МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Истинная модель парной линейной регрессии $Y = a + \mathbf{b}*X + e$.

Для ее оценки используется выборка:

(Y_1, X_1)

.....

(Y_n, X_n)

Получается выборочное уравнение регрессии

$$Y = a + b * X$$

Для элемента (Y_i, X_i) выборки, i = 1, …, n, можно записать:

$$\hat{Y}_i = a + b * X_i$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

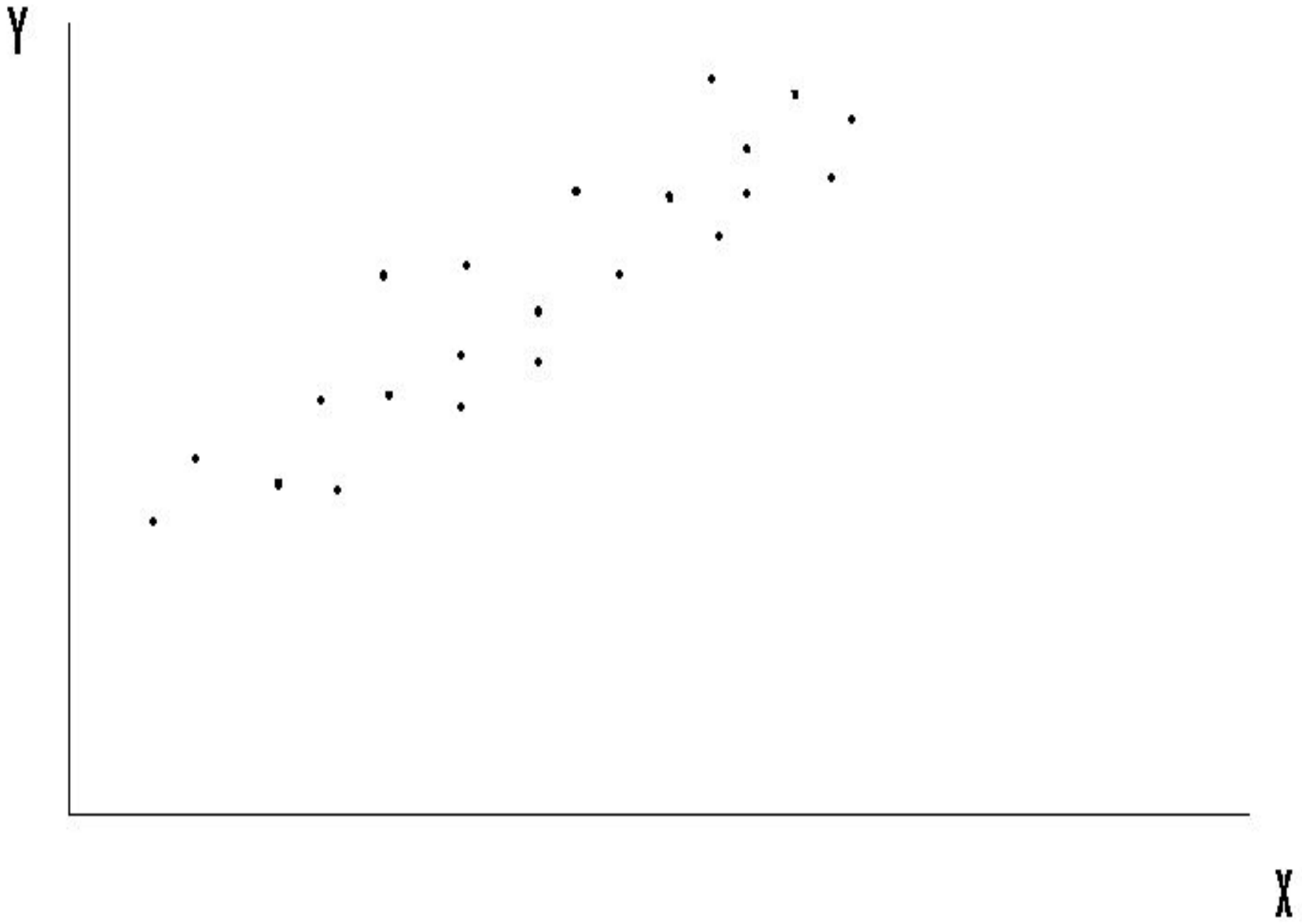
$$Y_i = a + b * X_i + e_i$$

Как оцениваются по выборке коэффициенты регрессии?

Выборка (Y_i, X_i), по которой мы должны оценить теоретическую модель

$$Y = a + \mathbf{b}*X + e,$$

графически представляется в виде «облачка» точек:


Y
X

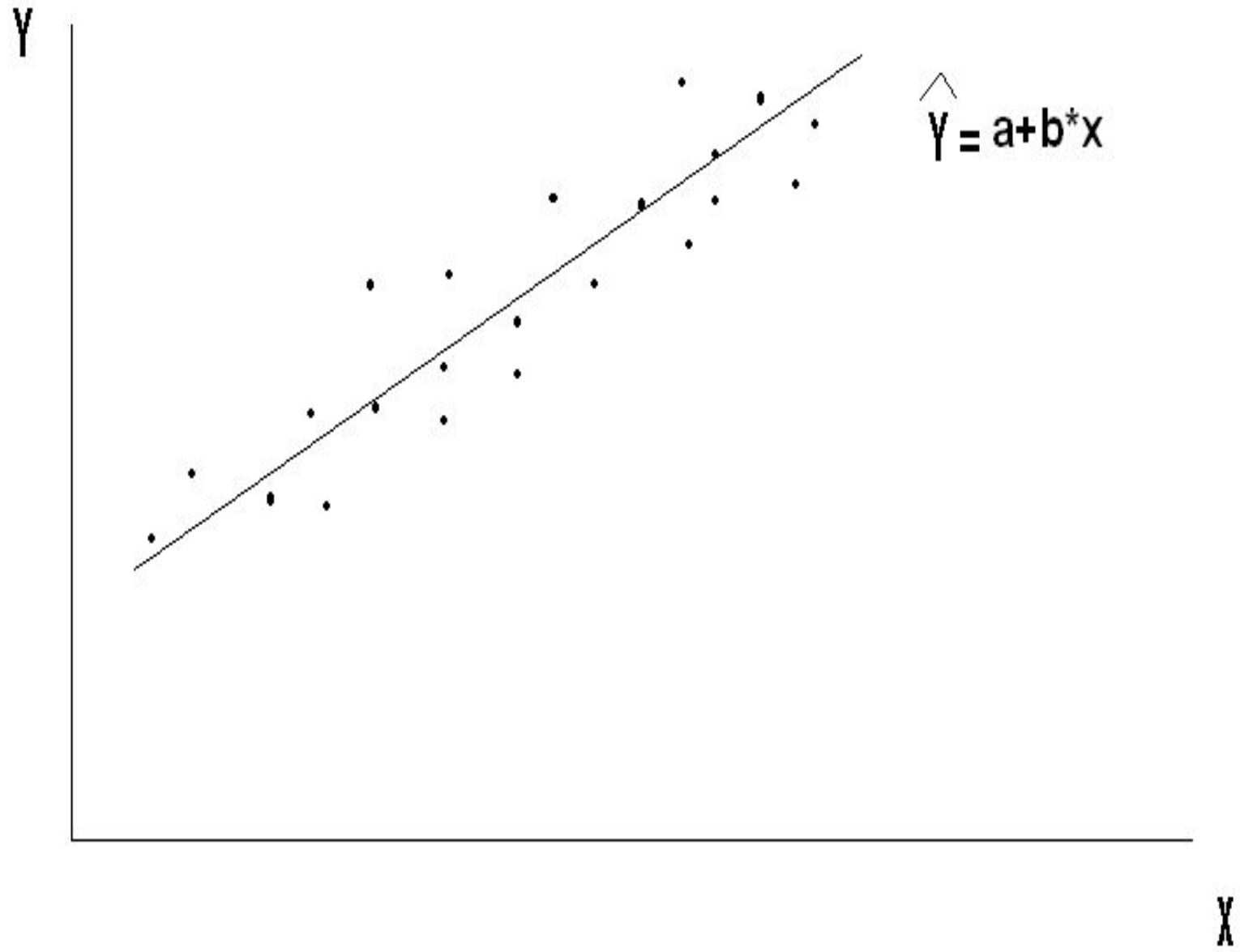
По этим точкам мы хотим получить такое выборочное уравнение

$$Y = a + b * X$$

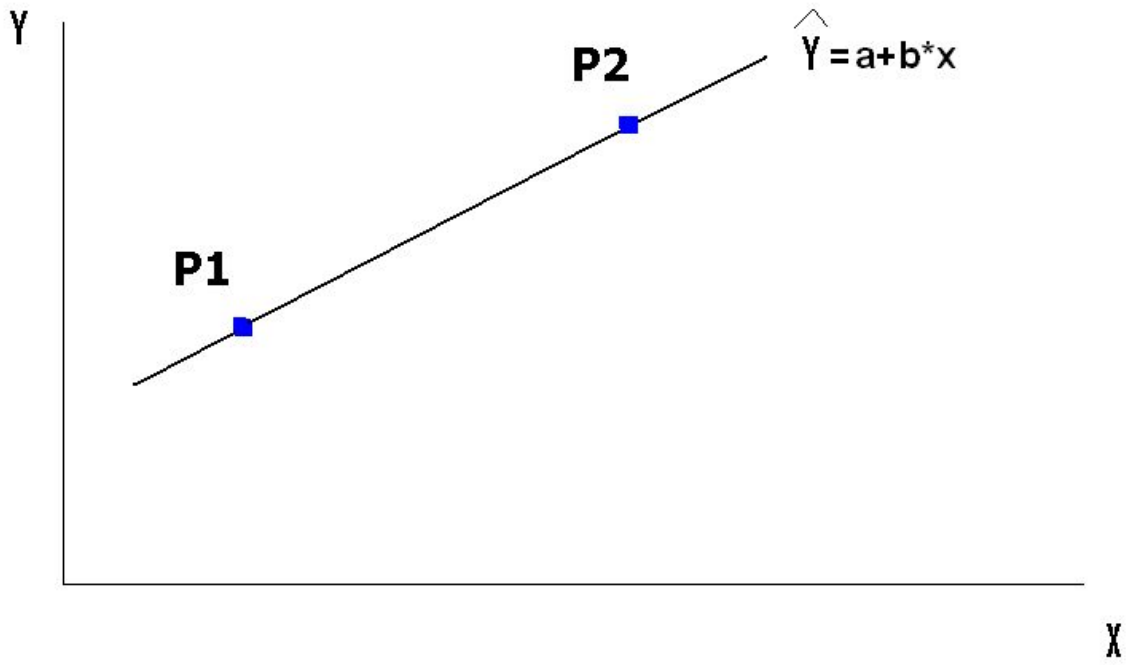
(т. е. оценки a и b), которое как можно точнее представляло бы истинную линию регрессии

Интуиция подсказывает:

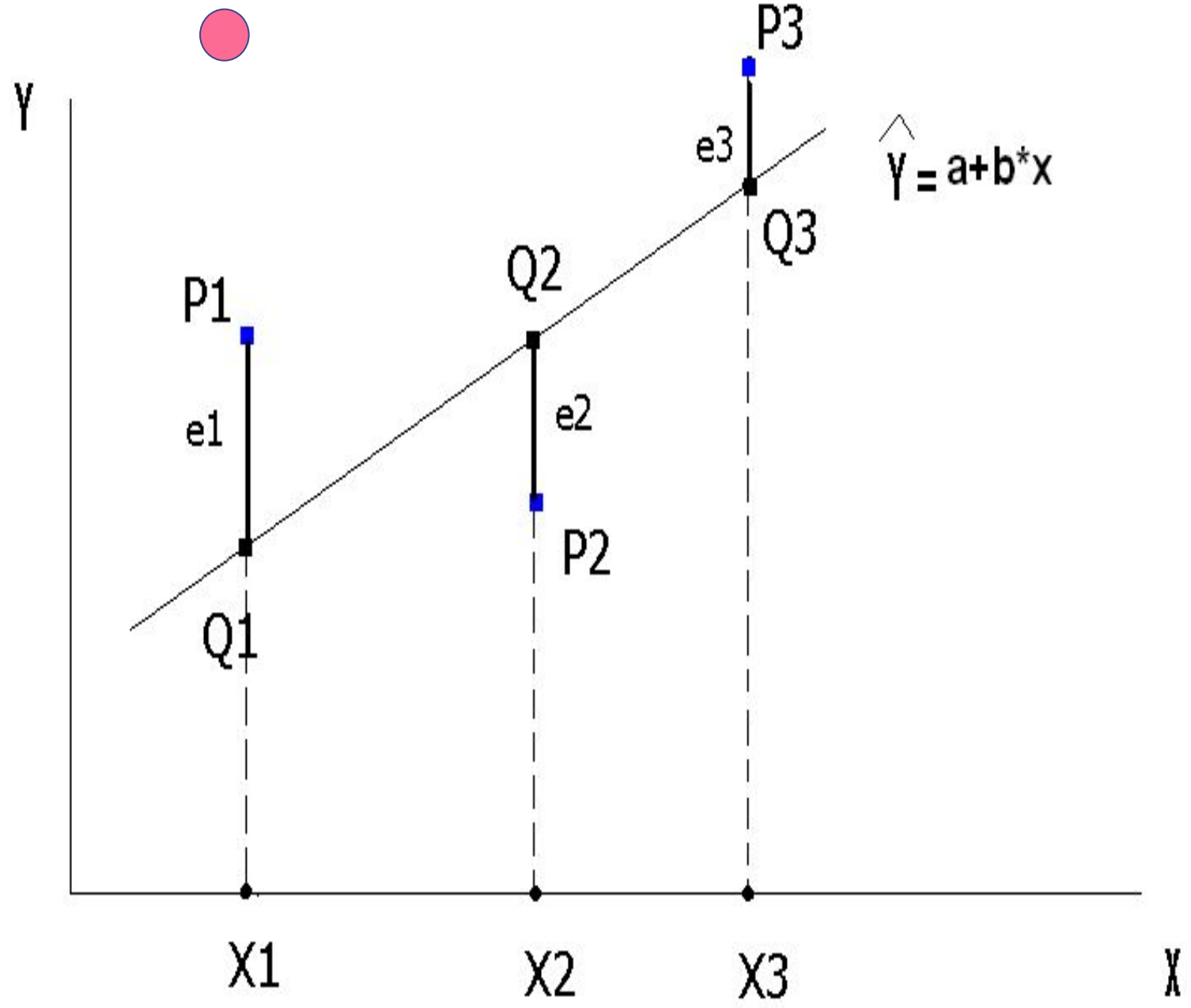
Чем лучше оцененная прямая регрессии представляет выборку, тем точнее она приближает истинную прямую регрессии.


Y
$\hat{Y} = a+b*x$
X

Если выборка состоит только из двух точек, то проблем нет:



Если точек больше двух:


Y
P3
e3
$\hat{Y} = a+b*x$
Q3
Q2
P1
e1
e2
P2
Q1
X1
X2
X3
X

Точки выборки

$P1 = (X_1, Y_1)$, $P2 = (X_2, Y_2)$, $P3 = (X_3, Y_3)$

моделируются (оцениваются) точками линии регрессии

$Q1 = (X_1, \hat{Y}_1)$, $Q2 = (X_2, \hat{Y}_2)$, $Q3 = (X_3, \hat{Y}_3)$.

Точность моделирования Y_i для каждого X_i определяется величиной ошибки

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_1.$$

Хотелось бы, чтобы выборочное уравнение $\hat{Y} = a + b*X$ с наименьшими ошибками моделировало бы **сразу все** выборочные значения Y_i, $i = 1, \ldots, n$.

Принцип метода наименьших квадратов

Для данной выборки $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ параметры a и b рассчитываются таким образом, чтобы получить минимальное значение суммы квадратов остатков:

$$\min \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Или

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2 = S$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем систему нормальных уравнений для коэффициентов регрессии

$$\begin{cases} n*a-\sum_{i=1}^{n}Y_i+b*\sum_{i=1}^{n}X_i=0 \\ a*\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-\sum_{i=1}^{n}X_i*Y_i+a*\sum_{i=1}^{n}X_i=0 \end{cases}$$

Решение этой системы дает значения для оценок параметров уравнения регрессии a и b:

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

Решение уравнения регрессии в Excel

1. **На листе Excel выделяют блок ячеек в котором**

   - строк всегда 5

   - столбцов–(m+1), где m – число независимых переменных

2. Вводят функцию: ЛИНЕЙН(…)<Shift>+<Ctrl>+<Enter>

Константа: =1, если параметр a присутствует в уравнении

=0, если уравнение имеет вид y=b*x

Статистика: =1, если необходима оценка достоверности

=0, если оценка не нужна

Решение уравнения регрессии в Excel

3. В выделенном блоке ячеек будет результат в виде

b_m	...	b_1	a
$\sigma(b_m)$		$\sigma(b_1)$	$\sigma(a)$
R^2	$\sigma(y)$		
$F_{расч}$	df		
SSрегр.	SSост.		

значения параметров

среднее квадр. отклонение полученных значений

R^2 – коэффициент детерминации

Fрасч – расчетное значение функции Фишера

df – число степеней свободы (=n-m-1)

SSрегр – регрессионная сумма квадратов

SSост – остаточная сумма квадратов

Коэффициент детерминации показывает, насколько хорошо в выборке изменения Y объяснены изменениями X. Т. е., насколько хорошо выборочная модель регрессии объясняет поведение Y в выборке.

