

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



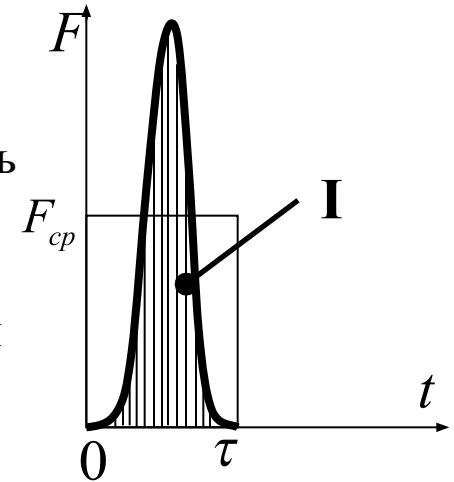
ЛЕКЦИЯ 10: ТЕОРИЯ ИМПУЛЬСИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

1. Ударные силы и импульсы

Явление удара вызывается силами большой величины, действующими на систему в течение столь малого промежутка времени τ , что точки системы не успевают переместиться сколь-нибудь заметным образом. Такие силы называют **ударными**. Движение системы под действием ударных сил называют **импульсивным** движением. При аналитическом представлении импульсивного движения промежуток времени τ , в течение которого оно происходит, считается бесконечно малым, ударная сила – бесконечно большой, а ее импульс (ударный импульс) – конечной величиной.

$$\mathbf{I} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}(t) dt$$

Так как точки системы во все время удара τ имеют конечные скорости, то при $\tau \rightarrow 0$ их перемещениями можно пренебречь и характеризовать импульсивные движения векторами скоростей точек в моменты, предшествующий и следующий за ударом. Эти скорости называются **скоростью до удара** $\mathbf{v}^-$ и **скоростью после удара** $\mathbf{v}^+$



2. АКСИОМЫ

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k \quad \longrightarrow \quad \int_0^{\tau} \mathbf{F}_k dt \quad \longrightarrow \quad m_k (\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-) = \mathbf{I}_k$$

ВХОДЯТ ТОЛЬКО ударные силы!

Основное соотношение теории импульсивных движений (заменяет 2-й 3-н Ньютона)

Другие аксиомы теории импульсивных движений аналогичны обычным аксиомам динамики:

- 1) ударные импульсы, сообщаемые друг другу двумя материальными точками, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны;
- 2) два ударных импульса, приложенных к точке, складываются по правилу параллелограмма;
- 3) полный ударный импульс для каждой точки системы складывается из ударных импульсов активных сил и ударных импульсов реакций связей.

3. Задачи теории импульсивного движения

Цель исследования импульсивного движения состоит в определении кинематического состояния системы после удара, если известно ее состояние до удара.

При этом различают две **основные задачи**:

- 1) по заданным ударным импульсам определить изменение скоростей точек системы;
 - 2) по заданному изменению скоростей точек системы определить ударные импульсы.
- Иногда требуется также определить ударные импульсы реакций связей.

4. Главный вектор и главный момент ударных импульсов

$$m_k (\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-) = \mathbf{I}_k^e + \mathbf{I}_k^i, \quad k = 1, \dots, n$$

внешние импульсы внутренние импульсы

Главный вектор ударных импульсов

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k^e + \cancel{\sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k^i} = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k^e$$

Главный момент ударных импульсов

$$\mathbf{L}_O = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{I}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{I}_k^e$$

5. Теорема об изменении количества движения

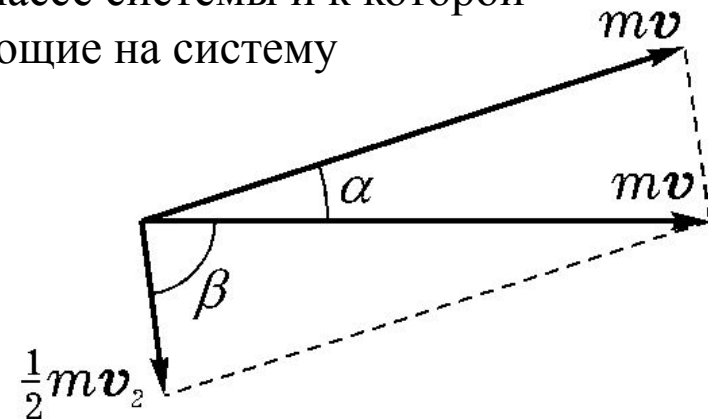
$$\underline{Q^+ - Q^-} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^+ - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^- = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k^e = \underline{\mathbf{S}}$$

