

Математика 2 семестр.

Лекция № 2.

**Функции нескольких
переменных.**

Понятие о функции нескольких переменных.

Пусть дано некоторое множество D упорядоченных пар чисел (x, y) . В плоскости, отнесенной к прямоугольной декартовой системе координат OXY , каждой паре чисел (x, y) соответствует точка $M(x, y)$ и наоборот, каждой точке $M(x, y)$ соответствует пара чисел (x, y) . Таким образом, геометрически множество D представляет собой некоторое множество точек плоскости OXY .

Определение.

Если в силу некоторого закона каждой паре чисел (x, y) из множества D ставится в соответствие определенное значение переменной z , то z называется **функцией** двух переменных x и y , определенной на множестве D , и записывается в виде $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$.

Понятие о функции нескольких переменных.

- Множество $D=D(f)$ тех точек (x,y) для которых $f(x,y)$ принимает действительные значения называется **областью определения функции**.
- Переменные x и y называются **аргументами** (независимыми переменными), а z — зависимой переменной (функцией).
- Множество $E=E(f)$ тех значений z , которые эта переменная принимает в области определения функции, называется **областью изменения функции**, при этом $z \in R$ (R - множество действительных чисел).

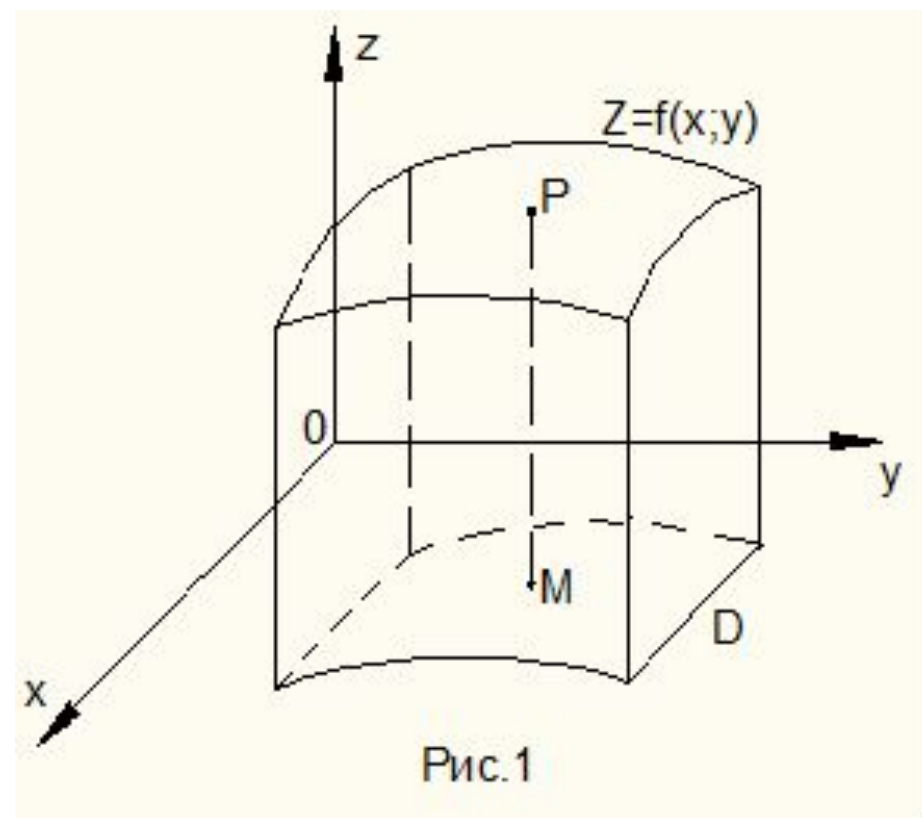
Пример.

Областью определения D функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $1 - x^2 - y^2 > 0$ или неравенству $x^2 + y^2 < 1$, т.е. это круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$, исключая эту окружность (открытый круг), а областью значений $E(f)$ является промежуток $[1, +\infty)$.

Геометрическое изображение функции 2-х переменных.

Каждая пара значений аргументов (x, y) геометрически определяет точку M на плоскости, а значение функции в этой точке есть аппликата z пространственной точки $P(x, y, z)$.

Геометрическое место точек P есть поверхность, которая взаимно однозначно проектируется в область D плоскости OXY . Эта поверхность служит геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$.



Функции двух переменных могут быть как однозначными, так и многозначными. Мы в дальнейшем рассматриваем, как правило, функции однозначные, т.е. такие, для которых каждой паре значений (x, y) соответствует только одно значение z . Однозначность функции $z = f(x, y)$ геометрически выражается в том, что прямые, параллельные оси Oz , пересекают график функции не более, чем в одной точке.

Евклидово n – мерное пространство.

Упорядоченную совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ назовем точкой, а сами числа – ее координатами. Запись $M(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ означает, что точка M имеет координаты $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$. Множество всех указанных точек называется **евклидовым n -мерным пространством**, если для любых 2-х точек $M_1(x'_1, x'_2 \dots x'_n)$ и $M_2(x''_1, x''_2 \dots x''_n)$ определено расстояние между ними по формуле:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{((x'_1 - x''_1))^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_n - x''_n)^2}$$

и обозначается E^n , где n - размерность пространства.