Изменения фактора Y измеряются его дисперсией $\sigma^2(Y)$.

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = r_{yx}^2$$

- часть дисперсии Y, объясненная уравнением регрессии, т. е. изменениями в выборке фактора X.

Еще одно дополнение к R^2

Мы знаем, что $0 \leq R^2 \leq 1$.

Однако, если модель регрессии не имеет свободного члена, например, $Y = b*x + e$, то возможны отрицательные значения R^2.

Это также недостаток R^2.

Статистические свойства МНК-оценок коэффициентов регрессии. ТЕОРЕМА ГАУССА-МАРКОВА

Почему при оценке параметров модели a и b минимизируется именно

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \quad ?$$

Потому что при выполнении некоторых условий оценки a и b, полученные по МНК, оказываются очень хорошими: ***несмещенными, эффективными, состоятельными***.

Каких условий?

МНК-оценки a и b являются случайными величинами, свойства которых существенным образом зависят от свойств случайного члена e модели регрессии.

Условия Гаусса-Маркова

1. Математическое ожиданиет значений остатков e равно 0:

$$M(e_i) = 0 \text{ для всех наблюдений } x_i$$

2. Значение дисперсии ошибки является постоянной величиной $\sigma_{ei}^2 = \sigma^2 = \text{const}$ для всех наблюдений X_i

(условие гомоскедастичности)

3. Значения e, для разных значений x_i независимы между собой

(отсутствие автокорреляции в остатках)

4. Значения x_i и e_i для одного и того же наблюдения независимы между собой $\sigma_{Xi,\ ei} = 0$ для всех наблюдений

5. Модель является линейной относительно параметров

Условия Гаусса-Маркова

Для уравнения множественной регрессии:

6. Факторы x_i независимы между собой в том смысле, что их выборочные парные линейные коэффициенты корреляции не превышают некоторого порога p:

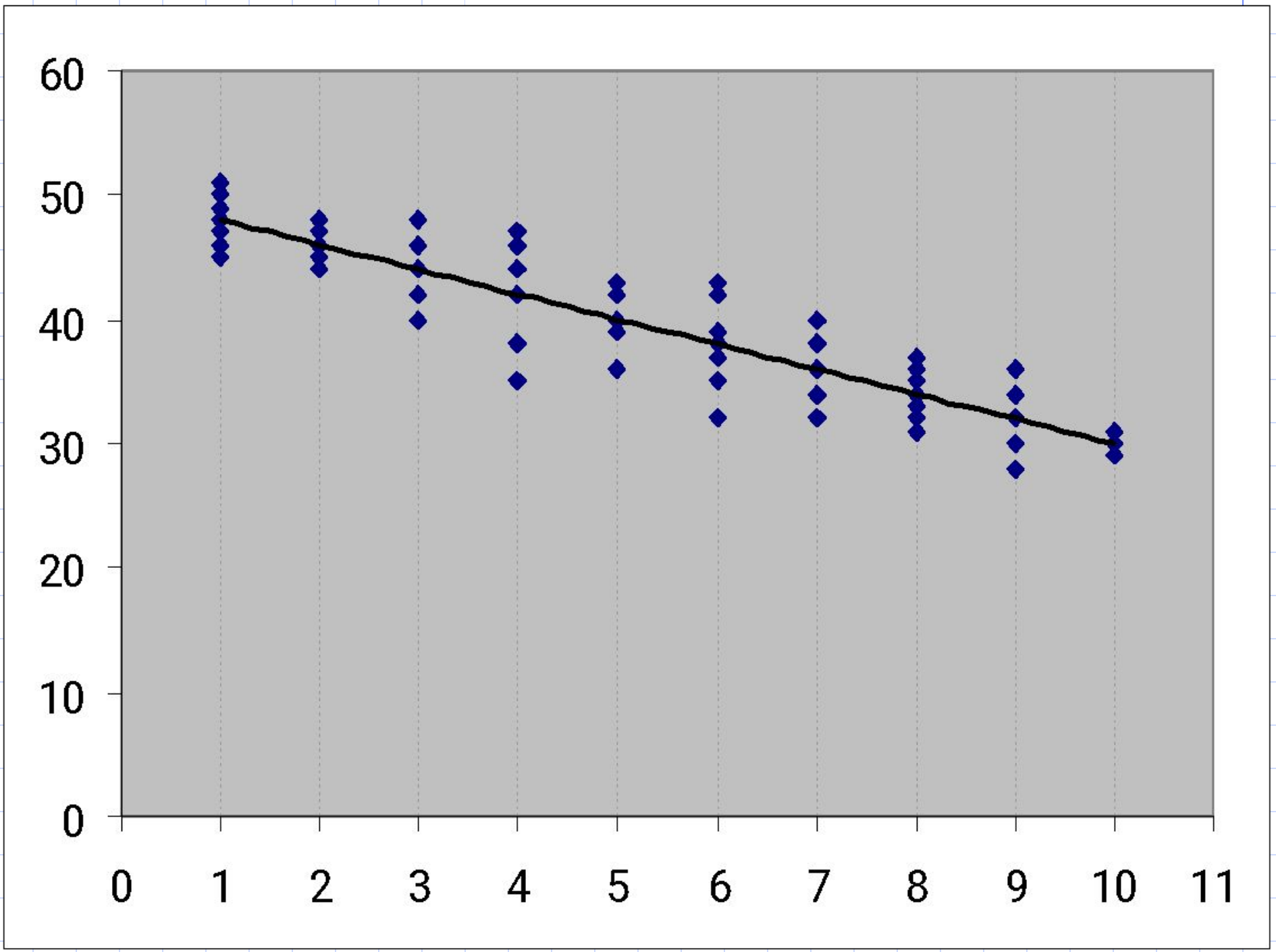
$$\left| r_{x_j x_i} \right| \le p$$

(условие отсутствия мультиколлинеарности)

7. Остатки являются нормально распределенной случайной величиной, т.е. подчиняются закону нормального распределения.

