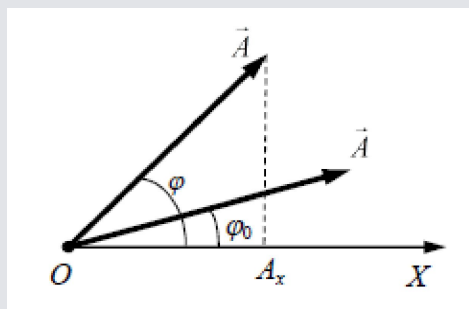


The background of the slide is a close-up, high-angle photograph of a complex wooden maze. The maze is constructed from dark-stained wooden blocks, creating a series of interconnected rectangular paths and dead ends. The lighting is soft, casting gentle shadows that emphasize the three-dimensional structure of the maze. Overlaid on the left side of the image is a semi-transparent white circle with a thin white border. Inside this circle, the text 'Лекція 5' is written in a bold, blue, serif font. Below it, the text 'Змінний струм' is written in a smaller, blue, italicized serif font.

Лекція 5

Змінний струм

Метод векторних діаграм



В аналогію гармонічним коливанням ставиться обертальний рух вектора навколо осі, яка перпендикулярна площині, де лежить цей вектор. При цьому швидкість обертального руху співпадає з частотою коливань.

За такою аналогією, довжина вектора відповідає амплітуді коливання, а кут, який вектор утворює в заданий момент часу з обраним напрямком, визначає фазу коливання.

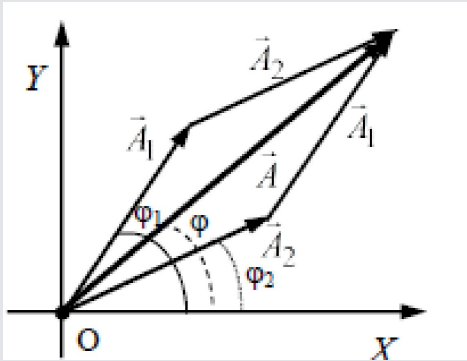
Метод векторних діаграм використовується при визначенні результуючої амплітуди та фази під час додавання коливань та при аналізі змінного струму.

Додавання гармонічних коливань однакової частоти, що відбуваються в одному напрямку

Розглянемо накладання в деякій точці простору двох електричних полів, які описуються векторами напруженості:

$$E_1 = E_{1\max} \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$

$$E_2 = E_{2\max} \cos(\omega t + \varphi_{02}).$$



За принципом суперпозиції результуюча напруженість буде визначатися сумою вищезазначених напруженостей та буде мати вираз:

$$E_{\text{рез}} = E_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Використовуючи метод векторних діаграм, поставимо у відповідність до коливань напруженості першого поля вектор A_1 , до коливань напруженості другого поля вектор A_2 . Модуль результуючого вектора визначається за теоремою косинусів:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

що відповідає амплітуді результуючого коливання

$$E_{\max} = \sqrt{E_{\max 1}^2 + E_{\max 2}^2 + 2E_{\max 1}E_{\max 2} \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}.$$

Визначимо початкову фазу результуючого коливання:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_y}{A_x} = \frac{E_{\max 1} \sin \varphi_{01} + E_{\max 2} \sin \varphi_{02}}{E_{\max 1} \cos \varphi_{01} + E_{\max 2} \cos \varphi_{02}}.$$

Частинні випадки додавання коливань:

- якщо різниця фаз між коливаннями двох полів кратна 2π , то обидві напруженості коливаються синфазно, а амплітуда результуючого коливання знаходиться за формулою

$$E_{\text{рез}} = E_{\max 1} + E_{\max 2},$$

- якщо різниця фаз кратна непарному числу π , то коливання відбуваються у протифазі і амплітуда результуючого коливання найменша з можливих

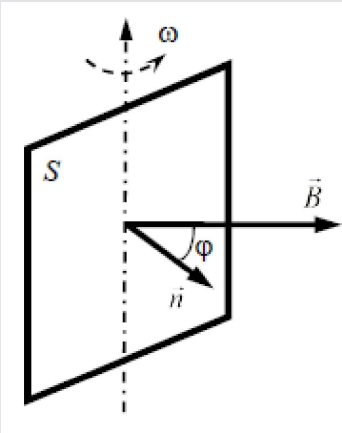
$$E_{\text{рез}} = |E_{\max 1} - E_{\max 2}|,$$

- якщо різниця фаз двох коливань зсунута на $\pi/2$, амплітуда результуючого коливання визначається за теоремою Піфагора:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_{\max 1}^2 + E_{\max 2}^2}.$$

Змінний струм

Струм в електричних колах, який виникає під дією зовнішньої періодичної ЕРС, називають **змінним струмом**.



Найпростіший генератор змінного струму – рамка, що обертається в постійному магнітному полі. Нехай на рамку намотано N витків дроту, площа рамки S , стала частота її обертання в магнітному полі з індукцією B становить ω .

При цьому в рамці виникає ЕРС індукції $\mathcal{E}_{\text{зоб}}(t) = BSN \frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = \cos \varphi$,

а кут повороту рамки залежить від часу $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$.

Тоді зовнішня ЕРС змінюється за гармонічним законом:

$$U_{\text{зоб}}(t) = NBS\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = U_{\text{max}} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Початкову орієнтацію рамки можна обрати такою, щоб початкова фаза становила $\pi/2$, тоді часова залежність ЕРС генератора змінного струму описується виразом:

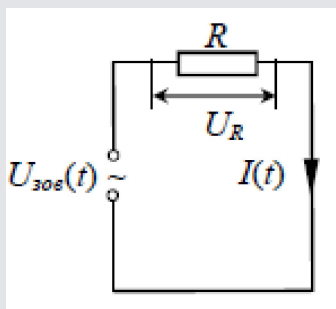
$$U_{\text{зоб}}(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t.$$

В результаті дії змінної в часі зовнішньої ЕРС в колі виникає змінний струм, який описується виразом:

$$I(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega t - \varphi_{\text{зс}}).$$

Основною задачею теорії електричних кіл являється знаходження амплітудного значення змінного струму та зсуву фаз між струмом та зовнішньою ЕРС.

Активний опір



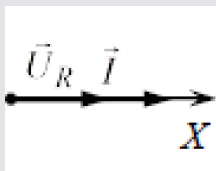
Нехай до генератора змінного струму підключено активний опір R .
ЕРС генератора змінюється з часом як $U_{зоб}(t) = U_{\max} \cos \omega t$.

Напруга на опорі дорівнює ЕРС генератора: $U_{зоб} = U_R$. При цьому $U_R = IR$.

Прирівнявши вирази для напруги, визначимо силу змінного струму:

$$I(t) = \frac{U_{\max}}{R} \cos \omega t = I_{\max} \cos \omega t.$$

Як видно, фази коливань струму і напруги однакові. За відсутності зсуву фаз на векторній діаграмі вектори, які відповідають коливанням струму і напруги, зображуються паралельними:



Електричний струм при проходженні через опір R , виконує роботу, тому такий опір називається активним.

Визначимо потужність змінного струму: $P = IU_R$.

$$P = I_{\max}^2 R \cos^2 \omega t \quad t = \frac{U_{\max}^2}{R} \cos^2 \omega .$$

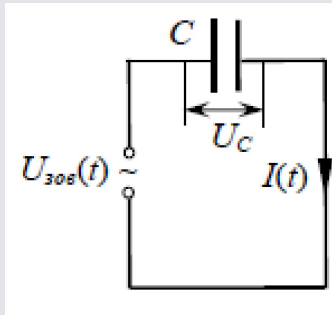
Оскільки ми розглядаємо проходження струму за проміжки часу, які є набагато більшими за період коливань струму, являє інтерес середнє значення потужності. Середнє значення квадрату косинуса є $\frac{1}{2}$, отже середню потужність за період можна визначити як

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R \quad \langle \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{R}.$$

Введемо поняття **діючих значень** струму та напруги: це таке значення постійного струму (чи напруги), при якому постійний струм за час одного періоду виконує таку саму роботу, що і змінний струм. Потужність, виражена через діючі значення, має вигляд: $P = I_{\delta}^2 R = \frac{U_{\delta}^2}{R}$.