изменение количества движения системы при ударе равно главному вектору внешних ударных импульсов

$$Q = M\mathbf{v}_C \Rightarrow \boxed{M(\mathbf{v}_C^+ - \mathbf{v}_C^-) = \mathbf{S}}$$

импульсивное движение центра инерции системы происходит так же, как импульсивное движение материальной точки, масса которой равна массе системы и к которой приложены все внешние ударные импульсы, действующие на систему

Пример. Снаряд, летевший со скоростью v , разорвался в воздухе на два осколка равных масс. Скорость первого осколка направлена под углом α к направлению первоначального движения и имеет величину $2v$. Найти скорость второго осколка



$$\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \boxed{v_2 = 4v \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}$$

6. Теорема об изменении кинетического момента

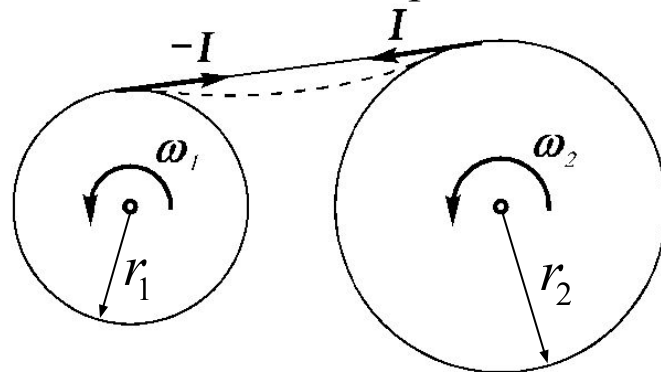
A- произвольный центр $\mathbf{r}_k$ - Радиус вектор k-ой точки относительно A

$$\mathbf{K}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{K}_A^+ - \mathbf{K}_A^- = \mathbf{L}_A$$

изменение кинетического момента системы относительно любого центра равно главному моменту внешних ударных импульсов относительно этого центра

Пример. Два шкива вращаются вокруг параллельных осей. На них намотана ненатянутая лента. В некоторый момент лента натягивается, вследствие чего происходит удар. Требуется определить послеударные угловые скорости Ω_1 и Ω_2 шкивов и величину I ударного импульса силы натяжения ленты, считая, что после удара лента остается натянутой. Моменты инерции шкивов относительно их осей вращения равны J_1 и J_2



ТИКМ для 1-го шкива

$$J_1 (\Omega_1 - \omega_1) = -I r_1$$

ТИКМ для 2-го шкива

$$J_2 (\Omega_2 - \omega_2) = I r_2$$

натянута лента

$$\Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2$$

$$\frac{\Omega_1}{r_2} = \frac{\Omega_2}{r_1} = \frac{J_1 r_2 \omega_1 + J_2 r_1 \omega_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

$$I = \frac{J_1 J_2 (r_1 \omega_1 - r_2 \omega_2)}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

7. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема. Изменение кинетической энергии при импульсивном движении равно сумме скалярных произведений каждого ударного импульса на полусумму скоростей точки его приложения непосредственно перед ударом и после него:

$$T^+ - T^- = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k^e \cdot \frac{\mathbf{v}_k^- + \mathbf{v}_k^+}{2} + \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k^i \cdot \frac{\mathbf{v}_k^- + \mathbf{v}_k^+}{2}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2$$



Доказательство

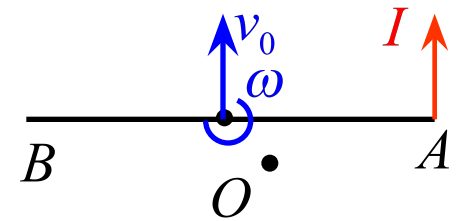
$$m_k (\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-) = \mathbf{I}_k \quad | \cdot (\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-)$$

$$m_k \left((v_k^+)^2 - (v_k^-)^2 \right) = \mathbf{I}_k \cdot (\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-) \quad | \sum$$

$$2(T^+ - T^-) = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k \cdot (\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-)$$

8. ТИКЭ: пример 1

Находящемуся в покое однородному стержню массы m и длины l ударом по одному из его концов сообщен импульс I в перпендикулярном к стержню направлении. Найти изменение КИ



1-й способ

$$\left. \begin{array}{l} \text{ТИКД} \quad mv_0 = I \\ \text{ТИКМ} \quad K_O = \frac{1}{12} ml^2 \omega = I \frac{l}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_0 = I/m \\ \omega = \frac{6I}{ml} \end{array}$$