Модель, удовлетворяющая предпосылкам МНК (1)-(7), называется **классической нормальной моделью регрессии**,

если не выполняется только условие (7), то модель – **классическая модель регрессии**.

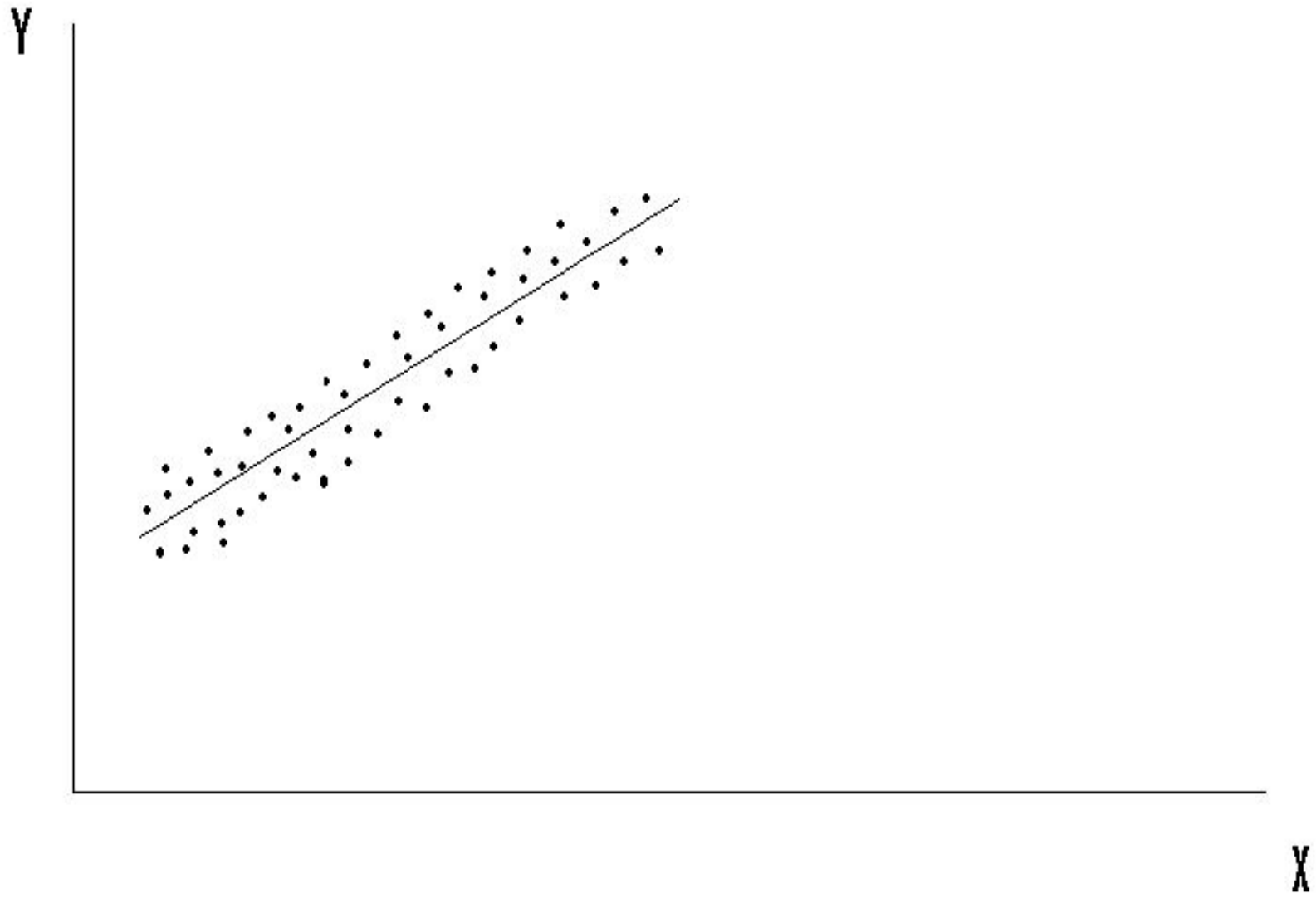

60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Если 1-е условие Г-М не выполняется, МНК дает смещенную оценку для b.

