

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ СО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Возникновение переходных процессов. Понятие о коммутации

При всех изменениях в электрической цепи: включении, выключении, коротком замыкании, колебаниях величины какого-либо параметра и т.п. – в ней возникают переходные процессы, которые не могут протекать мгновенно, так как невозможно мгновенное изменение энергии, запасенной в электромагнитном поле цепи. Таким образом, переходный процесс обусловлен несоответствием величины запасенной энергии в магнитном поле катушки и электрическом поле конденсатора ее значению для нового состояния цепи.

Возникновение переходных процессов. Понятие о коммутации

При переходных процессах могут возникать большие перенапряжения, сверхтоки, электромагнитные колебания, которые могут нарушить работу устройства вплоть до выхода его из строя. С другой стороны, переходные процессы находят полезное практическое применение, например, в различного рода электронных генераторах. Все это обуславливает необходимость изучения методов анализа нестационарных режимов работы цепи.

Основные методы анализа переходных процессов в линейных цепях

Классический метод, заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.

Операторный метод, заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам.

Частотный метод, основанный на преобразовании Фурье и находящий широкое применение при решении задач синтеза.

Метод расчета с помощью **интеграла Дюамеля**, используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия.

Метод переменных состояния, представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы

Классический метод расчета

Классический метод расчета переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе.

В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями, приведенными в таблице.

Классический метод расчета

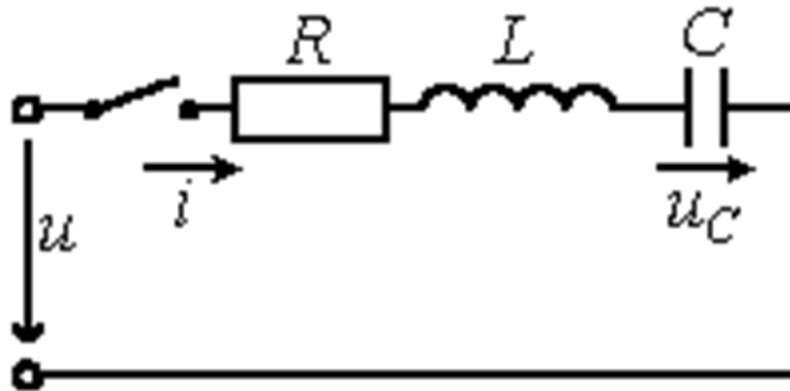


Рис.1

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная емкость)
$u_R = Ri_R$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$

Классический метод расчета

Для последовательной цепи, содержащей линейные резистор R , катушку индуктивности L и конденсатор C , при ее подключении к источнику с напряжением u можно записать

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

Подставив в формулу значение тока через конденсатор

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно u_C

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

Классический метод расчета

В общем случае уравнение, описывающее переходный процесс в цепи с n **независимыми накопителями энергии**, имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(x)$$

где x – искомая функция времени (напряжение, ток и т.п.); $f(x)$ - известное возмущающее воздействие (напряжение и (или) ток источника электрической энергии); a_k - k -й постоянный коэффициент, определяемый параметрами цепи.

Порядок данного уравнения равен числу независимых накопителей энергии в цепи, под которыми понимаются катушки индуктивности и конденсаторы в упрощенной схеме, получаемой из исходной путем объединения индуктивностей и соответственно емкостей элементов,

Классический метод расчета

В общем случае порядок дифференциального уравнения определяется соотношением

$$n = n_L + n_C - k_L - k_C$$

где n_L и n_C - соответственно число катушек индуктивности и конденсаторов после указанного упрощения исходной схемы;

k_L - число узлов, в которых сходятся только ветви, содержащие катушки индуктивности (в соответствии с первым законом Кирхгофа ток через любую катушку индуктивности в этом случае определяется токами через остальные катушки);

k_C - число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы (в соответствии со вторым законом Кирхгофа напряжение на любом из конденсаторов в этом случае определяется напряжениями на других).

Классический метод расчета

Как известно из математики, общее решение уравнения представляет собой сумму частного решения исходного неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, получаемого из исходного путем приравнивания его левой части к нулю. Поскольку с математической стороны не накладывается каких-либо ограничений на выбор частного решения, применительно к электротехнике в качестве последнего удобно принять решение $x_{\text{пр}}$, соответствующее искомой переменной x в установившемся послекоммутационном режиме (теоретически для $t \rightarrow \infty$).

Классический метод расчета

Частное решение $x_{\text{пр}}$ уравнения определяется видом функции $f(x)$, стоящей в его правой части, и поэтому называется **принужденной составляющей**. Для цепей с заданными постоянными или периодическими напряжениями (токами) источников принужденная составляющая определяется путем расчета стационарного режима работы схемы после коммутации любым из рассмотренных ранее методов расчета линейных электрических цепей.

