

**Практикум
по теме «Решение
планиметрических задач из
банка заданий ОГЭ № 24-25»**

Часть 2. Задания части 2 экзаменационной работы направлены на проверку таких качеств геометрической подготовки выпускников, как:

- умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии;
- умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- владение широким спектром приёмов и способов рассуждений.

Модуль «Геометрия»					
24	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	7	5	П	2
25	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения	7	7	П	2

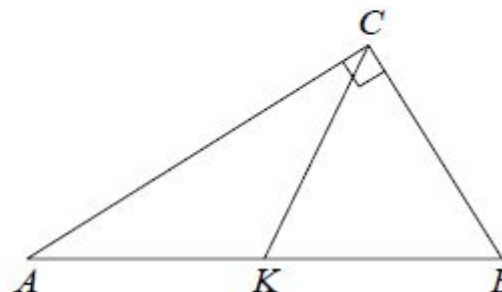
Примеры решение задач (№24-25) из Демо-версии 2018 года

24

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.

$$\begin{aligned} CK &= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{36 + 64} = 5. \end{aligned}$$



Ответ: 5.

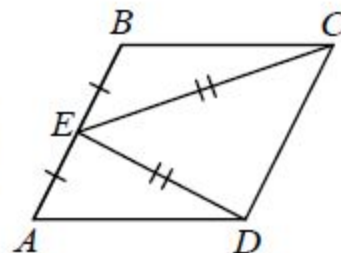
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

25

В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB . Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

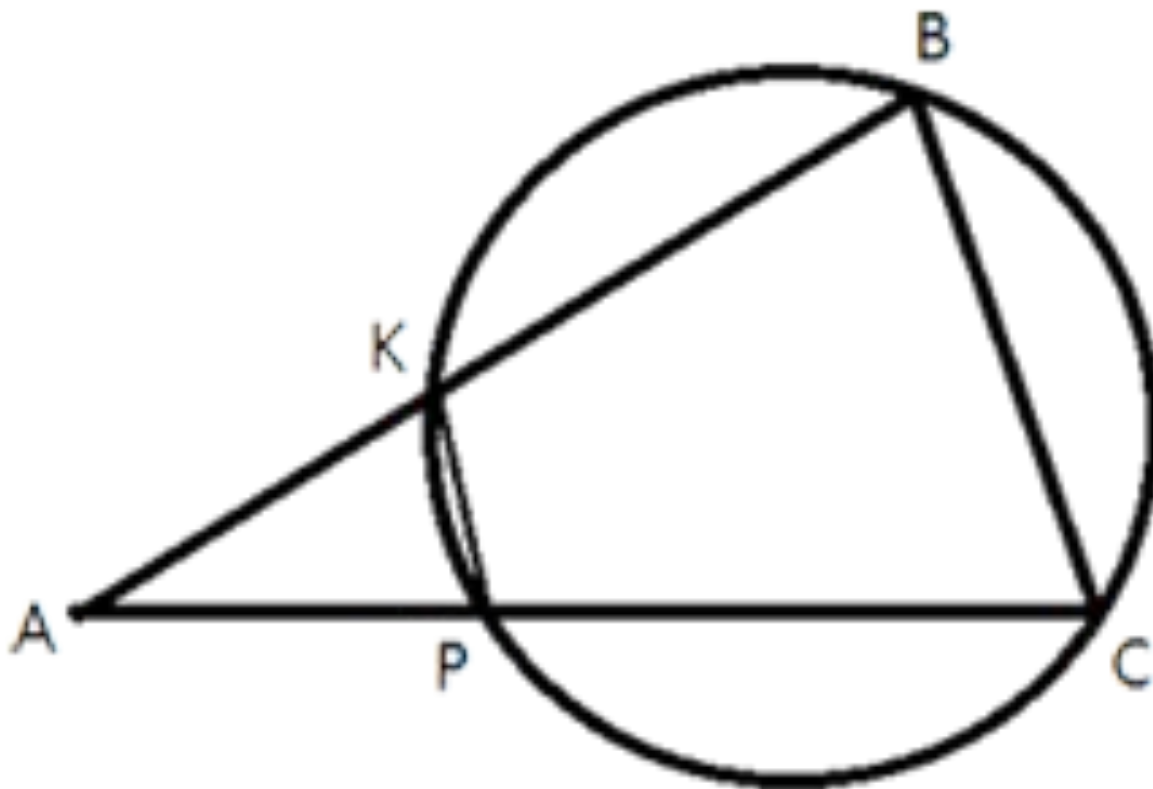
Доказательство.

Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам. Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна 180° , то углы равны 90° . Такой параллелограмм — прямоугольник.



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

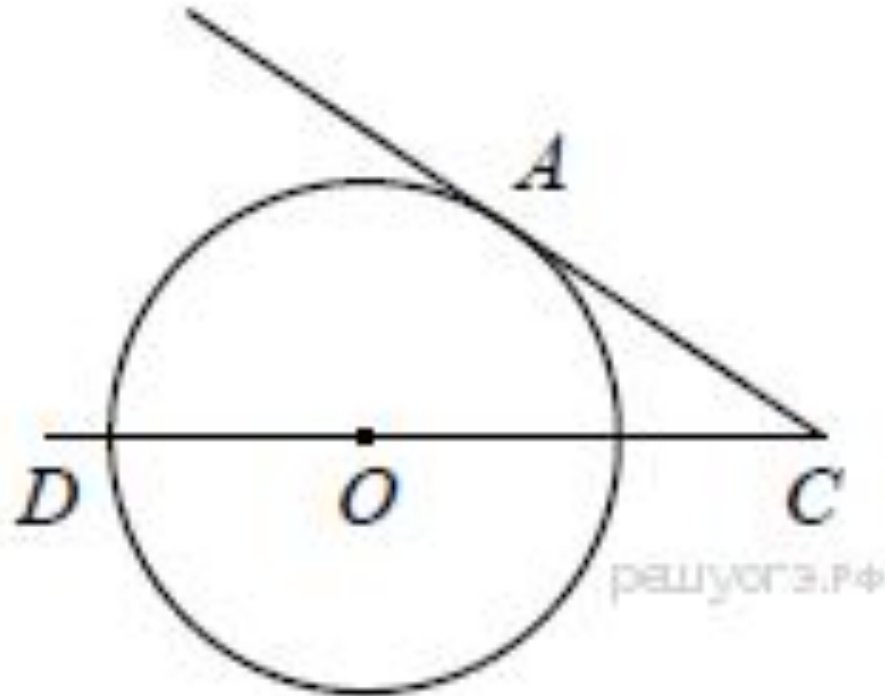
2. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC .



Решение:

Рассмотрим четырехугольник PKBC. PKBC вписан в окружность, следовательно выполняется условие: сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° (условие того, что четырехугольник можно вписать в окружность). Т.е. $\angle PKB + \angle BCP = 180^\circ$
 $\angle PKB + \angle AKP = 180^\circ$ (т.к. это смежные углы).
Следовательно, $\angle AKP = \angle BCP$ Рассмотрим треугольники ABC и AKP. $\angle AKP = \angle BCP$ (это мы выяснили чуть выше) $\angle A$ - общий, тогда эти треугольники подобны (по признаку подобия).
Следовательно, $KP/BC = AK/AC = AP/AB$ (из определения подобных треугольников). Нас интересует равенство $KP/BC = AP/AB$ $KP/BC = 18/(1,2BC)$
 $KP = 18BC/(1,2BC) = 15$ Ответ: $KP = 15$

3. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 100° .



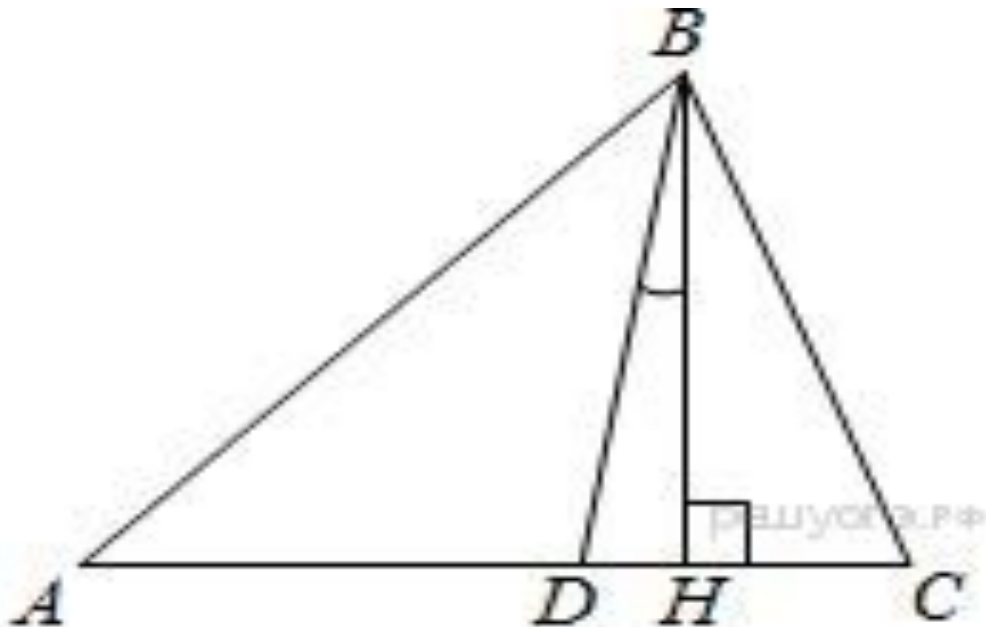
Решение:

1. Треугольник $АСО$ прямоугольный по свойству касательной (радиус к ней перпендикулярен). Угол $АОD$ центральный и равен градусам (градусной мере дуги AD , на которую он опирается).
2. Он внешний угол треугольника $АСО$.

Тогда $\angle АСО + \angle ОАС = 100^\circ$, отсюда $\angle АСО = 100^\circ - 90^\circ = 10^\circ$

Ответ: 10°

4. В треугольнике ABC углы A и C равны 40° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD .

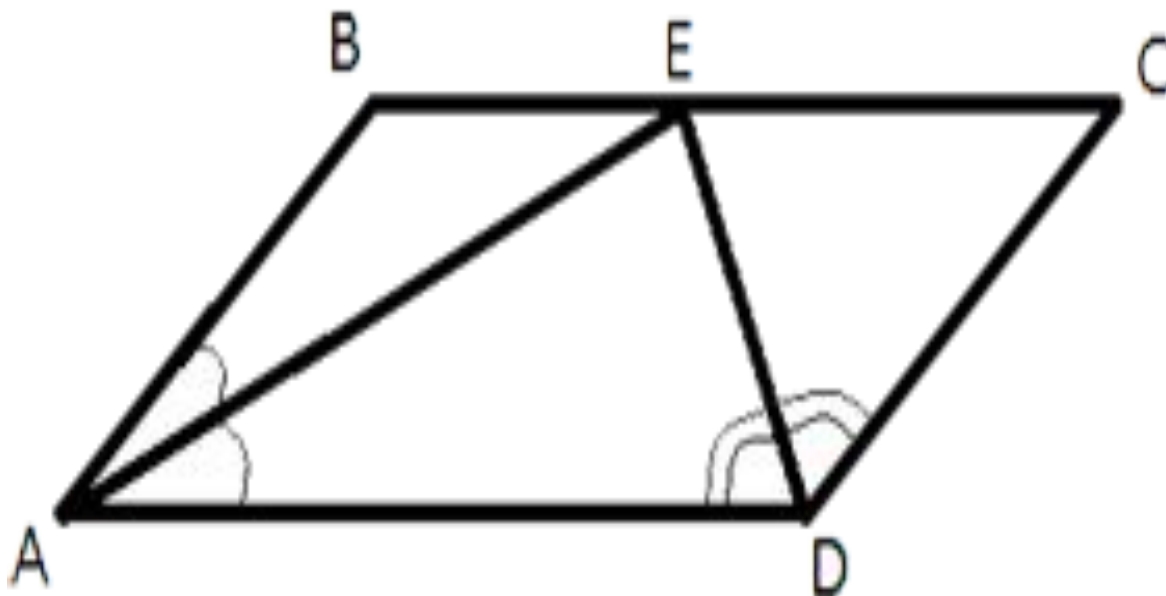


Решение:

1. BD - биссектриса $\Rightarrow$ угол $CBD = 1/2 \angle ABC = 1/2 \cdot (180^\circ - (40^\circ + 60^\circ)) = 1/2 \cdot (180^\circ - 100^\circ) = 1/2 \cdot 80^\circ = 40^\circ$
2. Рассмотрим треугольник BCN (угол CNB - прямой по условию). По теореме о сумме острых углов прямоугольного треугольника угол NCB + угол $NBC = 90^\circ$.
3. По условию угол $NCB = 60^\circ$. Значит угол $NBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
4. Угол между высотой BN и биссектрисой BD - это угол NBD . Он равен: угол $NBD =$ угол CBD - угол $NBC = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$.

Ответ: 10° .

5. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC .
Найдите BC , если $AB = 34$.

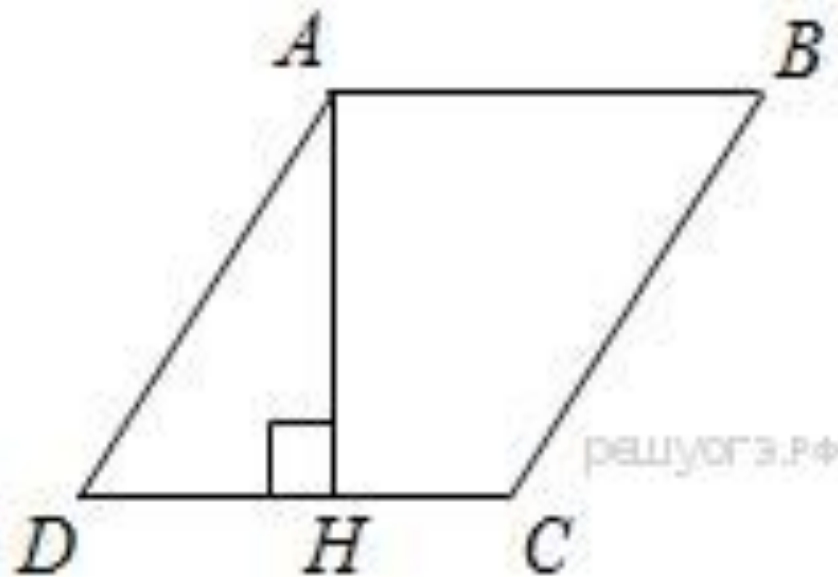


Решение:

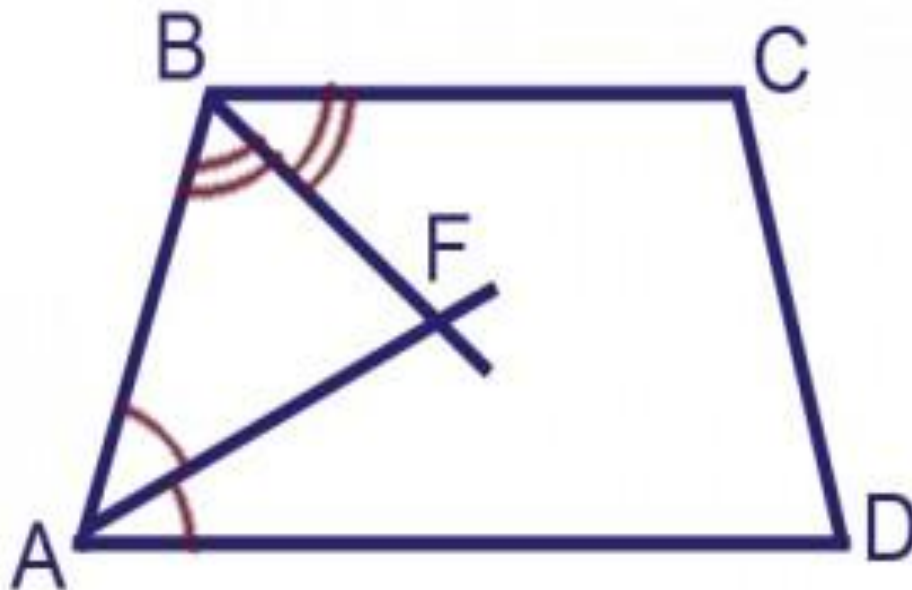
$BC \parallel AD$ (по определению параллелограмма)
 $\angle BAE = \angle EAD$ (т.к. AE - биссектриса) $\angle EAD = \angle BEA$
(т.к. это накрест-лежащие углы) Следовательно,
 $\angle BAE = \angle BEA$ Получается, что треугольник ABE -
равнобедренный (по свойству), и $AB = BE$ (по
определению равнобедренного треугольника).
Аналогично с треугольником ECD : $\angle CED = \angle CDE$
 $EC = CD$ Так как $AB = CD$ (по свойству
параллелограмма), то получается, что
 $AB = BE = EC = CD = 34$. Значит, $BC = 34 + 34 = 68$

Ответ: 68

6. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 12$ и $CH = 3$. Найдите высоту ромба.



7. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 10$.