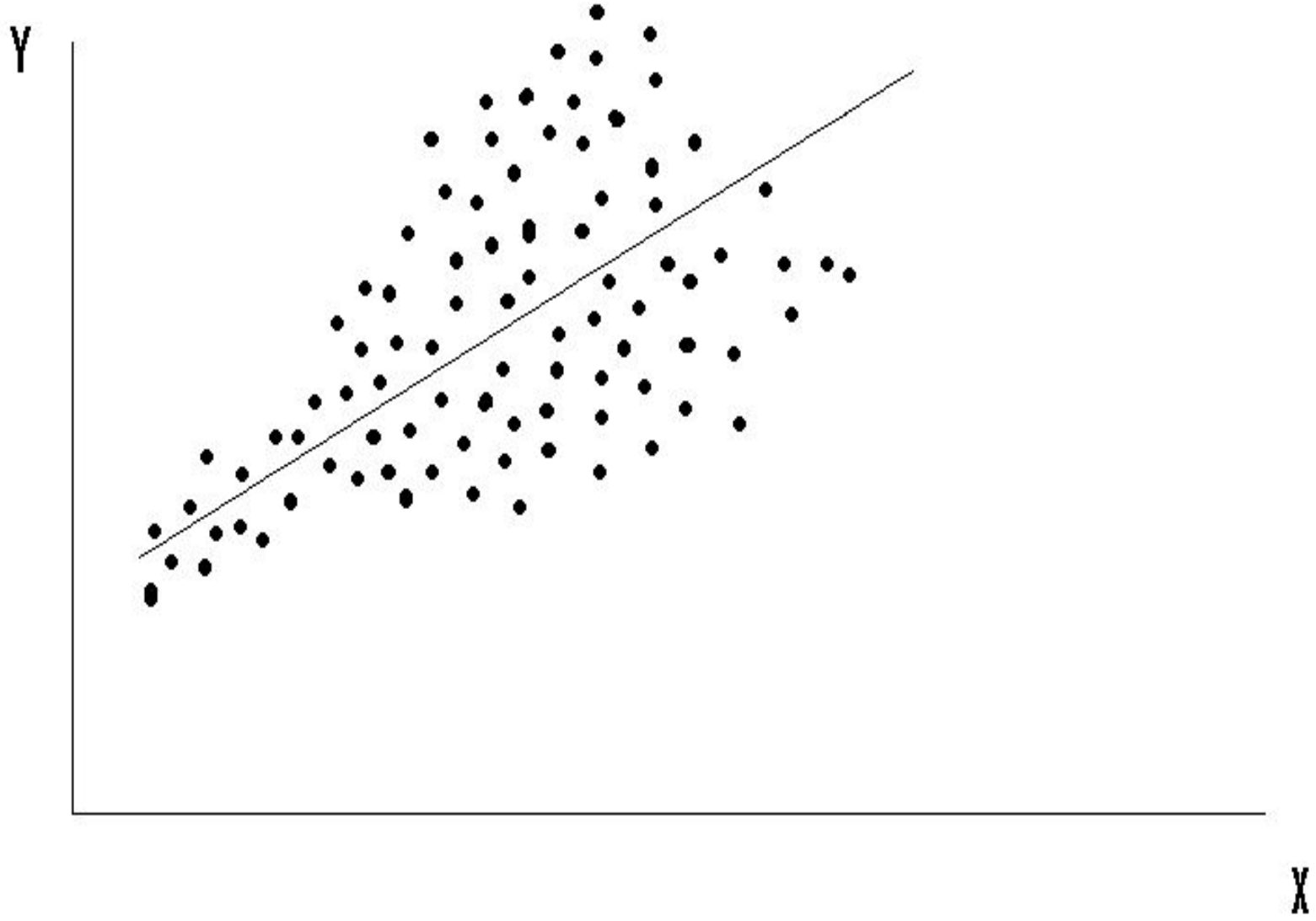
2. $\sigma_{ei}^2 = \sigma^2 = const$ для всех наблюдений X_i

Условие гомоскедастичности ошибок.

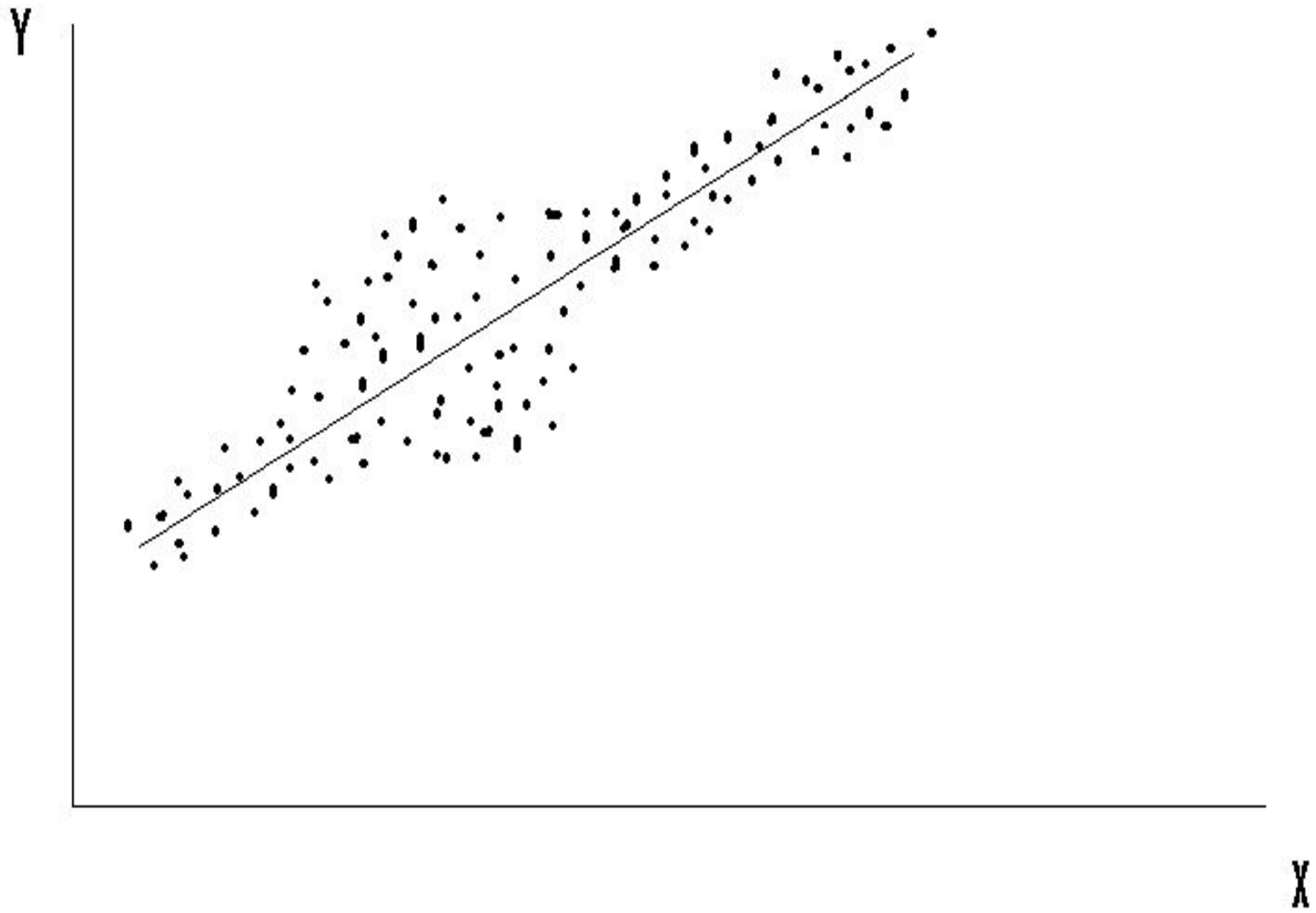
Когда оно не выполняется, говорят о гетероскедастичности ошибок.