Классический метод расчета

Вторая составляющая $x_{св}$ общего решения x уравнения – решение с нулевой правой частью – соответствует режиму, когда внешние (принуждающие) силы (источники энергии) на цепь непосредственно не воздействуют. Влияние источников проявляется здесь опосредованно через энергию, запасенную в полях катушек индуктивности и конденсаторов. Данный режим работы схемы называется свободным, а переменная $x_{св}$ - **свободной составляющей**. В соответствии с вышесказанным, общее решение уравнения имеет вид

$$x = x_{пр} + x_{св}$$

Соотношение показывает, что при классическом методе расчета послекоммутационный процесс рассматривается как наложение друг на друга двух режимов – принужденного, наступающего как бы сразу после коммутации, и свободного, имеющего место только в течение переходного процесса.

Классический метод расчета

Необходимо подчеркнуть, что, поскольку принцип наложения справедлив только для линейных систем, метод решения, основанный на указанном разложении искомой переменной x , справедлив только для линейных цепей.

Начальные условия. Законы коммутации

В соответствии с определением свободной составляющей x_{ce} в ее выражении имеют место постоянные интегрирования A_k , число которых равно порядку дифференциального уравнения. Постоянные интегрирования находятся из начальных условий, которые принято делить на независимые и зависимые. К независимым начальным условиям относятся ток для катушки индуктивности и заряд (напряжение) на конденсаторе в момент времени $t=0$ (момент коммутации). **Независимые начальные условия** определяются на основании законов коммутации (см. табл.).

Начальные условия. Законы коммутации

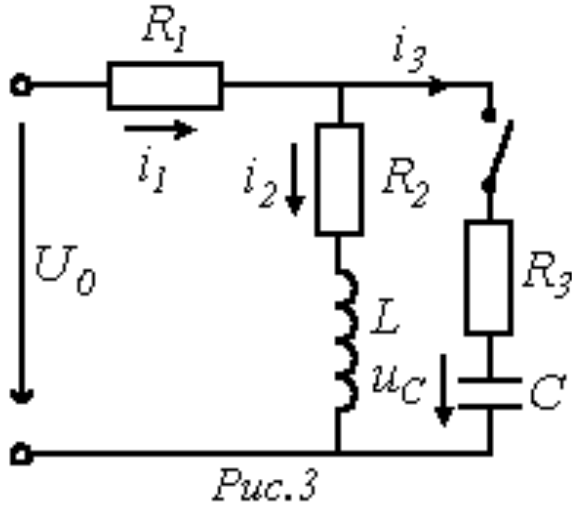
Название закона	Формулировка закона
Первый закон коммутации (закон сохранения тока)	В ветви с катушкой индуктивности ток в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него: $i_L(0_-) = i_L(0_+)$
Второй закон коммутации (закон сохранения заряда (напряжения))	Электрический заряд на конденсаторах, присоединенных к любому узлу, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения: $q(0_-) = q(0_+)$ Напряжение на конденсаторе в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него: $u_C(0_-) = u_C(0_+)$.

Начальные условия. Законы коммутации

Необходимо подчеркнуть, что более общей формулировкой законов коммутации является положение о невозможности скачкообразного изменения в момент коммутации для схем с катушкой индуктивности – токов, а для схем с конденсаторами – зарядов (напряжений) на них.

Зависимыми начальными условиями называются значения остальных токов и напряжений, а также производных от искомой функции в момент коммутации, определяемые по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составляемых по законам Кирхгофа для $t=0$. Необходимое число начальных условий равно числу постоянных интегрирования. Поскольку уравнение вида рационально записывать для переменной, начальное значение которой относится к независимым начальным условиям, задача нахождения начальных условий обычно сводится к нахождению значений этой переменной и ее производных до $(n-1)$ порядка включительно при $t=0$.

Начальные условия. Законы коммутации



Определить токи и производные di_2/dt и du_C/dt в момент коммутации в схеме на рис. 3, если до коммутации конденсатор был не заряжен.

РЕШЕНИЕ

В соответствии с законами коммутации

$$u_C(0) = 0 \quad \text{и} \quad i_2(0) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}.$$

На основании второго закона Кирхгофа для момента коммутации имеет место

$$R_1(i_2(0) + i_3(0)) + i_3(0)R_3 + u_C(0) = U_0,$$

Начальные условия. Законы коммутации

откуда

$$i_3 = \frac{U_0 - R_1 i_2(0)}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad i_1(0) = i_2(0) + i_3(0).$$

Для известных значений $i_1(0)$ и $i_2(0)$ из уравнения

$$R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) + L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 = U_0$$

Определяется $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_0$.

Значение производной от напряжения на конденсаторе в момент коммутации

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i_3(0)}{C}.$$

Корни характеристического уравнения. Постоянная времени

Выражение свободной составляющей общего решения x дифференциального уравнения определяется видом корней характеристического уравнения (см. табл.).

Вид корней характеристического уравнения	Выражение свободной составляющей
Корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ вещественные и различные	$x_{св} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
Корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ вещественные и $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p$ ($m < n$)	$x_{св} = \sum_{k=1}^m A_k t^{k-1} e^{p t} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}$
Пары комплексно-сопряженных корней $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$	$\begin{aligned} x_{св} &= e^{-\delta_k t} (A_k \cos \omega_k t + A_{k+1} \sin \omega_k t) = \\ &= B_k e^{-\delta_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \end{aligned}$

Корни характеристического уравнения. Постоянная времени

Необходимо помнить, что, поскольку в линейной цепи с течением времени свободная составляющая затухает, вещественные части корней характеристического уравнения не могут быть положительными.

