1-модуль. Сызықты алгебра.
<u>Тақырыбы</u>: Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі.
№2 апта, көлемі-2 сағат
Дәріс жоспары:

- Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Крамер ережесі;
- Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазу және оны матрицалық тәсілмен шешу;
- Жүйені шешудің Гаусс тәсілі.

Негізгі ұғымдар мен анықтамалар. n белгісізді m теңдеуден тұратын жүйе деп мынадай жүйені айтады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------------ \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

мұндағы a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$ - теңдеу коэффициенттері деп, ал

b_i $(i=1,2,\ldots,m)$ - бос мүшелері деп аталады.

(1) теңдеудің қысқаша жазылуы мынадай:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \; (i=1,2,\ldots,m) \qquad (1')$$

(1) жүйенің бос мүшелерінің бәрі нолге тең болса,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \; (i=1,2,\ldots,m) \qquad (2)$$

жүйе **біртекті жүйе** деп аталады.

Жүйенің әрбір теңдеуін тепе-теңдікке айналдыратын

$$x_1 = c_1, \; x_2 = c_2, \ldots, \quad x_n = c_n$$

сандар тізбегі **теңдеулер жүйесінің шешімі** деп аталады. Осы шартты қанағаттандыратын барлық $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ шешімдер **шешімдер жиынын** құрады. Жүйенің шешімдер жиынын табу процесін жүйені шешу дейді.

(1) жүйенің ең болмағанда бір шешімі болса жүйе **үйлесімді**, ал шешімі болмаса **үйлесімсіз** деп аталады.

Енді (1) жүйеге мынадай белгілеулер енгізейік:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A - жүйе коэффициенттерінен құрылған матрица немесе жүйе матрицасы, X - жүйенің бос мүшелерінен құрылған бағана матрица, B - жүйенің бос мүшелерінен құрылған бағана матрица. Осы белгілеулерді қолданып (1) жүйені былайша жазуға болады

$$AX=B \qquad (3)$$

(3) теңдеу (1) жүйенің матрицалық жазылуы болып табылады.

Егер жүйе матрицасына бос мүшелер матрицасын жалғап жазсақ,

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

жүйенің кеңейтілген матрицасын аламыз.

Кронеккер-Капелли теоремасы. ***Егер сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасы мен кеңейтілген матрицасының ранглері тең болса, онда жүйе үйлесімді болады.***

Теорема бойынша жүйе үйлесімді болуы үшін $r(A) = R(A_1) = r$ болуы керек. Бұл кезде ***r* жүйе рангісі** деп аталады.

Үйлесімді жүйенің рангісі жүйедегі белгісіздер санына тең болса *(r=n)*, онда жүйе анықталған болады, ал егер жүйенің рангісі жүйедегі белгісіздер санынан кем болса *(r<n)*, онда жүйе анықталмаған болады.

Мысалы, мынадай жүйе қарастырайық:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Жүйенің кеңейтілген матрицасын жазып, элементар түрлендірулер жасайық:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & \mathbf{1} \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Жүйе матрицасы мен кеңейтілген матрицаның екінші ретті нолге тең емес минорлары бар екенін көру қиын емес және $r(A) = R(A_1) = 2$. Кронеккер-Капелли теоремасы бойынша жүйе үйлесімді.

Енді жүйені шешу мәселесіне көшейік.

ЖҮЙЕ ШЕШУДІҢ КРАМЕР ӘДІСІ

Бұл әдіс жүйедегі теңдеулер саны мен белгісіздер саны тең болғанда, яғни $m=n$, қолдануға болады. Демек, жүйе түрі мынадай болады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

Жүйедегі теңдеулер саны мен белгісіздер саны тең, онда жүйе матрицасы квадрат матрица болады. Сол квадрат матрицаның анықтауышын Δ деп белгілейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Крамер ережесі. Δ*-жүйе анықтауышы, ал* Δ_j *-* Δ *анықтауыштың j-тік жолын бос мүшелермен алмастырғаннан пайда болған анықтауыш болсын. Сонда, егер* $\Delta \neq 0$ *болса жүйенің жалғыз шешімі бар болады және мынадай формуламен табылады:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (5)$$

(5) формуланы Крамер формуласы деп атайды.