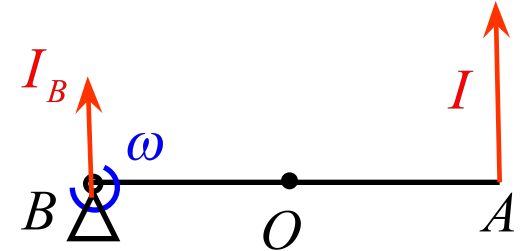
$$\Rightarrow T = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = 2 \frac{I^2}{m}$$

2-й способ

$$T^+ = \frac{Iv_A}{2} = \frac{I}{2} \left(v_O + \frac{\omega l}{2} \right) = \frac{I}{2} \cdot 4 \frac{I}{m} = 2 \frac{I^2}{m}$$

9. ТИКЭ: пример 2

То же самое, что в предыдущем примере если один из концов стержня шарнирно закреплен



ТИКМ $K_B = \frac{1}{3}ml^2\omega = I \cdot l \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3I}{ml}$

$$T^+ = \frac{Iv_A}{2} = \frac{I}{2}\omega l = \frac{I}{2} \cdot 3 \frac{I}{m} = \frac{3I^2}{2m}$$

ударный импульс шарнира B

$$\left. \begin{aligned} mv_0 &= I + I_B \\ mv_0 &= m \frac{l}{2} \omega = \frac{3}{2} I \end{aligned} \right\} I_B = \frac{I}{2}$$

10. Удар по свободному твердому телу

Задача об импульсивном движении свободного твердого тела сводится к нахождению изменения в результате удара скорости центра масс и угловой скорости вращения относительно центра масс.

Примем за начало координат центр масс, оси направим вдоль главных осей инерции

Заданы $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z), \quad \mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z), \quad A, B, C$

Найти $\boldsymbol{\omega}_C^+ - \boldsymbol{\omega}_C^- = (v_x, v_y, v_z), \quad \begin{matrix} + & - \\ \end{matrix} = (p, q, r)$

$$m(\mathbf{v}_C^+ - \mathbf{v}_C^-) = \mathbf{S} \quad \mathbf{K}^+ - \mathbf{K}^- = \mathbf{L} \quad \mathbf{K}^+ - \mathbf{K}^- = (Ap, Bq, Cr)$$

$$v_x = \frac{S_x}{m}, \quad v_y = \frac{S_y}{m}, \quad v_z = \frac{S_z}{m}, \quad p = \frac{L_x}{A}, \quad q = \frac{L_y}{B}, \quad r = \frac{L_z}{C}$$

Если тело совершает плоское движение, например, параллельно плоскости Oxy , то из шести соотношений остаются только три:

$$v_x = \frac{S_x}{m}, \quad v_y = \frac{S_y}{m}, \quad r = \frac{L_z}{C}$$

11. Пример 1

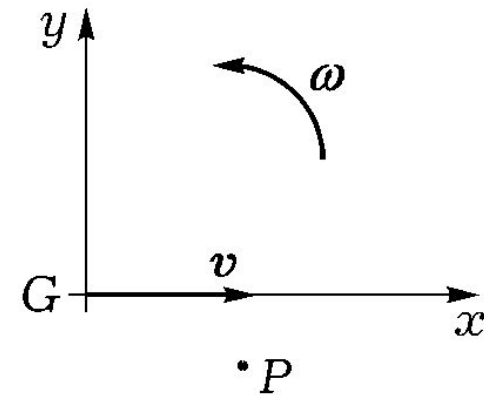
Пример 1. Твердое тело, имеющее форму пластинки, совершает произвольное движение в своей плоскости. Точку P пластинки внезапно останавливают (шарнирно закрепляют). Где должна находиться точка P , чтобы пластинка остановилась?

G – центр масс

(S_x, S_y) компоненты ударного импульса, возникающего при закреплении точки $P = (x, y)$

$$v_x = v_x^+ - v_x^- = -v, \quad v_y = 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_x = -mv, \quad S_y = 0$$

$$L_z = xS_y - yS_x = mvu \quad r = -\omega \quad \Rightarrow \quad x - \text{произвольна}$$

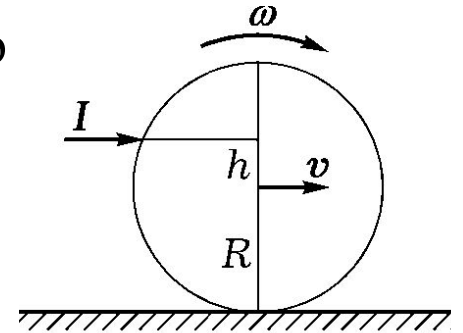


$$v_x = \frac{S_x}{m}, \quad v_y = \frac{S_y}{m}, \quad r = \frac{L_z}{C}$$

Точка P должна лежать в полуплоскости $y < 0$ на прямой, параллельной направлению скорости центра масс и отстоящей от него на расстояние $\frac{C\omega}{mv}$