При вещественных корнях $\chi_{св}$ монотонно затухает, и имеет место **апериодический переходный процесс**.

Наличие пары комплексно сопряженных корней обуславливает появление затухающих синусоидальных колебаний (**колебательный переходный процесс**).

Корни характеристического уравнения. Постоянная времени

Поскольку физически колебательный процесс связан с периодическим обменом энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, комплексно-сопряженные корни могут иметь место только для цепей, содержащих оба типа накопителей. Быстроту затухания колебаний принято характеризовать отношением

$$\frac{x(t)}{x(t + T_0)} = e^{\delta T_0},$$

которое называется **декрементом колебания**, или натуральным логарифмом этого отношения

$$\Delta = \ln e^{\delta T_0} = \delta T_0,$$

называемым
колебания, где

логарифмическим
 $T_0 = 2\pi / \omega_0.$

декрементом

Корни характеристического уравнения. Постоянная времени

Важной характеристикой при исследовании переходных процессов является постоянная времени τ , определяемая для цепей первого порядка, как

$$\tau = \text{mod}(1/p)$$

где p – корень характеристического уравнения.

Постоянную времени можно интерпретировать как временной интервал, в течение которого свободная составляющая уменьшится в **e** раз по сравнению со своим начальным значением.

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако на практике считается, что он заканчивается при $t=(3...4)\tau$

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Сущность операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной t , которую называют **оригиналом**, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p=s+j\omega$, которую называют **изображением**. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p , а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы. Важнейшим моментом при этом в практическом плане является необходимость определения только независимых начальных условий, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с **прямым преобразованием Лапласа**:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается, как:

$$F(p) \leftarrow f(t)$$

$$F(p) = L\{f(t)\}$$

Следует отметить, что если оригинал $f(t)$ увеличивается с ростом t , то для сходимости интеграла необходимо более быстрое убывание e^{-st} модуля. Функции, с которыми встречаются на практике при расчете переходных процессов, этому условию удовлетворяют.

В качестве примера в таблице приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе нестационарных режимов.

Оригинал $f(t)$	A	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\operatorname{ch} \alpha t$
Изображение $F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Свойства изображений

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \stackrel{\bullet}{=} \sum_{k=1}^n F_k(p)$$

2. При умножении оригинала на коэффициент на тот же коэффициент умножается изображение:

$$Af(t) \stackrel{\bullet}{=} AF(p)$$

С использованием этих свойств и данных табл. 1, можно показать, например, что

$$U_0(1 - e^{-\alpha t}) \stackrel{\bullet}{=} \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha}$$

Изображения производной и интеграла

В курсе математики доказывается, что если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $\frac{df}{dt} \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0)$, где $f(0)$ - начальное значение функции $f(t)$.

Таким образом, для напряжения на индуктивном элементе можно записать $u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\bullet}{=} LpI(p) - Li(0)$

или при нулевых начальных условиях $u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\bullet}{=} LpI(p)$

Отсюда операторное сопротивление катушки индуктивности $Z(p) = Lp$

Изображения производной и интеграла

Аналогично для интеграла: если $\dot{f}(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $\int_0^t f(t) dt \stackrel{\bullet}{=} \frac{F(p)}{p}$

С учетом ненулевых начальных условий для напряжения на конденсаторе можно записать:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$$

Тогда

$$\dot{u}_C(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}$$

или при нулевых начальных условиях

$$\dot{u}_C(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{Cp} I(p)$$

откуда **операторное сопротивление конденсатора**

$$Z(p) = \frac{1}{Cp}$$

Закон Ома в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь, выделенную из некоторой сложной цепи.

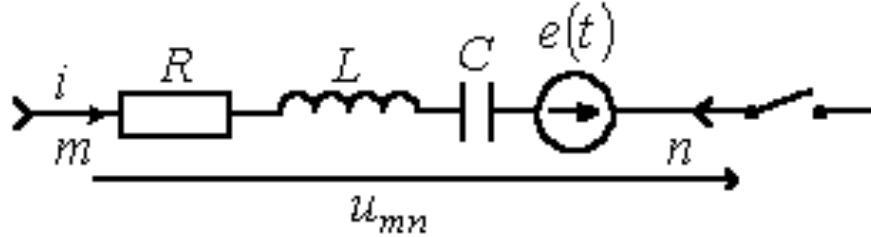


Рис.1

Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.