Порівнюючи ці вирази з середніми значеннями потужності, одержимо відношення між амплітудним та діючим значенням для струму і напруги: $I_{\delta} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, U_{\delta} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}.$

Ємнісний опір



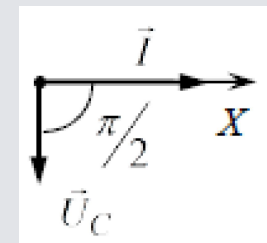
Нехай до генератора змінного струму підключено конденсатор з ємністю C . ЕРС генератора змінюється з часом як $U_{\text{зос}}(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t$.

Напруга на ємності дорівнює ЕРС генератора: $U_c = U_{\text{зос}}(t)$.
$$U_c = \frac{q}{C}.$$

Звідси можна визначити заряд конденсатора: $q(t) = CU_{\text{max}} \cos \omega t$. Диференціюючи цей вираз за часом, отримаємо змінний струм

$$I(t) = -\omega C U_{\text{max}} \sin \omega t = I_{\text{max}} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Як видно, коливання струму зсунуті відносно коливань напруги на значення $\pi/2$, причому струм випереджає по фазі напругу. Таким чином, на векторній діаграмі вектори, які співставлені до коливань напруги і струму, перпендикулярні.



Амплітудне значення струму визначається виразом $I_{\max} = \omega C U_{\max}$. Оскільки коефіцієнтом пропорційності між струмом і напругою виступає опір, величина $1/\omega C$ називається **ємнісним опором**, який позначається X_C .

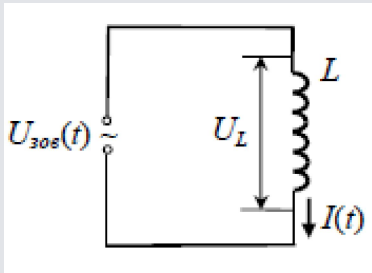
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_C}.$$

Знайдемо миттєву та середню потужність:

$$P = IU_C = -\omega C U_{\max} \sin \omega t \cdot U_{\max} \cos \omega t = -\frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{X_C} \sin(2\omega t).$$

При усередненні цього виразу маємо, що середнє значення сіноса за період (або на проміжку часу, що набагато більше за період) дорівнює нулю, отже і середня потужність також дорівнює нулю, що свідчить про те, що при проходженні змінного струму через конденсатор, електрична енергія не втрачається.

Індуктивний опір



Нехай до генератора змінного струму підключено котушку з індуктивністю L . ЕРС генератора змінюється з часом як $U_{\text{зог}}(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t$.

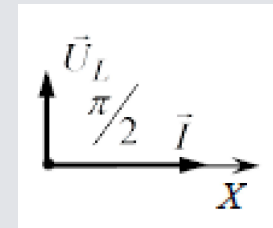
Напруга на котушці дорівнює ЕРС генератора: $U_{\text{ког}} = U$ при цьому сума напруги на котушці та ЕРС самоіндукції, яка в ній виникає, має дорівнювати нулю, інакше струм у котушці міг мати нескінченне значення.

$$U_{\text{лі}} + \varepsilon = 0, \quad \varepsilon = -L \frac{dI}{dt}.$$

Виразимо похідну струму, а потім проінтегруємо вираз, і отримаємо струм в залежності від часу:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_{\text{max}}}{L} \cos \omega t, \quad I(t) = \frac{U_{\text{max}}}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_{\text{max}}}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Знову бачимо, що коливання струму і напруги мають зсув фаз у $\pi/2$, тільки тепер напруга випереджає струм.



Амплітудне значення струму визначається виразом $I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L}$, оскільки коефіцієнтом пропорційності між струмом і напругою виступає опір, величина ωL називається **індуктивним опором**, який позначається X_L .

$$X_L = \omega L, \quad I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_L}.$$

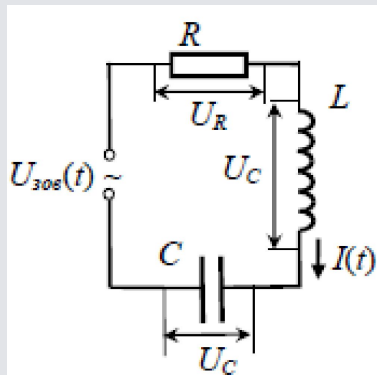
Знайдемо миттєву та середню потужність:

$$P = IU_L = \frac{U_{\max}}{X_L} \sin \omega t \cdot U_{\max} \cos \omega t = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{X_L} \sin(2\omega t).$$

При усередненні цього виразу маємо, що середнє значення сіноса за період (або на проміжку часу, що набагато більше за період) дорівнює нулю, отже і середня потужність також дорівнює нулю, що свідчить про те, що при проходженні змінного струму через ідеальну котушку електрична енергія не втрачається.

(Зауважимо, що активний опір ідеальної котушки дорівнює нулю, реальні котушки завжди мають ненульовий активний опір, отже насправді втрати енергії на них відбуваються).

Закон Ома для кола зі змінним струмом



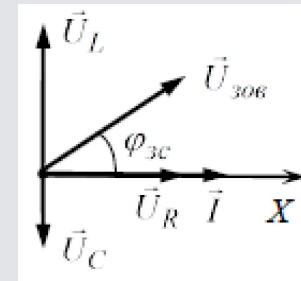
Розглянемо електричне коло, яке містить послідовне включення активного опору R , котушки індуктивності L та конденсатора ємністю C , які підключені до генератора змінного струму $U_{306}(t) = U_{\max} \cos \omega t$.

В такому контурі виникає струм $I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi_{3c})$ його амплітуду і зсув фаз за допомогою методу векторних діаграм.

При послідовному включенні елементів напруга джерела має дорівнювати сумі напруг на всіх ділянках контура: $U_{306}(t) = U_R + U_L + U_C$.

Поставимо у відповідність до коливань кожної з цих напруг вектор, всі вектори зображено на векторній діаграмі. При цьому довжина кожного вектора дорівнює амплітуді коливань відповідної напруги, тобто

$$|\vec{U}_{306}| = U_{\max}, |\vec{U}_R| = I_{\max} R, |\vec{U}_L| = I_{\max} \cdot \omega L, |\vec{U}_C| = \frac{I_{\max}}{\omega C}.$$



З векторної діаграми видно, що довжина результуючого вектора знаходиться за формулою

$$|U_{\text{зов}}| = \sqrt{|U_R|^2 + (|U_L| - |U_C|)^2},$$

що з врахуванням виразів для амплітудних значень напруг дає:

$$U_{\text{max}} = I_{\text{max}} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{\text{max}} Z.$$

В цьому виразі Z називається повним опором кола, або **імпедансом**. Повний опір складається з активного та реактивного опорів:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

З векторної діаграми можна визначити зсув фаз між коливаннями струму та зовнішньої напруги:

$$\tan \varphi_{\text{зс}} = \frac{U_L - U_C}{U_R} \quad \varphi_{\text{зс}} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Коли частота зовнішньої ЕРС співпадає з власною частотою контура, амплітудні значення напруг на ємності та індуктивності однакові, реактивний опір зникає і амплітудне значення сили струму максимальне. Це явище називають **резонансом напруг**. Зсуву фаз при резонансі між коливаннями струму та напруги також немає.