Понятие функции от любого числа переменных.

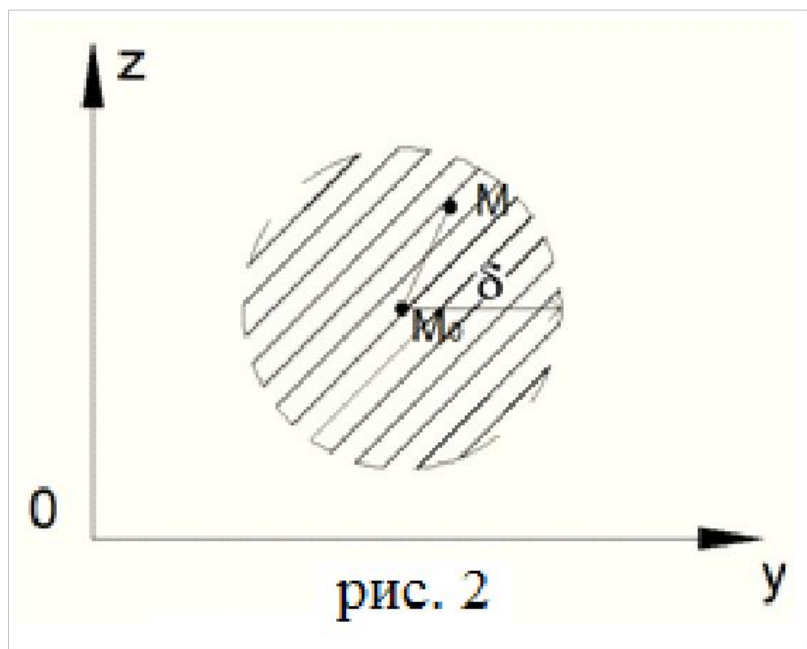
Если в силу некоторого закона каждой точке $M(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ из некоторого множества $D \subset E^n$ сопоставлено в соответствие определенное значение переменной u , то u называют функцией от n переменных $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, определенной на множестве D , и обозначают $u = f(M) = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$. При этом множество D называют областью определения функции $u = f(M)$.

В случае функции 3-х переменных пишут $u = f(x, y, z)$ и область определения D будет некоторым множеством троек чисел (x, y, z) , тогда геометрически D представляет собой некоторое множество точек пространства $Oxyz$.

Пример.

Областью D функции $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ является множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, т.е. это шар радиусом 1 с центром в начале координат, включая ограничивающую его сферу.

Окрестность точки на плоскости.



Пусть $M(x_0, y_0)$ – точка плоскости. Будем называть δ -окрестностью (или окрестностью) точки M_0 множество точек плоскости, удаленных от точки M_0 менее чем на δ :
 $|MM_0| < \delta$ или

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Геометрической окрестностью точки M_0 будет множество точек, лежащих внутри окружности радиуса δ с центром в точке M_0 (рис. 2).

Предел функции нескольких переменных.

Пусть функция $U = f(M)$, где $M \in E^n$, определена в некоторой окрестности точки $M \in E^n$, исключая, может быть, саму эту точку.

Число A называется **пределом функции $f(M)$** при стремлении точки M к точке M_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех точек M удовлетворяющих условию $|MM_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ или $f(M) \rightarrow A$ при $M \rightarrow M_0$

Важно подчеркнуть, что, по определению, предел функции не зависит от направления движения точки M к точке M_0 . Поэтому, если окажется, что при $M \rightarrow M_0$ с разных сторон $f(M)$ стремится к разным предельным значениям, то функция $U = f(M)$ предела не имеет.

Функция $u = f(M)$ называется бесконечно малой при $M \rightarrow M_0$, если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$.

Приведенное определение справедливо для функции произвольного числа аргументов.

Для предела функции нескольких переменных справедливы теоремы, аналогичные соответствующим теоремам о пределах функции одного аргумента.

Непрерывность функции нескольких переменных в точке.

Функция $z = f(M) = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она:

- 1) определена в точке M_0 и ее окрестности;
- 2) имеет конечный предел $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$
- 3) этот предел равен значению функции z в точке M_0 ,

$$\text{т. е. } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Функция $z = f(M)$ непрерывна в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точка M_0 называется точкой разрыва функции, если для нее не выполняется хотя бы одно из трех условий в определении непрерывности.

Точки и линии разрыва функции.

Точки разрыва данной функции могут располагаться как отдельно (изолированные точки разрыва), так и образовывать целые линии (линии разрыва).

Например, функция $z = \frac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2y}$ имеет линию разрыва $y^2 = 2x$, т.е. точки разрыва расположены на параболе. При приближении точки $M(x; y)$ к какой-либо точке этой параболы данная функция бесконечно возрастает.

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.