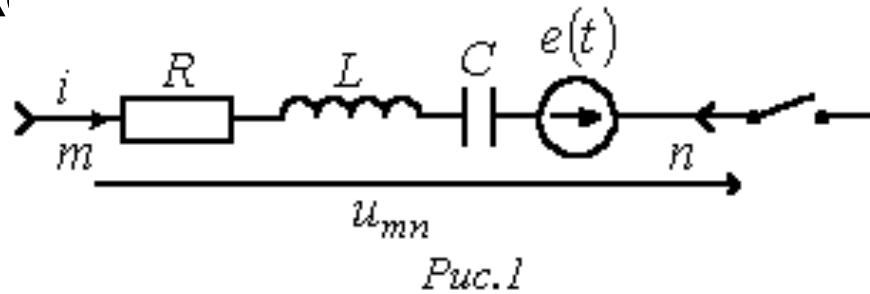
Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) - e(t)$$

Тогда на основании приведенных выше соотношений получим:

$$U_{mn}(p) = I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p)$$

Закон Ома в операторной форме



Отсюда

$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ - операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.

Закон Ома в операторной форме

Следует обратить внимание, что операторное сопротивление соответствует комплексному сопротивлению ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$.

$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}$$

Уравнение есть математическая запись закона Ома для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с ним для ветви на рис. 1 можно нарисовать операторную схему замещения, представленную на рис. 2.

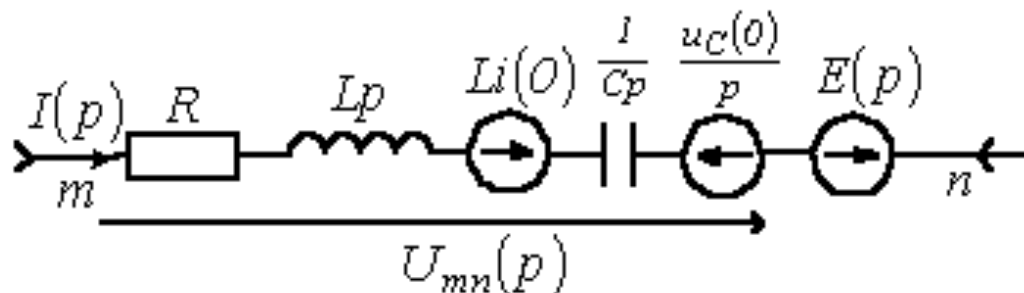


Рис.2

Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа:

алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0$$

Второй закон Кирхгофа:

алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура

$$\sum_{k=1}^m E_k(p) = \sum_{k=1}^m U_k(p)$$

Законы Кирхгофа в операторной форме

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета ненулевых начальных условий (если они имеют место). С их учетом последнее соотношение может быть переписано в развернутом виде

$$\sum_{k=1}^m \left(E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^m \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I_k(p)$$

ПРИМЕР

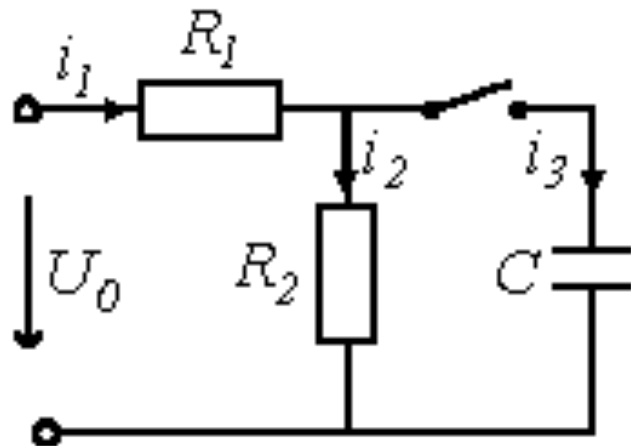


Рис.3

Найдем выражение для значений токов в цепи на рис. в двух случаях:

$$u_C(0) = 0;$$

$$u_C(0) \neq 0.$$

В первом случае в соответствии с законом Ома

$$I_1(p) = \frac{U_0(p)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}}} = \frac{U_0(1 + R_2 Cp)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}$$

ПРИМЕР

Тогда

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{1}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}$$

и

$$I_3(p) = I_1(p) \frac{R_2 Cp}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0 R_2 C}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}$$

Во втором случае, т.е. при $u_C(0) \neq 0$, для цепи на рис. 3 следует составить операторную схему замещения, которая приведена на рис. 4

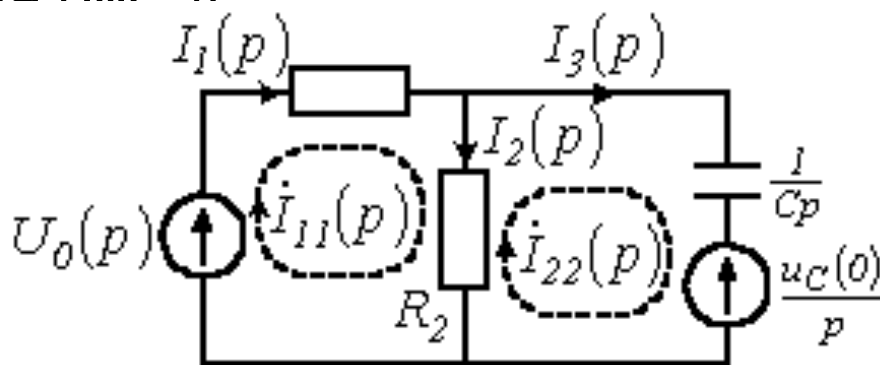


Рис. 4

ПРИМЕР

Изображения токов в ней могут быть определены любым методом расчета линейных цепей, например, методом контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 &= \frac{U_0}{p}; \\ -I_{11}(p)R_2 + I_{22}\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) &= -\frac{u_C(0)}{p}, \end{aligned}$$