Осы ережені қолданып мынадай жүйені шешейік

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Шешуі. Алдымен Δ анықтауышты есептейміз,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13 .$$

Δ_j *(j=1,2,3)* анықтауыштарды есептейік

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

Енді Крамер формуласын қолданып белгісіздерді табамыз:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3.$$

Сонымен, берілген жүйенің жалғыз (-1; 2; 3) шешімі табылды, жүйе анықталған екен.

ЖҮЙЕ ШЕШУДІҢ КЕРІ МАТРИЦАЛЫҚ ӘДІСІ

Бұл әдіс те жүйедегі теңдеулер саны мен белгісіздер саны тең болғанда, яғни $m=n$, қолдануға болады. Жүйенің матрицалық жазылуын қарастырайық:

$$AX=B,$$

мұндағы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Айталық A ерекше емес матрица болсын, яғни матрица анықтауышы нолге тең емес, олай болса әр уақытта A^{-1} кері матрицасы бар болады. Теңдеуді сол жағынан кері матрицаға көбейтейік,

A^{-1} **AX=** A^{-1} **B**

$A^{-1}A=E$ болатындықтан,

$$EX=A^{-1}B,$$

кез келген матрицаның бірлік матрицаға көбейтіндісі сол матрицаның өзіне тең болатындықтан, $EX=X$:

$$X=A^{-1}B.$$

Сонымен, ***кері матрицалық әдіс бойынша жүйенің шешімін табу үшін бос мүшелерден құралған матрицаны жүйе матрицасының кері матрицасына көбейту керек екен.***

Жоғарыда карастырылған $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

жүйені осы әдіс бойынша шешіп көрейік.

Шешуі. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$ болғандықтан, жүйе матрицасы ерекше емес.

Осы матрицаның кері матрицасын табамыз:

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

*

Енді $X = A^{-1}B$ теңдікті қолданып белгісіздерді табамыз:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -54-8+49 \\ 9+10+7 \\ 72+2-35 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Сонымен, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ шешімдері табылды.

*

ЖҮЙЕ ШЕШУДІҢ ГАУСС ӘДІСІ

n белгісізді m теңдеуден тұратын жүйе қарастырайық,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

Гаусс әдісі - жүйедегі айнымалыларды түрлендірулер көмегімен біртіндеп жойып, жүйені сатылы түрге келтіріп, айнымалыларды біртіндеп табатын әдіс. Гаусс түрлендірулері мынадай:

1. Кез келген екі теңдеудің орындарын ауыстырып жазу;
2. Кез келген теңдеудің екі жағын нолден өзге санға көбейту;
3. Қандай да бір теңдеуді нолден өзге санға көбейтіп, басқа теңдеуге сәйкесінше қосу;

   4. *0=0* түріндегі теңдеуді сызып тастау.

Гаусс түрлендірулерін жүйенің өзіне қолданғаннан гөрі оның кеңейтілген матрицасына қолданған ұтымды болады. Олай болса жүйенің кеңейтілген матрицасын қарастырайық,

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Осы матрицаны түрлендірулер нәтижесінде мынадай түрге келтіреміз:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 & a_{2r+1} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 & a_{3r+1} & \ldots & a_{3n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rr} & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} & b_r \\ & & & & & & & 0 & b_{r+1} \\ & & & & & & & \ldots & \ldots \\ & & & & & & & 0 & b_m \end{array}\right)$$

Матрицаның элементтері a_{ij} арқылы белгіленіп тұрғанымен, шын мәнінде олар түрлендірулер нәтижесінде өзгерген. Бұл белгілеулер жазуды ықшамдау үшін ғана пайдаланылып отыр.

Соңғы матрицаға сәйкес келетін теңдеулер жүйесі мынадай:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots \qquad\qquad\qquad + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots \qquad\qquad + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots \quad + a_{3r+1}x_{r+1} + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ ------------------------- \\ \qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad --- \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m \end{cases} \qquad \mathbf{(6)}$$

Соңғы $0 = b_{r+1}$, ..., $0 = b_m$ теңдеулеріндегі b_{r+1}, ..., b_m сандарының ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса, онда берілген теңдеулер жүйесі үйлесімсіз, ал бәрі нолге тең болса жүйе үйлесімді болады.