Решение:

1. Углы $\angle BAD$ и $\angle ABC$ — внутренние односторонние при прямых $AD \parallel BC$ и секущей AB ,

следовательно, $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$. AF и BF — биссектрисы углов $\angle BAD$ и $\angle ABC$.

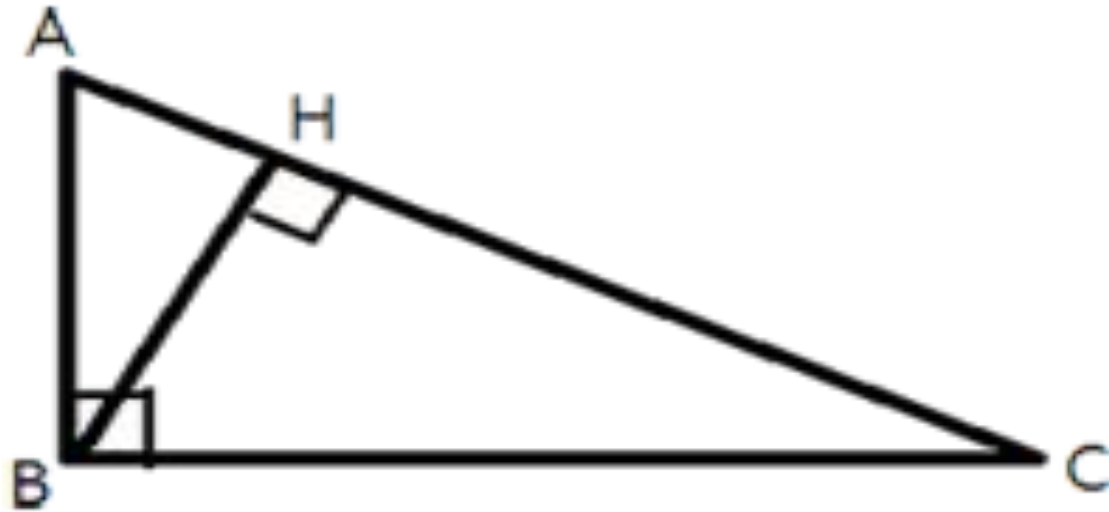
2. Сумма углов $\angle BAF$ и $\angle ABF$ будет равна половине суммы углов $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, то есть $180:2=90^\circ$.

Треугольник $\triangle AFB$ — прямоугольный, тогда по т. Пифагора находим AB :

- $AB^2 = BF^2 + AF^2$, $AB^2 = 10^2 + 24^2$ $AB^2 = 100 + 576$ $AB^2 = 676$
 $AB = 26$

- Ответ: 26.**

9. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 5$, $AC = 20$.



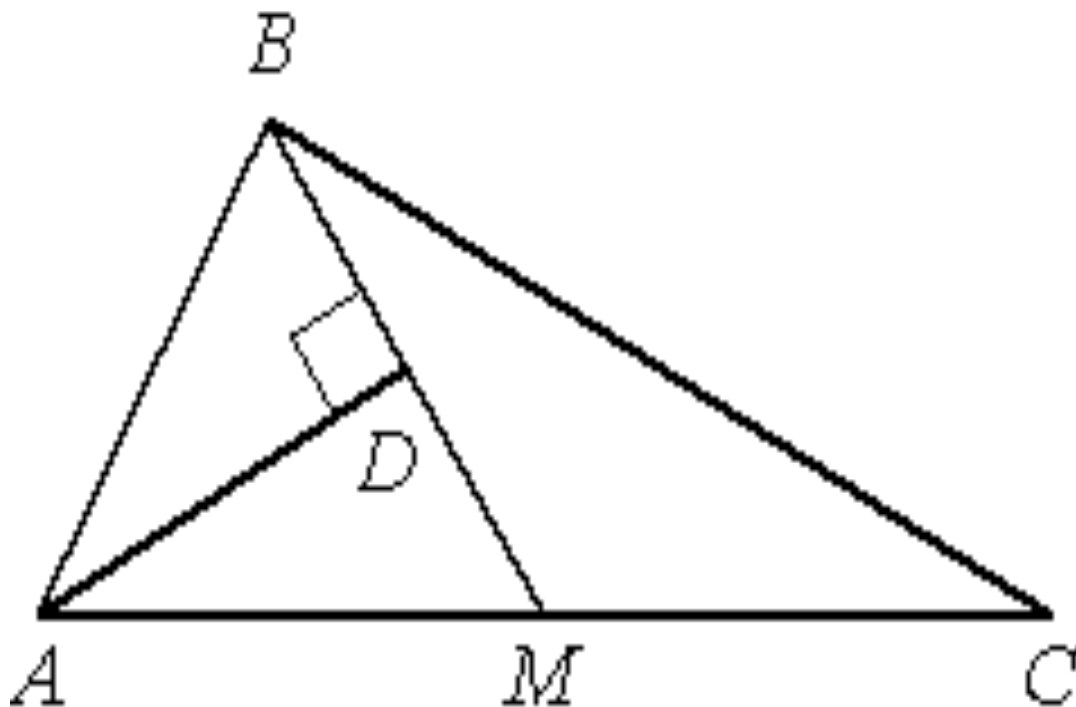
Решение:

1. Рассмотрим треугольники ABC и ABH . $\angle A$ – общий, $\angle AHB = \angle ABC$. Следовательно, эти треугольники подобны (по признаку подобия) 2. Тогда $AC/AB = AB/AN$ (гипотенуза большого треугольника относится к гипотенузе маленького как малый катет большого треугольника к малому катету маленького треугольника) $20/AB = AB/5$

$$20 \cdot 5 = AB^2, 100 = AB^2, AB = 10$$

Ответ: $AB = 10$

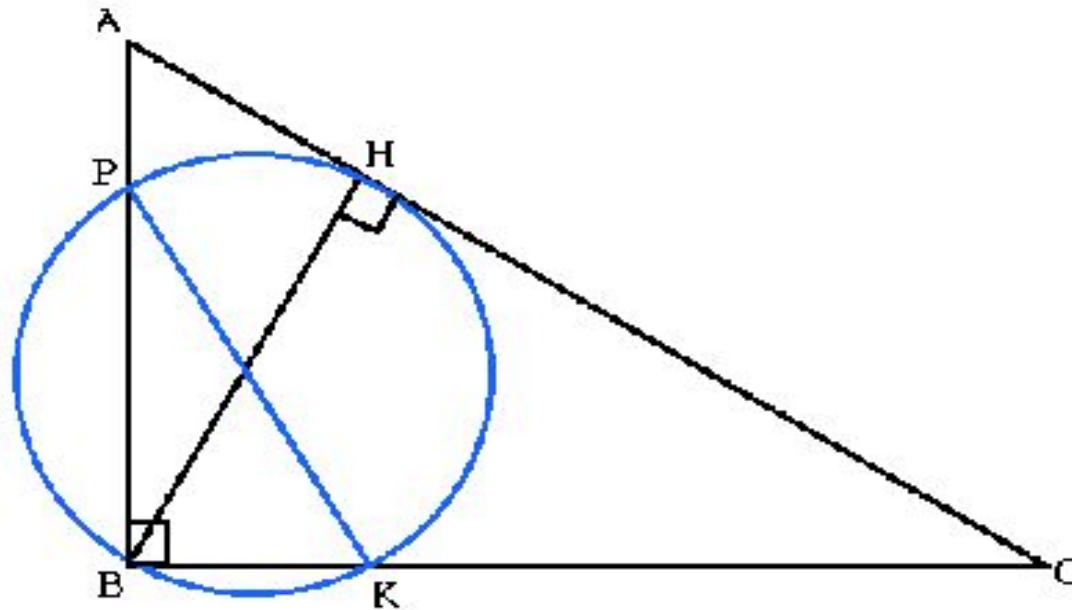
10. Прямая AD , перпендикулярная медиане BM треугольника ABC , делит её пополам. Найдите сторону AC , если сторона AB равна 4.



Решение:

1. AD для треугольника ABM является и медианой, и высотой. А это свойство медианы для равнобедренного треугольника.
Следовательно, треугольник ABM - равнобедренный с основанием BM.
2. По определению равнобедренного треугольника $AB=AM$. Т.к. BM - медиана для треугольника ABC, следовательно $AM=MC$ (по определению медианы). Тогда $AC=AM*2$. Как мы выяснили ранее $AM=AB \Rightarrow AC=AB*2=4*2=8$.
Ответ: $AC=8$.

11. Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 16$.



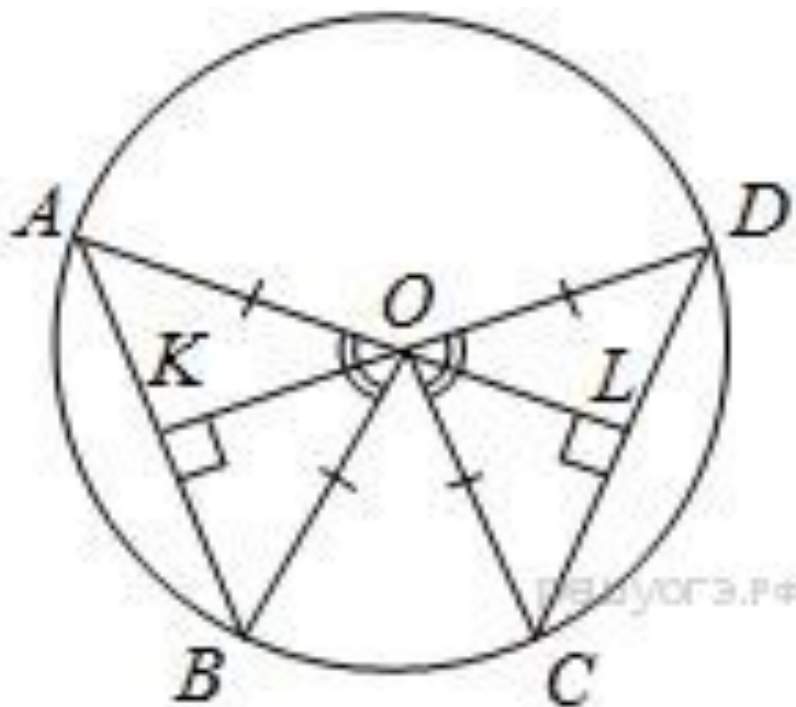
Решение:

1. Вписанный угол $\angle PVK$ - прямой по условию задачи. Так как центральный угол равен двум прямым углам, т.е. 180° , отрезок PK - диаметр и равен другому диаметру VH .

$$PK = 16.$$

Если короче - вписанный угол, если он равен 90° , опирается на диаметр.
Отсюда PK - диаметр.

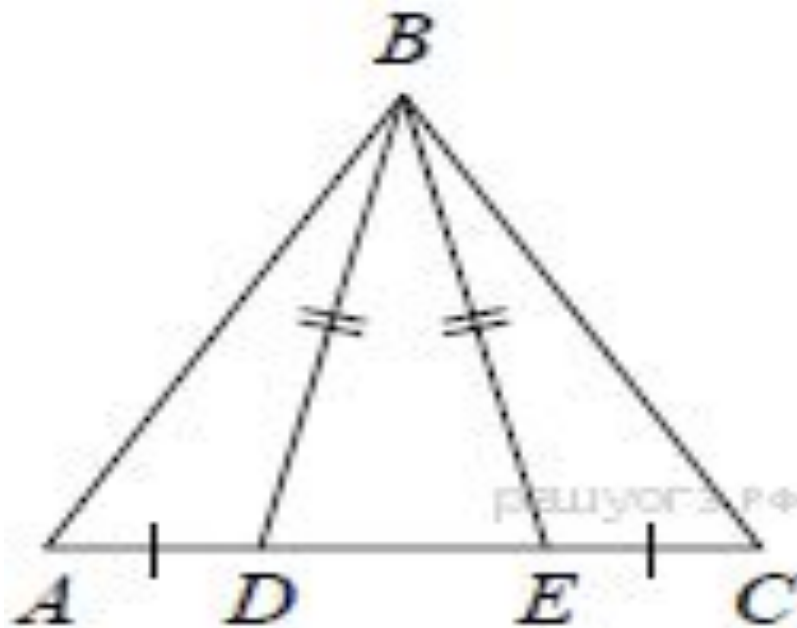
1. В окружности с центром O проведены две хорды AB и CD так, что центральные углы AOB и COD равны. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL . Докажите, что OK и OL равны.



Доказательство:

Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности, $\angle AOB = \angle COD$ по условию). Следовательно, высоты OK и OL равны как соответственные элементы равных треугольников.

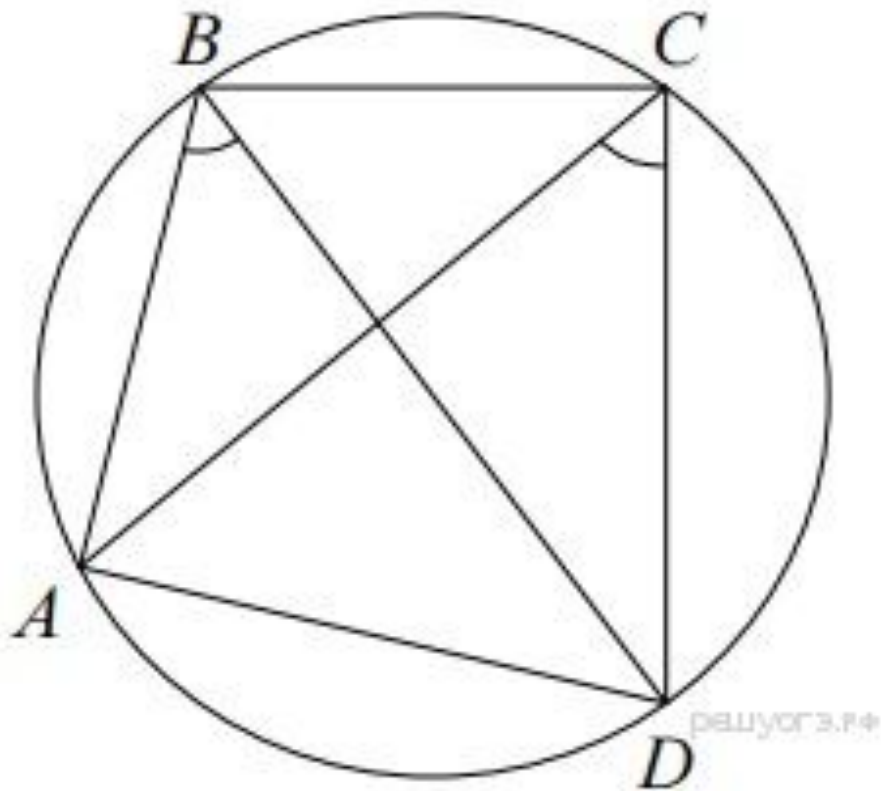
2. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



Доказательство:

- 1) По условию задачи $BD=BE$, следовательно треугольник BDE - равнобедренный (по определению). По свойству равнобедренного треугольника угол $BDE =$ углу BED . Смежные им углы тоже равны, угол $BDA=$ углу BEC .
- 2) Рассмотрим треугольники ABD и CBE . $AD=CE$ (по условию), $BD=BE$ (По условию), угол $BDA=$ углу BEC (из п.1), следовательно эти треугольники равны (по первому признаку равенства треугольников), а это значит, что $BA=BC$. Следовательно треугольник ABC - равнобедренный (по определению).

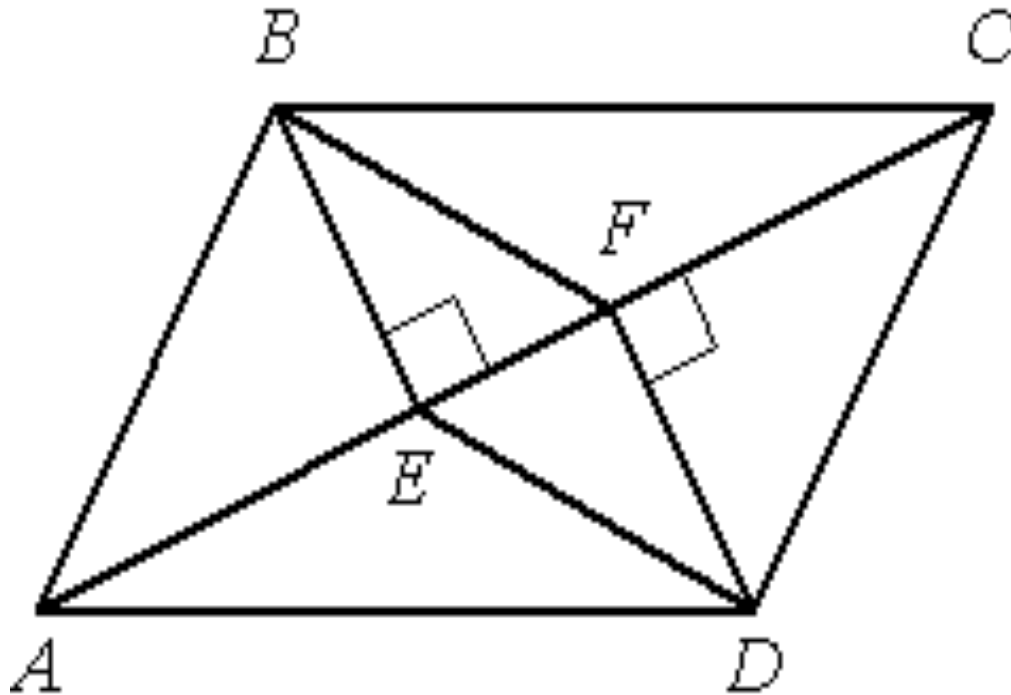
3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.



Доказательство:

1. $\angle ABD$ и $\angle ACD$ опираются на отрезок AD и равны друг другу. Значит мы можем провести окружность через точки A и D и вершины этих углов. Эти углы окажутся вписанными в окружность, опирающимися на одну дугу. Получится, что мы описали окружность вокруг четырехугольника.
2. Заметим, что углы DAC и DBC тоже являются вписанными и опирающимися на одну и ту же дугу, т.е., используя теорему о вписанном угле, получаем, что они равны друг другу . ч.т.д.

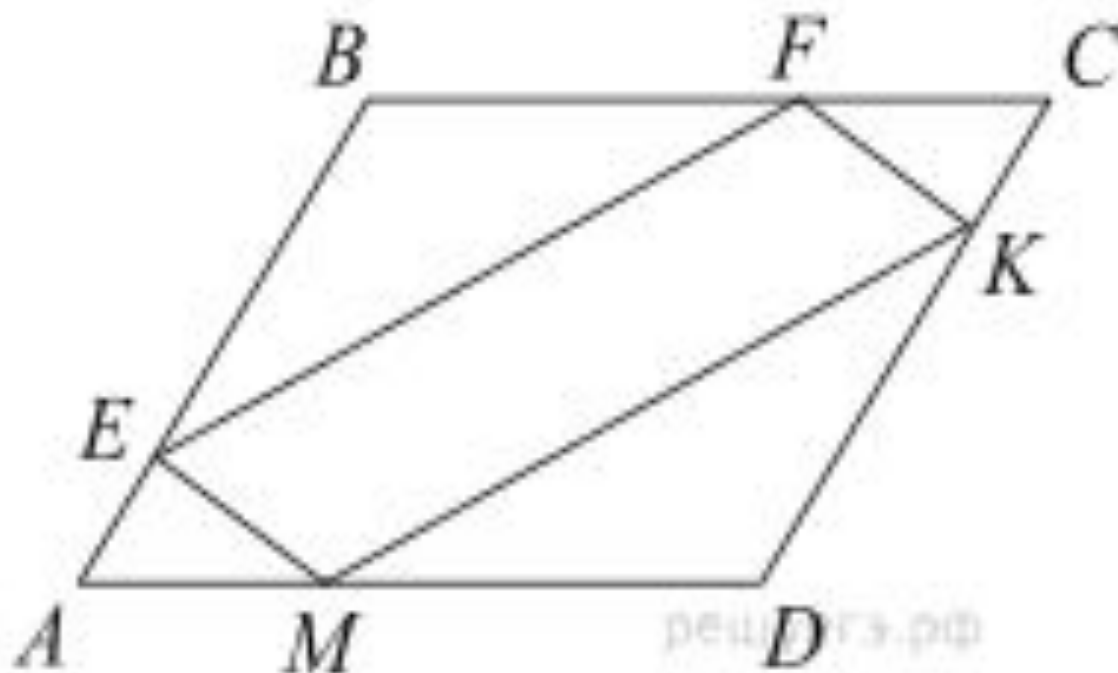
В параллелограмме $ABCD$ проведены перпендикуляры BE и DF к диагонали AC
Докажите, что $BFDE$ — параллелограмм.



Доказательство:

- 1) Рассмотрим треугольники ABE и CDF . $AB=CD$ (по свойству параллелограмма). Угол BAE = углу DCF (т.к. это внутренние накрест-лежащие углы для параллельных BC и AD и секущей AC). Угол BEA = углу DFC (т.к. оба эти угла прямые по условию). Значит прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу). Отсюда следует, что $BE=FD$
- 2) Рассмотрим треугольники BFE и DEF . $BE=FD$ (из пункта 1), EF -общая сторона, угол BEF = углу DFE (т.к. это прямые углы по условию). Следовательно треугольники BFE и DEF равны (по второму признаку равенства треугольников). Отсюда следует, что $BF=ED$.
- 3) В итоге получаем, $BF=ED$ и $BE=FD$, следовательно $BFDE$ — параллелограмм (по свойству параллелограмма).

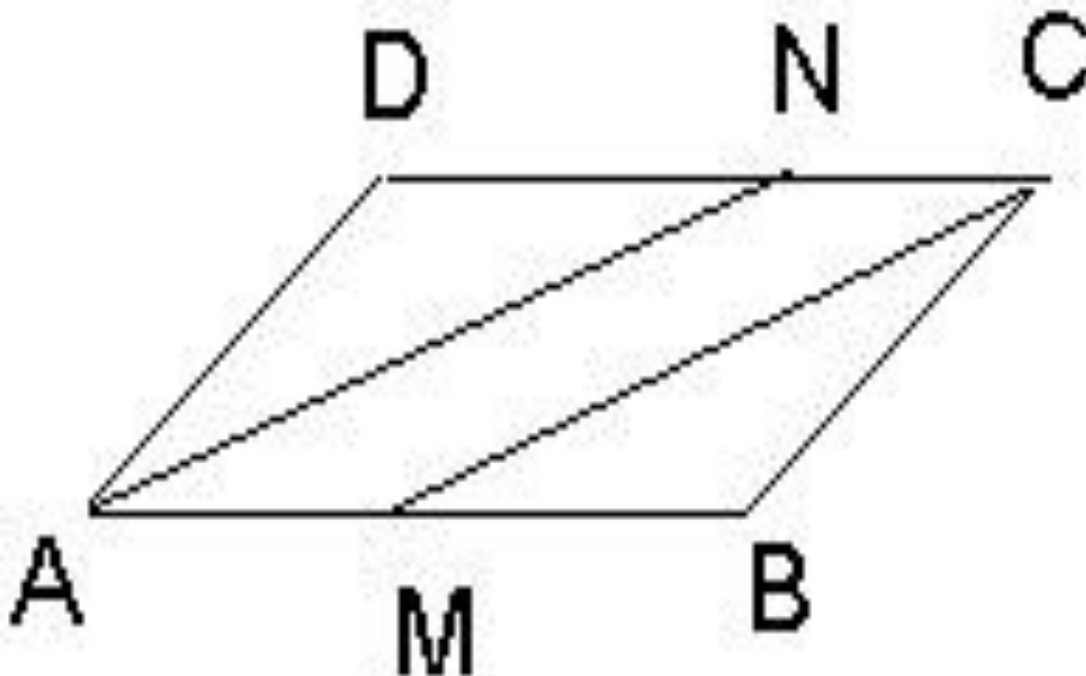
В параллелограмме $ABCD$ точки E , F , K и M лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём $AE = CK$, $BF = DM$. Докажите, что $EFKM$ — параллелограмм.



Доказательство:

1. Угол $A =$ углу C (т.к. $ABCD$ параллелограмм), $AE = CK$, $AM = FC$ (по условию задачи), значит треугольник $AME =$ треугольнику CFK , значит и $EM = FK$. Также легко заметить, что $MD = BF$ и $KD = EB$ (покажем для $MD = BF$. Т.к. $AD = AM + MD$, $BC = BF + FC$, а $FC = AM$, значит и $MD = BF$, Для $KD = EB$ доказательство аналогично) Тогда мы получили, что $MD = BF$, $KD = EB$, угол $B =$ угол D (т.к. $ABCD$ - паралл-мм), значит треугольник $EBF =$ треугольнику KDM , значит $MK = EK$ таким образом мы получили, что четырехугольник $EFKM$, у которого противолежащие стороны попарно равны.
2. Теперь докажем что противалежащие стороны у четырехугольника параллельны, тогда мы и докажем что он параллелограмм. В $EFKM$ проведем диагональ MF , тогда очевидно, что треугольник $MKF =$ треугольнику FEM (по равенству двух сторон + одна сторона общая) Тогда угол $FMK =$ углу MEF , а они внутренние накрест лежащие углы при прямых MK и EF и секущей MF , значит EF параллельна MK . Теперь аналогичным образом, проводим диагональ EK , также получаем 2 равных треугольника $MEK = FKE$ (тоже по трем сторонам), тогда углы $KEM = EKF$ (а они накрест лежащие при прямых FK и EM при секущей KE), значит FK параллельна EM . Получили что стороны четырехугольника попарно параллельны друг другу, значит это параллелограмм.

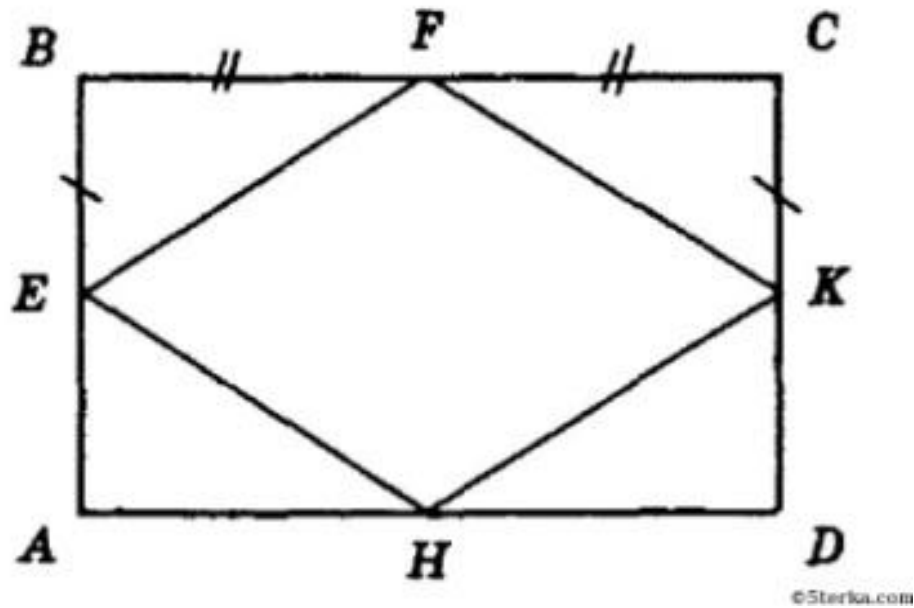
8. В параллелограмме проведены биссектрисы противоположных углов. Докажите, что отрезки биссектрис, заключенные внутри параллелограмма, равны.



Доказательство:

1. Рассмотрим треугольники $\triangle ADN$ и $\triangle BCM$
 $AD = BC$ как противоположные стороны параллелограмма,
2. Угол $\angle DAN$ равен углу $\angle BCM$ как половины равных углов A и B параллелограмма .
3. Угол $\angle AND$ равен углу $\angle BMC$ как противоположные углы параллелограмма
4. Треугольники равны по второму признаку, следовательно $AN = BM$ как соответственные стороны в равных треугольника

9. Середины сторон параллелограмма являются вершинами ромба. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



Доказательство:

Рассмотрим треугольники AEN и BEF :

1. $BE = BA$ так как E – середина AB
2. $BA = AN$ как половины равных сторон параллелограмма
3. $EF = EN$ как стороны ромба. Отсюда следует, что данные треугольники равны по третьему признаку.
4. Значит угол $B =$ углу A , а так как они являются внутренними односторонними и в сумме дают 180 градусов, то каждый из них равен 90 градусов. По определению $ABCD$ – прямоугольник.

Удачи на экзаменах !!!