откуда

$$I_1(p) = I_{11}(p)$$

$$I_2(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p)$$

$$I_3(p) = I_{22}(p)$$

Переход от изображений к оригиналам

Переход от изображения искомой величины к оригиналу может быть осуществлен следующими способами:

1. Посредством обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения (1) и сокращенно записывается, как:

$$f(t) = L^{-1} \{ F(p) \}$$

На практике этот способ применяется редко.

Переход от изображений к оригиналам

2. По таблицам соответствия между оригиналами и изображениями

В специальной литературе имеется достаточно большое число формул соответствия, охватывающих практически все задачи электротехники. Согласно данному способу необходимо получить изображение искомой величины в виде, соответствующем табличному, после чего выписать из таблицы выражение оригинала.

Например, для изображения тока в цепи на рис. 5 можно записать

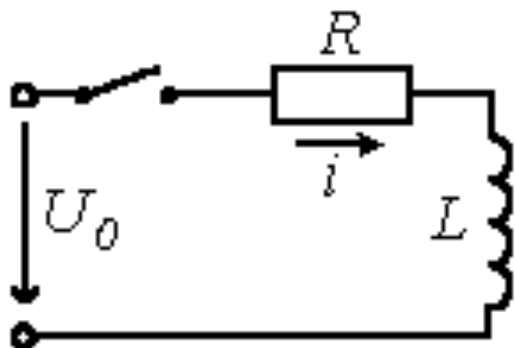


Рис.5

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)} = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{U_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right)$$
$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Переход от изображений к оригиналам

3. С использованием формулы разложения

Пусть изображение искомой переменной $F(p)$ определяется отношением двух полиномов

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots a_1 p + a_0}$$

где $m < n$.

Это выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}$$

где p_k - k -й корень уравнения $F_2(p) = 0$.

Переход от изображений к оригиналам

Для определения коэффициентов A_k умножим левую и правую части соотношения (3) на $(p - p_k)$:

$$(p - p_k) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{A_i}{p - p_i} + A_k = \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)}$$

При $p \rightarrow p_k$

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p)}$$

Рассматривая полученную неопределенность типа 0/0 по правилу Лопиталя, запишем

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p - p_k)}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}$$

Переход от изображений к оригиналам

Таким образом,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}$$

Поскольку отношение $\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}$ есть постоянный коэффициент, то

учитывая, что $e^{\alpha t} = \frac{1}{p - \alpha}$, окончательно получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$$

Соотношение представляет собой формулу разложения.

Если один из корней уравнения $F_2(p) = 0$ равен нулю, т.е.

$F_2(p) = p F_3(p)$, то уравнение сводится к виду

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}$$

Переход от изображений к оригиналам

В заключение раздела отметим, что для нахождения начального $f(0)$ и $f(\infty)$ конечного значений оригинала можно использовать **предельные соотношения**

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p);$$

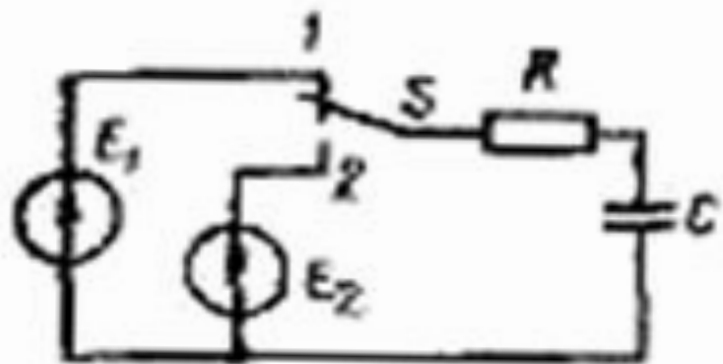
$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p),$$

которые также могут служить для оценки правильности полученного изображения.

Переходные процессы в последовательной RC-цепи при скачкообразном изменении ЭДС

Рассмотрим переходные процессы в последовательной RC-цепи (рисунок) при скачкообразном изменении ЭДС идеализированного источника постоянного напряжения:

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0, \\ E_2 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$



Такое изменение ЭДС источника напряжения происходит, например, когда в цепи, схема которой приведена на рис. 6.4, б, ключ S в момент времени $t=0$ перебрасывают из положения 1 в положение 2. Очевидно, что в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации, напряжение на емкости равнялось напряжению на зажимах источника энергии при $t<0$ (предполагается, что до коммутации цепь находилась в установившемся режиме).