Полным приращением функции $z = f(M) = f(x, y)$ при переходе от точки M_0 к точке M называется разность значений функции в этих точках, а именно

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Условие непрерывности функции в точке M_0 равносильно условию $\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta z = 0$ или $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \Delta z = 0$,

т.е. функция $z = f(x, y)$ непрерывна в некоторой точке, если достаточно малые изменения координат этой точки вызывают сколь угодно малое изменение значения самой функции.

Частные приращения функции.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, где x и y – независимые переменные. Пусть переменная x получает приращение Δx , сохраняя значение y неизменным. Получим частное приращение z по x :

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частные производные первого порядка.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по одной из переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{если он существует})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{если он существует})$$

Используются и другие обозначения частных производных:

$$z'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x \text{ и т.д.}$$

Символы $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ как дроби трактовать нельзя (в отличие от случая одной переменной), их рассматривают как одно целое. Частная производная функции нескольких переменных $U = f(M)$ по одному из аргументов равна обычной производной по этому аргументу при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные находятся по формулам и правилам вычисления производных от функции одной переменной.

Пример.

$$1) \ z = x^2 + y^2; \ z'_x = 2x; \ z'_y = 2y.$$

$$2) \ U = \frac{xy}{z}; \ U'_x = \frac{y}{z}; \ U'_z = -\frac{xy}{z^2}; \ U'_y = \frac{x}{z}.$$

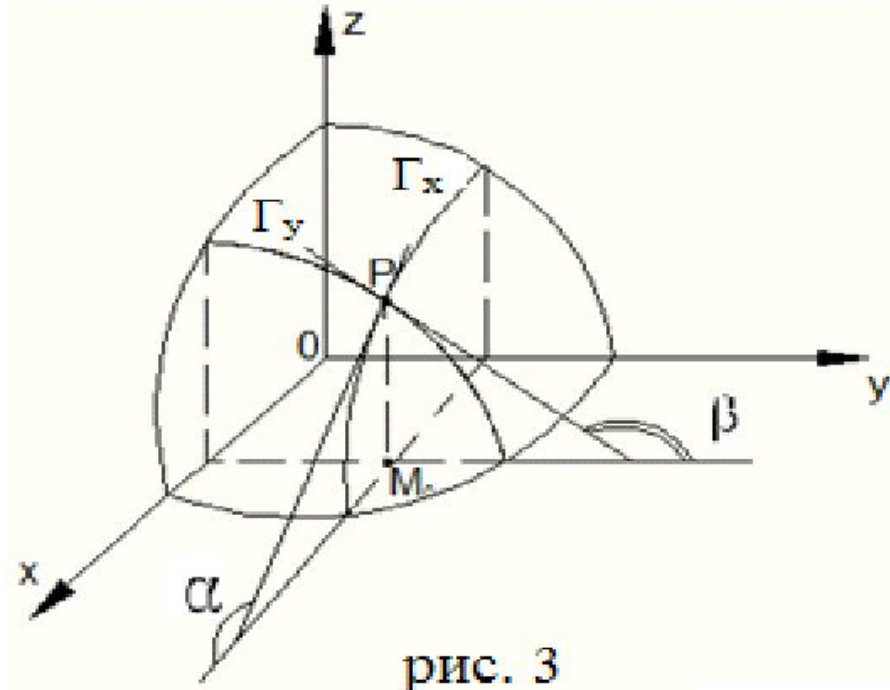


рис. 3

Для функции $z = f(x, y)$ выясним геометрический смысл ее частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$.

Графиком функции является некоторая поверхность P (рис. 3). Полагая $y = y_0$, мы получим плоскую кривую Γ_x , представляющую собой сечение поверхности P плоскостью $y = y_0$, параллельной координатной плоскости.

Уравнение кривой $\Gamma_x: z = f(x, y_0)$ представляет функцию одной переменной x . Исходя из

геометрического смысла производной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ для функции одной переменной, полагаем, что $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между касательной, проведенной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке M_0 и осью (рис. 3). Аналогично, если Γ_y есть сечение поверхности P плоскостью $x = x_0$ и β – угол, образованный касательной к кривой $\Gamma_y: z = f(x_0, y)$ в точке M_0 и осью Oy , то

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

Геометрический смысл частной производной:

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ ($\frac{\partial z}{\partial y}$) – это угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = \text{const}$ ($x = \text{const}$) в точке $M(x, y, z)$.

Физический смысл частной производной:

$\frac{\partial z}{\partial x}$ ($\frac{\partial z}{\partial y}$) – это скорость изменения функции в точке в направлении оси Ox (Oy).

Литература.

- Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.— Электрон. Текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: [http://www. iprbooksho p.ru/6298](http://www.iprbookshop.ru/6298). — ЭБС «IPRbooks»
- Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] : [учебное пособие] / Д. Т. Письменный. - 9-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2010. - 603 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-4073-9
- Шипачев, В. С. Курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; - 4-е изд., испр. - Москва : Оникс, 2009. - 600 с. : ил. - ISBN 978-5-488-02067-2