) &= h_i(x^{(k)}) + \nabla^T h_i(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) = 0; \quad i = \overline{1, m}; \\ \tilde{g}_i(x^{(k)}) &= g_i(x^{(k)}) + \nabla^T g_i(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) \geq 0; \quad i = \overline{m+1, p}; \\ x^{(k)} &\in E^n; \quad x \in E^n.\end{aligned}$$

$$x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)} \dots \rightarrow x_{opt}$$

Умови збіжності:

- 1) $R \neq \emptyset$;
- 2) всі функції $f(x)$; $h_i(x)$, $i = \overline{1, m}$; $g_i(x)$, $i = \overline{m+1, p}$ неперервні та диференціюємі;
- 3) функція $f(x)$ опукла;
- 4) сума $\sum_{i=1}^m h_i^2(x)$ опукла;
- 5) всі функції $g_i(x)$; $i = \overline{m+1, p}$ увігнуті;
- 6) множина R замкнена та опукла;
- 7) всі функції $h_i(x)$, $i = \overline{1, m}$; $g_i(x)$, $i = \overline{m+1, p}$ обмежені:
 $|h_i(x)| \leq \delta$; $g_i(x) \leq \delta$, де $\delta > 0$.

Перетворення обмежень-нерівностей в рівняння:

$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) - u_i^{(k)} = 0 ; \quad u_i^{(k)} \geq 0 ; \quad i = \overline{m+1, p} .$$

Наближення точки $x^{(k)}$ до ОДР:

$$\varphi(v^{(k)}) = \sum_{i=1}^p v_i^{(k)} \rightarrow \min$$

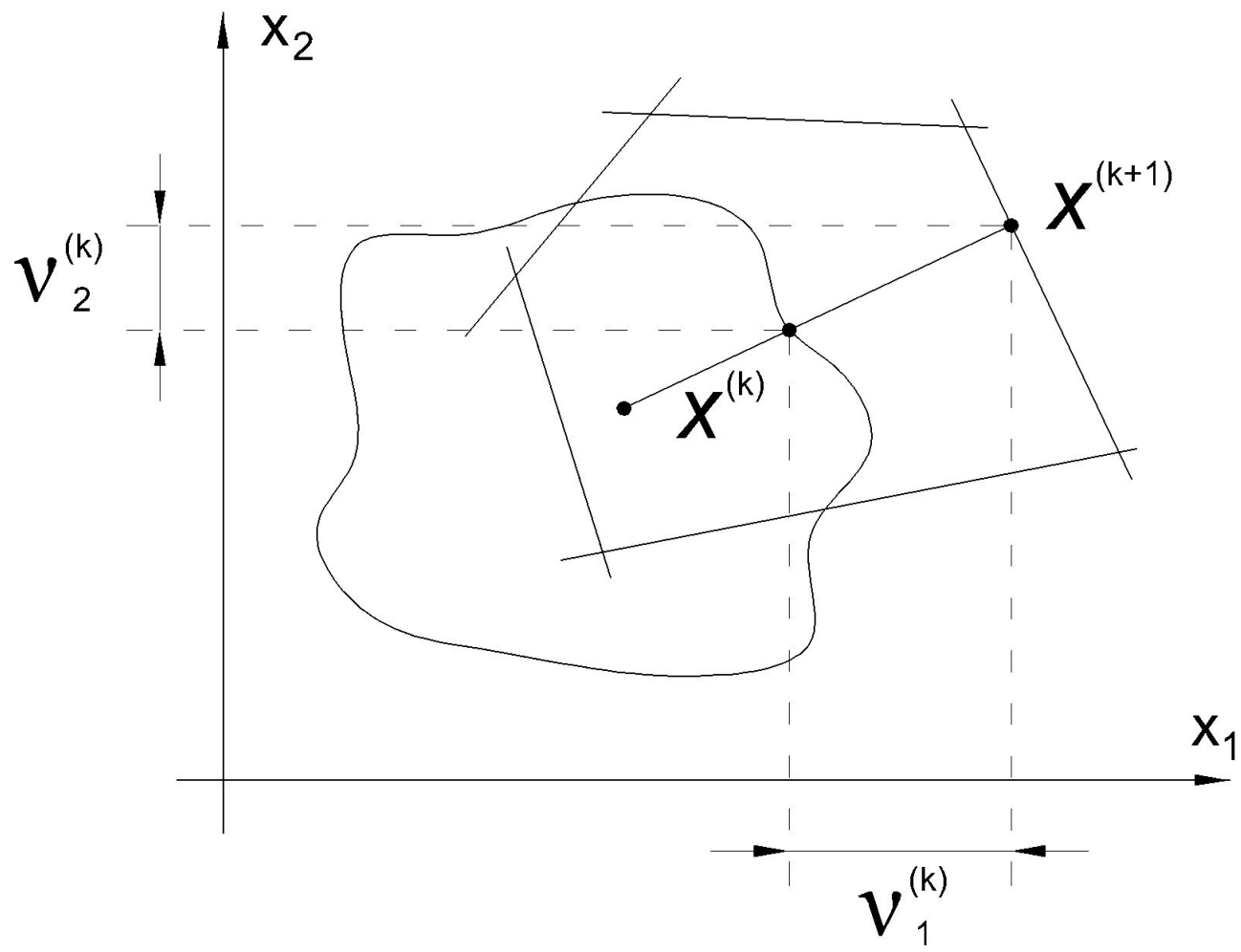
$$\tilde{h}_i(x^{(k)}) + v_i^{(k)} = 0 ; \quad i = \overline{1, m} ;$$