Переходные процессы в последовательной RC-цепи при скачкообразном изменении ЭДС

Используя второй закон коммутации, находим единственное независимое начальное условие:

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = E_1 \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи можно составить относительно любой из неизвестных величин (напряжения на сопротивлении u_R , напряжения на емкости u_C , тока сопротивления i_R , тока емкости i_C), однако, учитывая, что для данной цепи известно начальное значение напряжения на емкости, целесообразно составить уравнение относительно этого напряжения.

Исключая из основной системы уравнений электрического равновесия цепи при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E_2; \\ i_C &= i_R = i; \\ i_C &= C \frac{du_C}{dt}; \\ u_R &= Ri_R \end{aligned} \quad (3)$$

все неизвестные величины, кроме u_C , получаем:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2. \quad (4)$$

Напряжение на емкости при $t \geq 0$ представим в виде суммы вынужденной и свободной составляющих:

$$u_C = u_{C_{\text{вын}}} + u_{C_{\text{св}}} \quad (5)$$

Очевидно, что с течением времени после коммутации в цепи должен установиться режим постоянного тока, причем установившееся значение тока емкости равно нулю (сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико), а установившееся значение напряжения емкости — напряжению источника энергии после коммутации. Таким образом, вынужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C_{\text{вын}}} = E_2 \quad (6)$$

Характеристическое уравнение цепи $RC_p + 1 = 0$ имеет единственный корень

$$p_1 = -\frac{1}{RC} = -1/\tau_c, \quad (7)$$

где $\tau_c = RC$ — постоянная времени последовательной RC-цепи, поэтому свободная составляющая напряжения на емкости $u_{C_{\text{св}}}$ содержит один экспоненциальный член:

$$u_{C_{\text{св}}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau_c} \quad (8)$$

Используя выражения (5) — (8), находим напряжение на емкости после коммутации при произвольных начальных условиях:

$$u_C = E_2 + A_1 e^{-t/\tau_C} \quad (9)$$

Для определения постоянной интегрирования A_1 воспользуемся независимым начальным условием (2). Полагая в (9) $t=0$, $u_C = u_C(0_+) = E_1$, получаем

$$E_1 = E_2 + A_1 ,$$

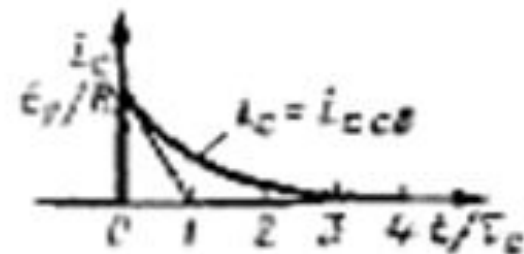
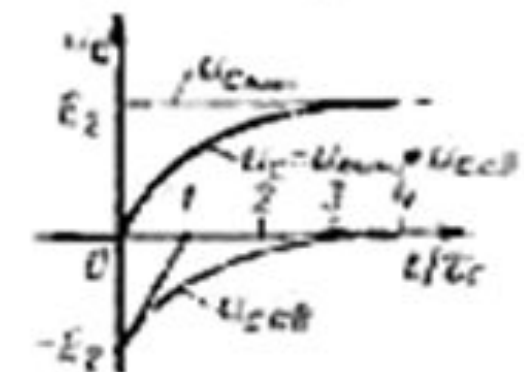
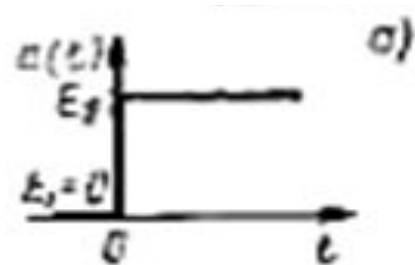
откуда $A_1 = E_1 - E_2$.

Таким образом, при заданных начальных условиях напряжение на емкости после коммутации ($t \geq 0$) описывается выражением:

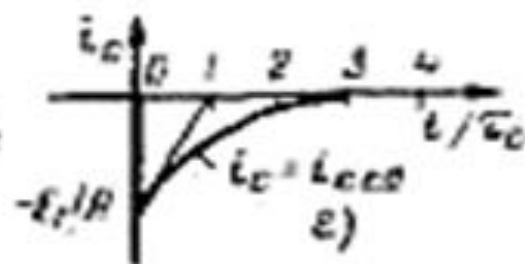
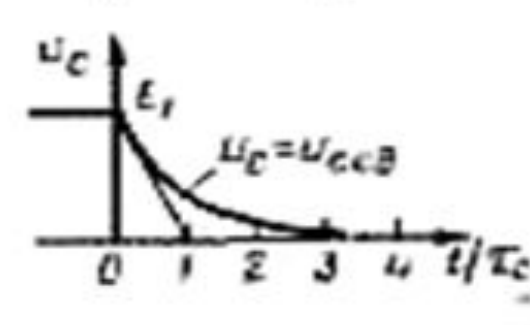
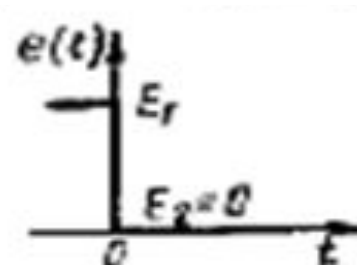
$$u_C = E_2 - (E_2 - E_1) e^{-t/\tau_C} \quad (10)$$