2-е условие Г-М выполняется.



2-е условие Г-М не выполняется.



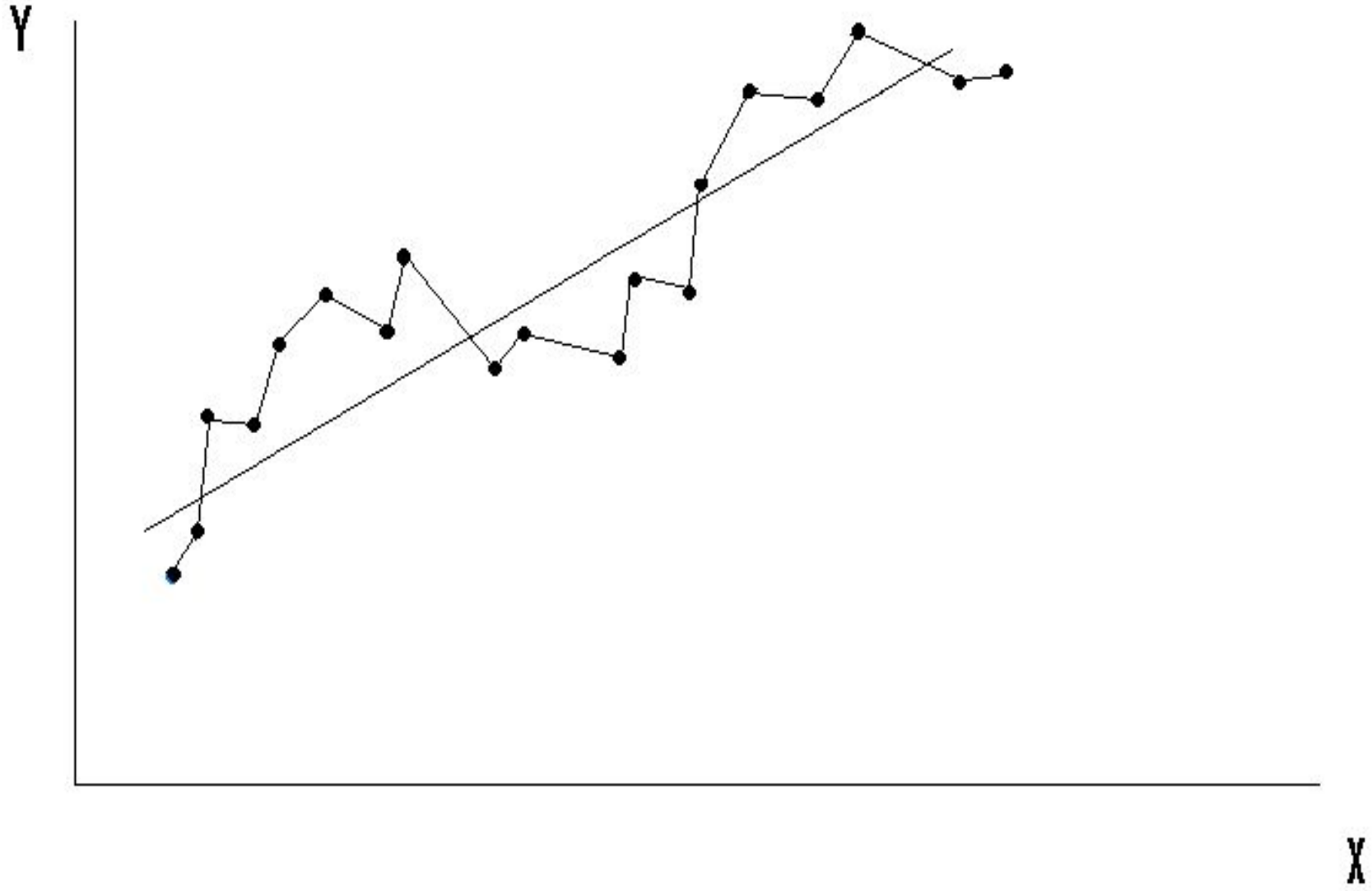
2-е условие Г-М не выполняется.