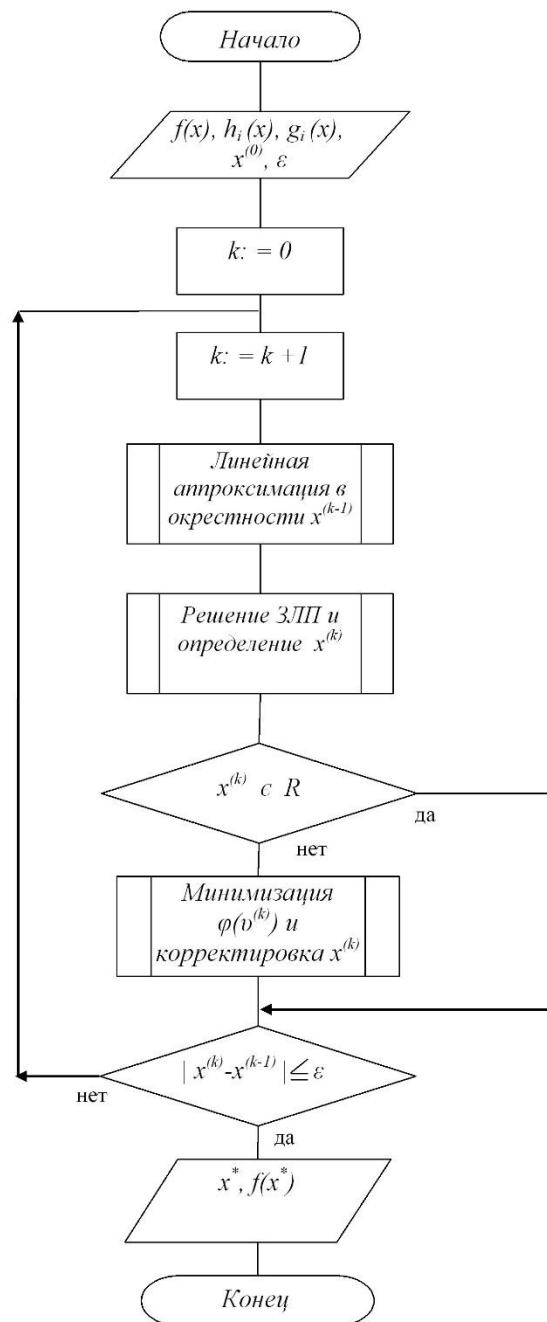
$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) - u_i^{(k)} + v_i^{(k)} = 0 ; \quad i = \overline{m+1, p} ;$$

$$v_i^{(k)} \geq 0 ; \quad i = \overline{1, p} .$$

Ознака завершення обчислень:

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon .$$





6.2 Метод штрафних функцій

Вихідна модель:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h_i(x) &= 0; \quad i = \overline{1, m}; \\ g_i(x) &\geq 0; \quad i = \overline{m+1, p}; \\ x &\in E^n; \quad x = (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Перетворена модель:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^m w_i H[h_i(x)] + \sum_{i=m+1}^p w_i G[g_i(x)] \rightarrow \min \\ w_i &\geq 0; \quad i = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Вимоги до функціоналів H :

якщо $h_i(x) \rightarrow 0$, то $H[h_i(x)] \rightarrow 0$.

Вимоги до функціоналів G :

якщо $g_i(x) \geq 0$, то $G[g_i(x)] \approx 0$;

якщо $g_i(x) < 0$, то $G[g_i(x)] > 0$;

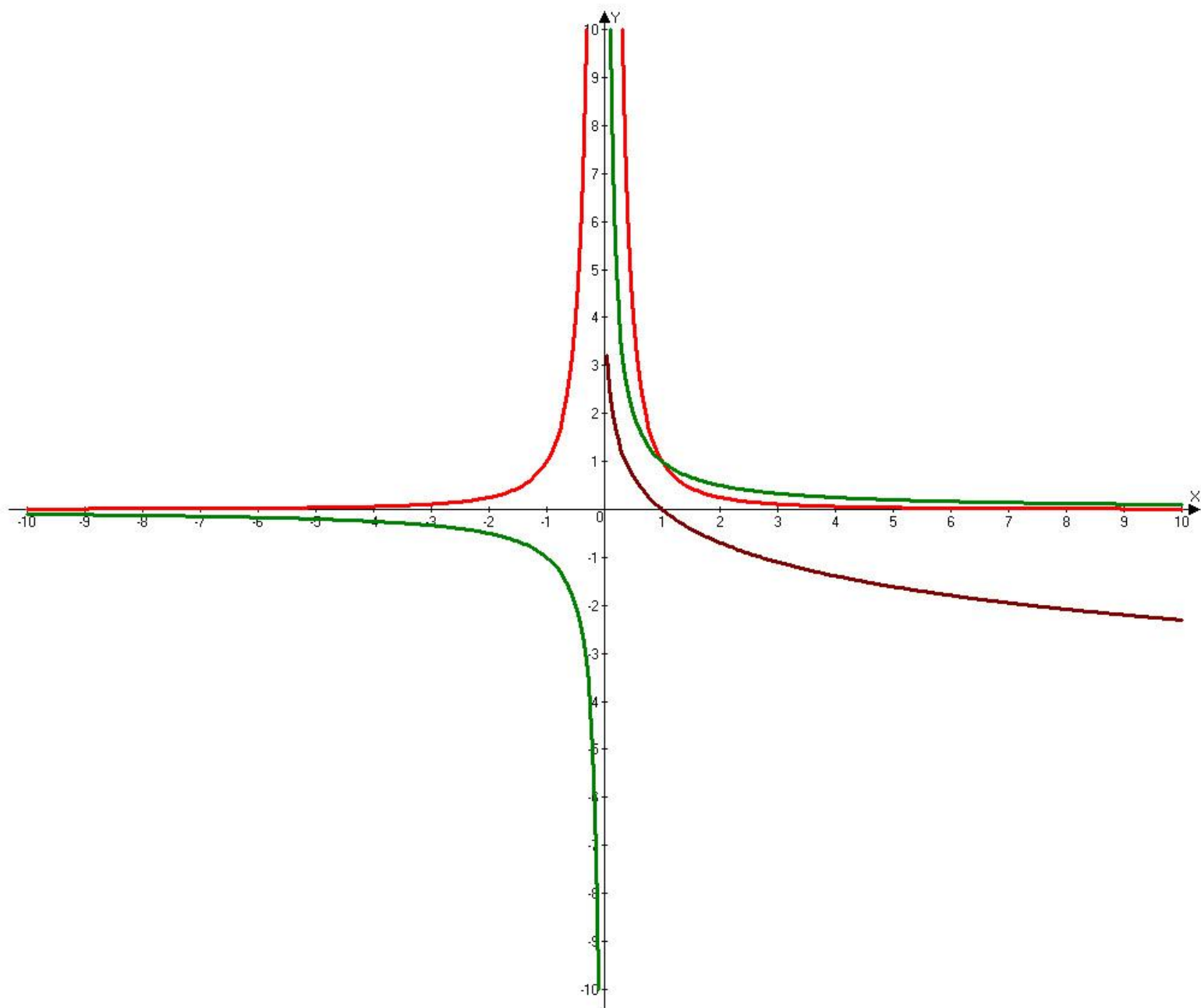
якщо $g_i(x) \rightarrow 0^{(+)}$, то $G[g_i(x)] \rightarrow \infty$;

якщо $g_i(x) \rightarrow 0^{(-)}$, то $G[g_i(x)] \rightarrow 0$.

Приклади

$$H[h_i(x)] = h_i^2(x);$$

$$G[g_i(x)] = \frac{1}{g_i(x)}; \quad G[g_i(x)] = \frac{1}{g_i^2(x)}; \quad G[g_i(x)] = \ln \frac{1}{g_i(x)}.$$



6.3 Метод ковзного допуску

Вихідна модель:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ h_l(x) &= 0; \quad l = \overline{1, m}; \\ g_l(x) &\geq 0; \quad l = \overline{m+1, p}; \\ x &\in E^n; \quad x = (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Перетворена модель:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ \Phi^{(k)} - T(x) &\geq 0; \\ x &\in E^n; \quad x = (x_j; j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

$$\Phi^{(0)} = 2(m+1)t;$$

$$\Phi^{(k)} = \min\{\Phi^{(k-1)}; \Theta^{(k)}\}; \quad k=1, 2, 3, \dots;$$

$$\Theta^{(k)} = \frac{m+1}{r+1} \left\{ \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n [x_{ij}^{(k)} - x_{r+2,j}^{(k)}]^2 \right\}^{1/2}; \quad r=n-m;$$

$x_i^{(k)}$ и $x_{r+2}^{(k)}$ – вершина та центр тяжіння багатогранника в E^n з $(r+1)$ вершинами;

$$T(x) = + \left[\sum_{l=1}^m h_l^2(x) + \sum_{l=m+1}^p u_l g_l^2(x) \right]^{1/2};$$

$$u_l = \begin{cases} 0 & \text{при } g_l(x) \geq 0 \\ 1 & \text{при } g_l(x) < 0 \end{cases}.$$

$$\Phi^{(0)} \geq \Phi^{(1)} \geq \dots \geq \Phi^{(k)} \geq 0;$$

Якщо $x \in R$, то $T(x) = 0$.

Якщо $x \notin R$, то $T(x) > 0$.

Вектор $x_i^{(k)}$ називається:

- допустимим, якщо $T(x^{(k)}) = 0$;
- квазидопустимим, якщо $0 < T(x^{(k)}) \leq \Phi^{(k)}$;
- недопустимим, якщо $T(x^{(k)}) > \Phi^{(k)}$.

СТРАТЕГІЯ МЕТОДУ

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)} \dots \rightarrow x_{opt}$$

Із стартової точки $x^{(k)}$ розв'язується основна задача:
$$f(x) \rightarrow \min$$

та визначається точка $x^{(k+1)}$.

Якщо $T(x^{(k+1)}) \leq \Phi^{(k)}$, то здійснюється переміщення з $x^{(k)}$ в $x^{(k+1)}$.

Якщо $T(x^{(k+1)}) > \Phi^{(k)}$, то замість $x^{(k+1)}$ відшукується інша точка $\bar{x}^{(k+1)}$: допустима або квазидопустима.

Для цього зі стартової точки $x^{(k+1)}$ розв'язується допоміжна задача:

$$T(x) \rightarrow \min.$$

Умова завершення допоміжної процедури:

$$T(\bar{x}^{(k+1)}) \leq \Phi^{(k)}.$$

Після цього: $x^{(k)} \rightarrow \bar{x}^{(k+1)}$.

Нульовий крок пошуку:

1°. В E^n будується симплекс (f -симплекс) з $(r+1)$ вершинами, призначений для мінімізації $f(x)$.

Початкова вершина $x_1^{(0)} = (x_j^{(0)} \mid j = \overline{1, n})$ задається.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = \min \left\{ \left[\frac{0,2}{n} \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \right]; (b_j - a_j), j = \overline{1, n} \right\},$$

де $a_j \leq x_j \leq b_j; \quad j = \overline{1, n}$.

2°. Визначається вершина

$$x_{i_{\min}}^{(0)} = \arg \min \{f(x_i^{(0)}); j = \overline{1, n}\}.$$

3°. Якщо

$$\Phi^{(0)} - T(x_{i_{\min}}^{(0)}) \geq 0, \text{ то } \Rightarrow \text{ пункт 4}^\circ.$$

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 6°.

4°. Виконується один цикл безумовної мінімізації $f(x)$ методом пошуку по деформуємому багатограннику.

5°. Виконується заміна:

- або точки $x_{i_{\max}}^{(0)}$ на одну з точок: $x_{r+3}^{(0)}$, $x_{r+4}^{(0)}$ чи $x_{r+4}^{(0)}$;
- або всіх точок, крім $x_{i_{\min}}^{(0)}$ (після операції редукції).

На цьому нульовий крок завершується.

6°. Якщо

$$\Phi^{(0)} - T(x_{i_{\min}}^{(0)}) < 0 ,$$

то в E^n будується другий симплекс (T -симплекс) з $(n+1)$ вершинами, призначений для мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(0)}$.

Початкова вершина $\hat{x}_1^{(0)} = x_{i_{\min}}^{(0)}$.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = 0,05\Phi^{(0)} .$$

7°. Реалізується процедура безумовної мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(0)}$ методом пошуку по деформуємому багатограннику.

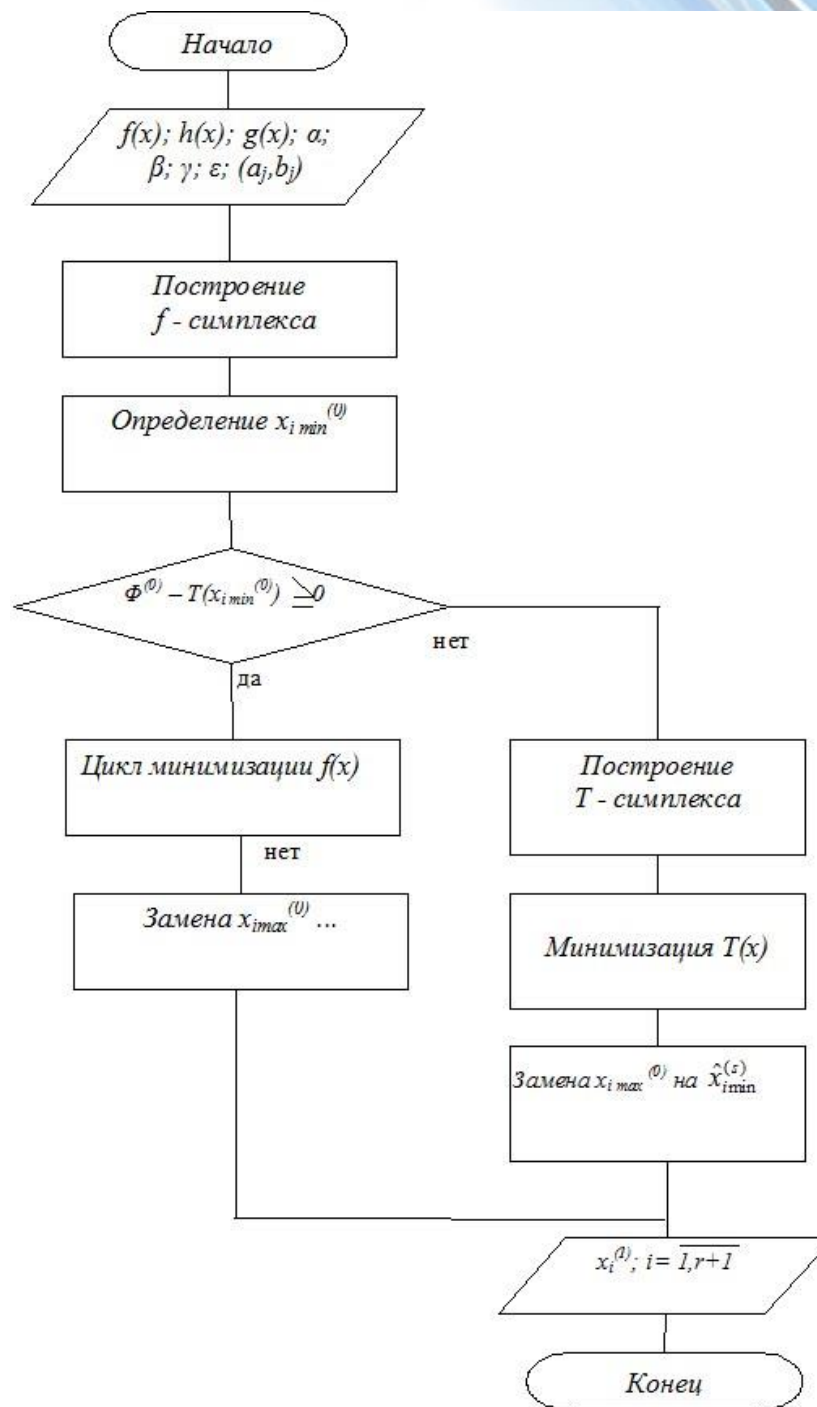
Процедура завершується знаходженням точки $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$, яка задовольняє умові допустимості/квазидопустимості:

$$\Phi^{(0)} - T(\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}) \geq 0 ,$$

де s – кількість реалізованих кроків алгоритму.

8°. Проводиться заміна: точка $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$ вводиться у склад вершин f -багатогранника замість вершини $x_{i_{\max}}^{(0)}$.

На цьому нульовий крок завершується.



k -й крок пошуку

1. Проводиться один цикл безумовної мінімізації $f(x)$ з використанням f -багатогранника, побудованого на нульовому кроці.

2. Визначається вершина

$$x_{i_{\min}}^{(k)} = \arg \min \{f(x_i^{(k)}); j = \overline{1, n}\}.$$

3. Якщо

$$\Phi^{(k)} - T(x_{i_{\min}}^{(k)}) \geq 0, \quad \text{то} \Rightarrow \text{пункт 4.}$$

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 6.

4. Перевіряється умова закінчення пошуку:

$$\Phi^{(k)} \leq \varepsilon.$$

Якщо вона виконується, то обчислювальний процес завершується.

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 5.

5. Проводиться заміна:

– або точки $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на одну з точок: $x_{r+3}^{(k)}$, $x_{r+4}^{(k)}$ чи $x_{r+4}^{(k)}$;

– або всіх точок, крім $x_{i_{\min}}^{(k)}$ (після операції редукції).

Далі $k := k + 1$.

6. Якщо

$$\Phi^{(k)} - T(x_{i_{\min}}^{(k)}) < 0,$$

то в E^n будується новий симплекс (T -симплекс) з $(n+1)$ вершинами, призначений для мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(k)}$.

Початкова вершина $\hat{x}_1^{(0)} = x_{i_{\min}}^{(k)}$.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = 0,05 \Phi^{(k)}.$$

7. Реалізується процедура безумовної мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(k)}$.

Процедура завершується знаходженням точки $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$, яка задовольняє умові допустимості/квазидопустимості:

$$\Phi^{(k)} - T(\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}) \geq 0.$$

8. Проводиться заміна: точка $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$ вводиться в склад вершин f -багатогранника замість вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$.

Далі $k := k + 1$.

Рекомендовані параметри:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0,5; \quad \gamma = 2; \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