12. Пример 2

Пример 2. Горизонтальным кием ударяют бильярдный шар в его меридианной плоскости. На какой высоте h над центром шара следует бить, чтобы после удара шар двигался без скольжения?



$$\left. \begin{aligned} mv &= I \\ \frac{2}{5}mR^2\omega &= Ih \\ v &= \omega R \end{aligned} \right\} h = \frac{2}{5}R$$

$$v_x = \frac{S_x}{m}, v_y = \frac{S_y}{m}, r = \frac{L_z}{C}$$

13. Удар по телу с одной неподвижной точкой

Задача об импульсивном движении сводится к нахождению 1) изменения в результате удара угловой скорости вращения тела 2) ударного импульса реакции в точке закрепления.

Примем за начало координат точку O закрепления, оси направим вдоль главных осей инерции

Заданы $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z), \quad \mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z), \quad A, B, C \quad \overline{OC} = (X, Y, Z)$

Найти $\mathbf{b} = (\mathbf{b}, I'_x, I'_y, I'_z), \quad + - - = (p, q, r)$

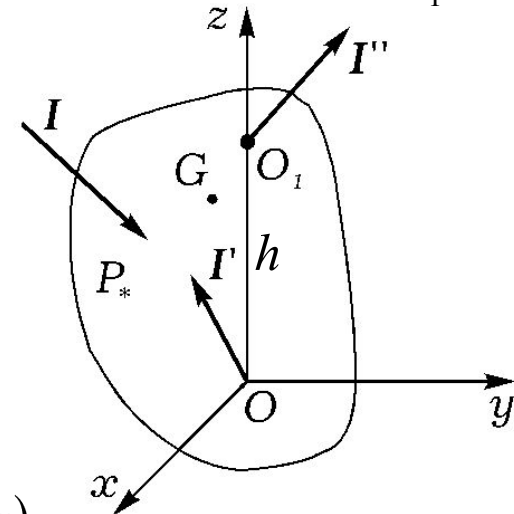
$$\mathbf{K}^+ - \mathbf{K}^- = \mathbf{L} \Rightarrow p = \frac{L_x}{A}, q = \frac{L_y}{B}, r = \frac{L_z}{C}$$

$$m(\mathbf{v}_C^+ - \mathbf{v}_C^-) = \mathbf{S} + \mathbf{I}' \quad \begin{matrix} \mathbf{\omega}_C^+ = + \times \overline{OC} \\ \mathbf{\omega}_C^- = - \times \overline{OC} \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{b} = m \times \overline{SC} - \Rightarrow \begin{cases} I'_x = qZ - rY - S_x \\ I'_y = rX - pZ - S_y \\ I'_z = pY - qX - S_z \end{cases}$$

14. Удар по телу с неподвижной осью

Пусть твердое тело вращается вокруг оси, проходящей через его неподвижные точки O и O_1 . К телу прикладывается ударная сила с импульсом I . Требуется найти изменение угловой скорости вращения тела, а также ударные импульсы реакций в точках O и O_1 .

Примем за начало координат точку O закрепления, ось Oz проходит через O_1 , ось Ox перпендикулярна направлению ударного импульса



$$\mathbf{I} = (0, I_y, I_z)$$

$$G = (x_G, y_G, z_G)$$

$$P_* = (x_*, y_*, z_*)$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$$

Найти $\mathbf{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $\mathbf{I}' = (I'_x, I'_y, I'_z)$, $\mathbf{I}'' = (I''_x, I''_y, I''_z)$, $\Delta r = (0, 0, \Delta r)$

$$m\mathbf{\omega} \times \overline{OG} = \mathbf{I} + \mathbf{I}' + \mathbf{I}''$$

$$\mathbf{\omega} = \overline{OP_*} \mathbf{I} + \overline{OO_1} \mathbf{I}''$$



$$\begin{aligned} -my_G \Delta r &= I'_x + I''_x, & -J_{xz} \Delta r &= y_* I_z - z_* I_y - h I''_y \\ mx_G \Delta r &= I_y + I'_y + I''_y, & -J_{yz} \Delta r &= -x_* I_z + h I''_x, \end{aligned}$$

$$0 = I_z + I'_z + I''_z$$

$$J_z \Delta r = x_* I_y$$