Жүйенің рангісі жүйедегі белгісіздер санынан кем болса, онда жүйе анықталмаған болатыны жоғарыда айтылған. Айталық (6) жүйе үйлесімді және $r<n$ болсын.

Егер $x_1, x_2, ..., x_r$ коэффициенттерінен құрылған анықтауыш нолден өзгеше болса, онда $x_1, x_2, ..., x_r$ айнымалыларды **базистік (негізгі) айнымалылар** деп, ал басқа n-r айнымалыларды **еркін (негізгі емес) айнымалылар** деп атайды.

Еркін айнымалылары нолге тең болған кездегі шешім **базистік шешім** деп аталады. Базистік шешімдер саны C_n^r-ден артпайды.

Бірнеше мысал қарастырайық.

1-мысал. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

Шешуі. Жүйенің кеңейтілген матрицасын жазып, элементар түрлендірулер жасайық:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} (-1) & (-3) & (-2) \\ \hookleftarrow & | & | \\ \hookleftarrow & | & | \\ & \hookleftarrow & | \\ & & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ (1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ (-1) & (1) \\ & | \\ & \hookleftarrow \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} & & \\ & & | \\ (-4) & (-3) & (3) \\ \hookleftarrow & & \end{array} \sim$$

*

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&|&1\\0&1&0&|&2\\0&0&1&|&3\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&|&1\\0&1&0&|&2\\0&0&1&|&3\end{pmatrix}.$$

Соңғы матрицаға сәйкес келетін жүйе жазайық:

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3\end{cases}$$

Сонымен жүйенің шешімі табылды: $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3$

*

2-мысал. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Шешуі. Жүйенің кеңейтілген матрицасын жазып, элементар түрлендірулер жасайық:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} (-2) & (-5) \\ \hookleftarrow & | \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tfrac{5}{11} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 14/11 & -2/11 & 1/11 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \end{array}\right)$$

Соңғы матрицаға сәйкес келетін жүйе жазайық:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{14}{11}x_3 - \dfrac{2}{11}x_4 = \dfrac{1}{11} \\ \quad -11x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -2 \end{cases}$$

Осы жүйеден x_1 және x_2 айнымалыларды табамыз:

$$x_1 = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}$$

$x_3 = u$ және $x_4 = v$ деп алсақ жүйе шешімі мынадай болады:

$$x_1 = -\frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v + \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u - \frac{7}{11}v + \frac{2}{11}, \quad x_3 = u, \quad x_4 = v.$$

u, v айнымалылардың орнына еркімізше сан беріп жүйенің сәйкес шешімін табамыз. Сонымен, берілген жүйенің шексіз көп шешімі бар екен.

ТЕОРИЯЛЫҚ СҰРАҚТАР

- Үйлесімді және үйлесімсіз жүйе деп қандай жүйені айтамыз?
- Қай кезде жүйе анықталған деп аталады?
- Жүйе шешудің Крамер әдісін түсіндір.
- Жүйе шешудің матрицалық әдісін түсіндір.
- Жүйе шешудің Гаусс әдісін түсіндір.

РЕСУРСТАР МЕН АҚПАРАТ КӨЗДЕРІ

Білім алушыға келесі ресурстарды тегін пайдалануға мүмкіндік беріледі:

- КАБИС электронды кітапханасы http://kabis.kazatk.kz

- Республикалық жоғары оқу орындары аралық электрондық кітапханасы http://rmebrk.kz/

- «Платонус» ААЖ электронды кітапханасы http://platonus.kazatk.kz/library

Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі

1. Ибрашев Х.И., Еркегулов Ш.Т. Математикалық анализ курсы, т. I. А.: 1963.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. I, II, М.: Наука, 1980, 1982.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упр. по мат. анализ. М.: Наука, 1990.

4. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике, Минск «Вышэйшая школа» 2006, т 2.

Косымша

1.Смирнов В.И. Курс высшей математики, учбеник в 4-х т., т. 3, ч. 4, М.: Наука, 1981.