Зависимость напряжения на емкости от времени при различных соотношениях между E_1 и E_2 показана на рис. в — д, здесь же дана зависимость от времени тока емкости i_C , которая при $t \geq 0$ определяется путем дифференцирования выражения (10) по времени и умножения результата на C :

$$i_C = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-t/\tau_C} \quad (11)$$

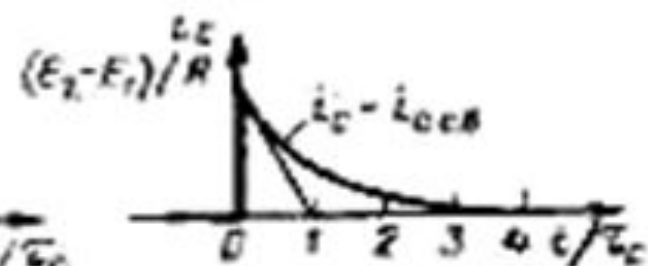
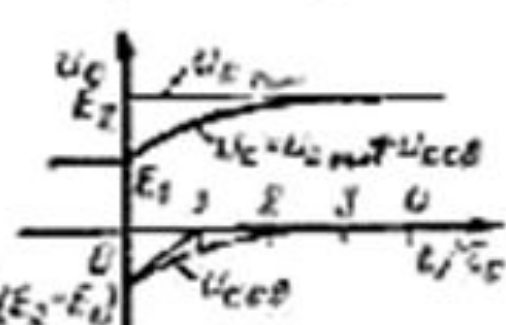
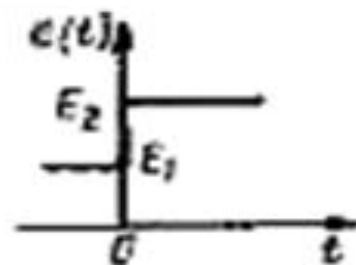


b)



в)

в)



г)

Как видно из рис. в — д, в начальный момент после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и до коммутации, а затем плавно изменяется, стремясь в пределе к E_2 . Ток емкости в начальный момент скачком изменяется от нуля до начального значения:

$$i_C(0_+) = (E_2 - E_1)/R, \quad (12)$$

а затем плавно уменьшается, стремясь к нулю. В связи с тем, что установившееся значение тока емкости до и после коммутации равно нулю, ток рассматриваемой цепи содержит только свободную составляющую.

Анализ выражения (12) показывает, что начальное значение тока емкости $i_C(0_+)$ численно равно постоянному току, который протекал бы в цепи после коммутации, если бы емкость C была заменена идеальным источником напряжения.

Следовательно, в начальный момент времени после коммутации емкость ведет себя подобно источнику напряжения, ЭДС которого равна начальному значению напряжения на емкости. Если начальное значение напряжения на емкости равно нулю, то в начальный момент после коммутации ветвь с емкостью можно считать короткозамкнутой, т. е. сопротивление емкости при $t = 0_+$ равно нулю.

Как следует из выражений (9) и (11), скорость затухания свободных составляющих тока и напряжения емкости не зависит от значений ЭДС идеализированного источника напряжения до и после коммутации, а определяется только **постоянной времени цепи τ_C** , которая **численно равна промежутку времени, в течение которого свободные составляющие тока и напряжения уменьшаются в $e \approx 2,718$ раз**. Можно показать, что при любом $t \geq 0$

$$\tau_C = \left| \frac{u_{C_{CB}}}{du_{C_{CB}}/dt} \right| = \left| \frac{i_{C_{CB}}}{di_{C_{CB}}/dt} \right|$$

Таким образом, постоянная времени рассматриваемой цепи численно равна длине подкасательной к кривой $u_{C_{CB}}$ или $i_{C_{CB}}$ при любом значении $t \geq 0$, т. е. длине отрезка временной оси, заключенного между какой-либо точкой $t = t_1 \geq 0$ и точкой пересечения временной оси касательной, проведенной к кривой $u_{C_{CB}}$ или $i_{C_{CB}}$ в точке $u_{C_{CB}}(t_1)$ или $i_{C_{CB}}(t_1)$. Для определения постоянной времени цепи касательную к кривым $i_{C_{CB}}$ или $u_{C_{CB}}$ наиболее удобно проводить при $t_1 = 0$. В этом случае она пересекает ось времени в точке $t = \tau_C$ (рис. в – д).

Чем больше постоянная времени цепи, тем медленнее затухают свободные составляющие токов и напряжений, а следовательно, токи и напряжения цепи медленнее приближаются к установившимся значениям.

● Теоретически процесс установления нового режима длится бесконечно долго. Однако, учитывая, что к моменту времени, равному $3\tau_c$ после коммутации, свободные составляющие уменьшаются до уровня менее 0,05 от начального значения, а к моменту времени, равному $5\tau_c$ — до уровня менее 0,01 от начального значения, переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися через промежуток времени $(3 - 5)\tau_c$ после коммутации.