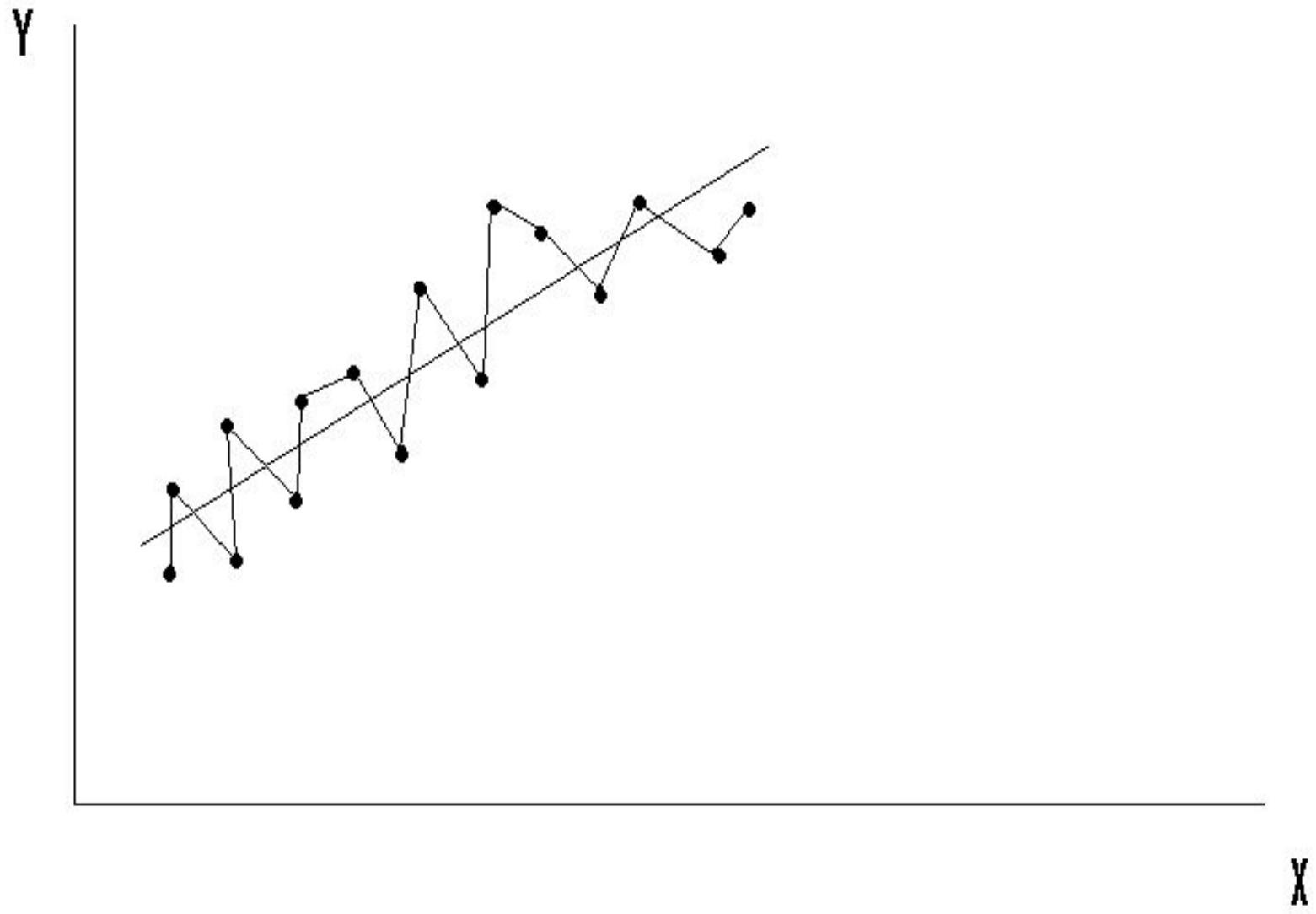
3. $\sigma_{ei,\,ej} = 0$ для всех X_i и X_j, $i \neq j$.

Условие некоррелированности ошибок для разных наблюдений.

Это условие часто нарушается, когда данные являются временными рядами, из-за наличия в динамике экономических показателей различных регулярных колебаний.

При невыполнении (3) говорят об автокоррелированности остатков.


Y
X


Y
X

4. $\sigma_{Xi,\ ei} = 0$ для всех наблюдений.

Случайный член распределен независимо от объясняющей переменной.

Это всегда выполняется, если объясняющие переменные не являются случайными величинами.

Дополнительное условие:

7. Случайный член, i=1, …, n, имеет нормальное распределение,

$e_i \sim N(0, \sigma_e^2)$

Это условие не нужно для обеспечения хороших свойств оценок a и b.

Но оно позволяет корректно проводить проверку гипотез о коэффициентах регрессии.

Реальность предположения о нормальности e_i обеспечивается Центральной предельной теоремой.

Теорема Гаусса-Маркова

Если предпосылки МНК соблюдаются, то оценки, полученные по МНК, обладают следующими свойствами:

1. Оценки параметров являются **несмещенными**, т.е. $M(b_i)= b_i$ и $M(a)= a$. Это вытекает из того, что $M(e_i)= 0$ и говорит об отсутствии систематической ошибки в определении положения линии регрессии
2. Оценки параметров **состоятельны**, т.к. дисперсия оценок параметров при возрастании числа n наблюдений стремится к нулю. Т.е. При увеличении объема выборки надежность оценок возрастает.
3. Оценки параметров **эффективны**, т.е. Они имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими оценками данных параметров.

F-критерий Фишера

H_0 – гипотеза о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи: $b=0$, $r_{yx}=0$

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}(n-m-1)$$

Если $F_{расч} \geq F_{табл}$, то отвергается гипотеза H_0 и признается значимость и надежность полученных оценок параметров a и b

t-статистика Стьюдента

H_0 – гипотеза о статистической незначимости оценок параметров уравнения регрессии и показателя тесноты связи: $a=b=r_{yx}=0$

$$t_b = \frac{b}{m_b}; \quad t_a = \frac{a}{m_a}; \quad t_r = \frac{r}{m_r}$$

где m_b, m_a, m_r – случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции

Формулы для расчета случайных ошибок:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{(n - m - 1) \cdot \sum (x - \bar{x})^2}}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{(n - m - 1)} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum (x - \bar{x})^2}}$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r_{yx}^2}{n - m - 1}}$$

Расчет доверительного интервала прогноза

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a$$

$$\gamma_b = b \pm \Delta_b$$

где

$$\Delta_a = t_{табл} m_a , \quad \Delta_b = t_{табл} m_b$$

Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т.е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, т.к. он не может одновременно принимать и положительное и отрицательное значение.

Расчет прогнозного значения

Прогнозное значение y_p определяется путем подстановки в уравнение регрессии соответствующего (прогнозного) значения x_p.

Вычисляется средняя стандартная ошибка прогноза:

$$m_{\hat{y}_p} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - m - 1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}$$

и строится доверительный интервал прогноза:

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm t_{табл} \cdot m_{\hat{y}_p}$$