Подключение к последовательной RL-цепи источника гармонического напряжения

Рассмотрим переходные процессы в последовательной RL-цепи, содержащей идеализированный источник, ЭДС которого изменяется во времени по закону:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E_m \cos(\omega t + \Psi) & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Временная диаграмма $e(t)$ при $\Psi > 0$ приведена на рис. а.

В этом случае ток индуктивности в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, $i_L(0^-) = 0$.

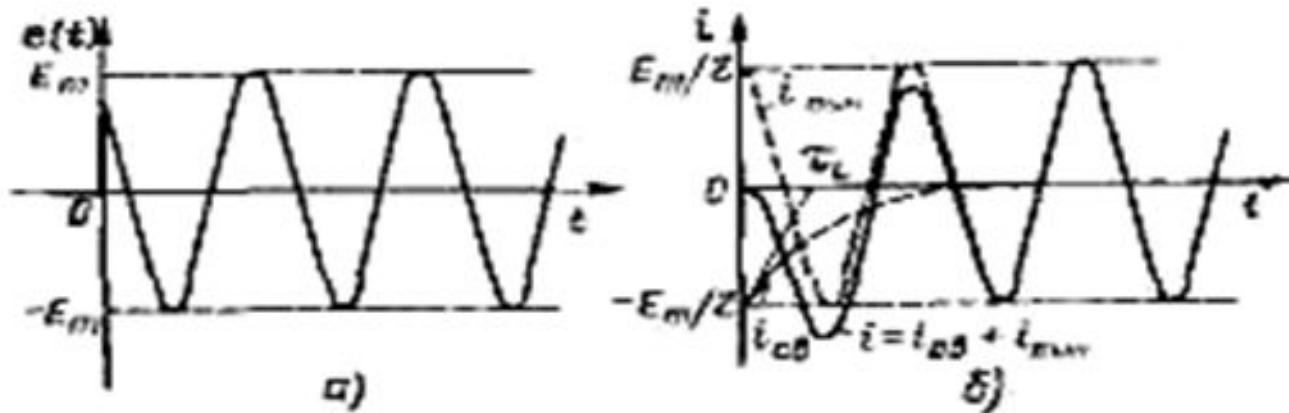


Рис. К исследованию переходных процессов при включении источника гармонического напряжения в последовательной RL-цепи

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно тока $i = i_L$, при $t > 0$ имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \cos(\omega t + \Psi). \quad (14)$$

Вынужденная составляющая тока может быть найдена с помощью метода комплексных амплитуд:

$$i_{\text{вын}} = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \Psi - \varphi)$$

где $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L/R)$ — модуль и аргумент комплексного входного сопротивления цепи. Характеристическое уравнение цепи

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень $p_1 = -R/L$, поэтому свободная составляющая тока содержит один экспоненциальный член:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-t/\tau_L}$$

где $\tau_L = L/R$ — постоянная времени последовательной RL-цепи.

Суммируя свободную и вынужденную составляющие, находим общее решение дифференциального уравнения цепи (14) после коммутации:

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \Psi - \varphi) + A_1 e^{-t/\tau_L} \quad (15)$$

● Для определения постоянной интегрирования воспользуемся первым законом коммутации, в соответствии с которым начальное значение тока рассматриваемой цепи должно равняться нулю:

$$i(0_+) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (16)$$

Подставляя (16) в выражение (15), получаем $\frac{E_m}{z} \cos(\omega t - \varphi) + A_1 = 0$, откуда

$$A_1 = -\frac{E_m}{z} \cos(\omega t - \varphi). \quad (17)$$

С учетом (17) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид:

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \Psi - \phi) - \frac{E_m}{z} [\cos(\omega t - \varphi)] e^{-t/\tau_L}$$

Характер переходных процессов зависит от соотношения между начальной фазой ψ ЭДС идеализированного источника напряжения и аргументом ϕ входного сопротивления цепи. Если ψ выбирают таким образом, что начальные значения вынужденной $i_{\text{вын}}(0_+)$ и свободной $i_{\text{св}}(0_+)$ составляющих равны нулю ($\Psi = \phi \pm \pi/2$), то свободная составляющая тока тождественно равна нулю. Переходные процессы в цепи в этом случае отсутствуют, т. е. установившийся режим наступает сразу же после коммутации. При $\Psi = \phi$ или $\Psi = \phi \pm \pi$ начальные значения свободной и принужденной составляющих максимальны, и отличие в форме кривых $i = i(t)$ и $i_{\text{пр}} = i_{\text{пр}}(t)$ выражено наиболее резко (рис. б).

Как и для последовательной RC-цепи, скорость затухания свободной составляющей тока последовательной RL-цепи не зависит от характера внешнего воздействия, а определяется только постоянной времени τ_L . За промежуток времени $t = \tau_L$ свободная составляющая тока уменьшается в e раз и к моменту времени $t = (3 \div 5)\tau_L$ после коммутации переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися.