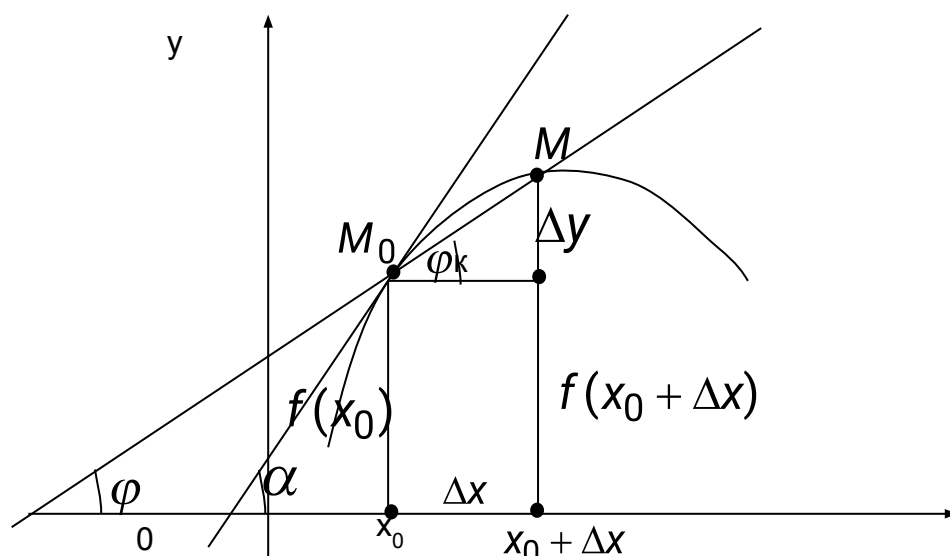


Элементы дифференциального исчисления

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

- 1. Производные***
- 2. Таблица производных***
- 3. Дифференциал***
- 4. Производные и дифференциалы
высших порядков***
- 5. Некоторые теоремы о
дифференцируемых функциях***
- 6. Применение производных к
исследованию функций***
- 7. Общая схема исследования функции и
построение графика***

Производная. Задача о касательной



Определение. Если существует предельное положение секущей при стремлении $M \rightarrow M_0$ вдоль по кривой, то оно называется касательной к графику функции в точке M_0 .

Производная. Задача о касательной

Обозначим угол наклона касательной к графику функции в точке M_0 α .

Очевидно, $\varphi \rightarrow \alpha$ при $\Delta x \rightarrow 0$, а $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Тогда угловой коэффициент касательной равен $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Производная. Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, b) и пусть точка $x_0 \in (a, b)$.

Рассмотрим далее точку $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

В обеих точках вычислим значения функции и разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Эту разность будем называть

приращением функции в фиксированной точке x_0 .

Производная. Определение

Если существует конечный (или бесконечный)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

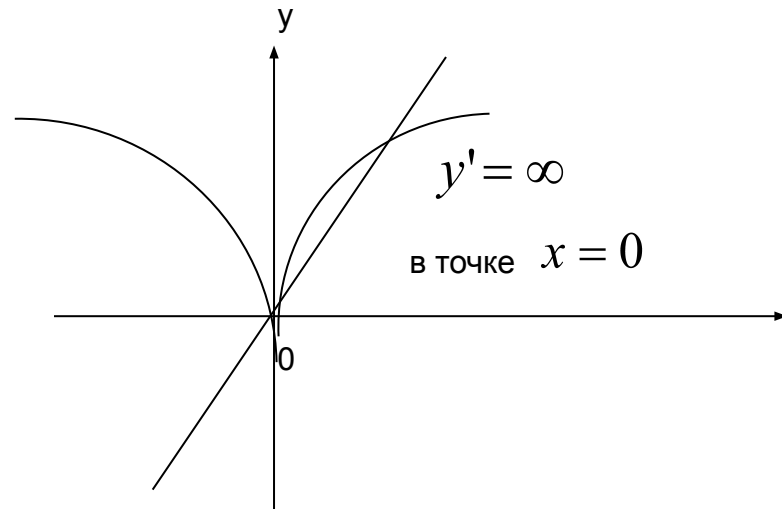
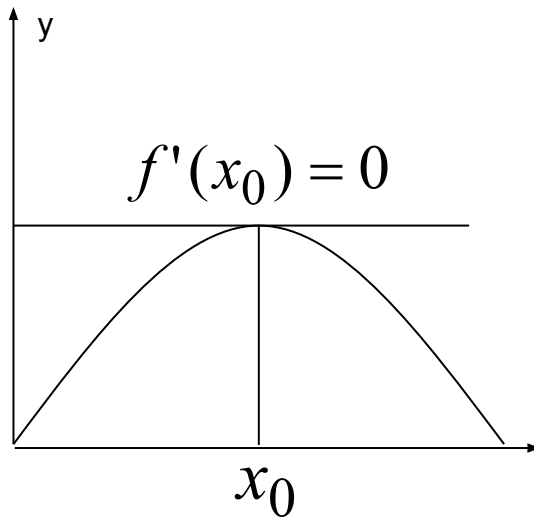
то он называется конечной (или бесконечной) производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается

символами y' или $f'(x_0)$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Примеры

Ясно, что угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания. Приведем примеры.



Уравнение касательной

Касательную как прямую, проходящую через точку касания $M_0(x_0; y_0)$, задают уравнением $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$.

Например, уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $(1; 2)$ имеет вид $y - 2 = 2(x - 1)$ или $2x - y = 0$.

Теоремы о производных

Теорема 1. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ функций $u(x)$ и $v(x)$, то существуют

$$(u(x) + v(x))' = (u + v)' = u' + v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Теоремы о производных

Следствие.

$(cy)' = c' y + cy' = cy'$, так как $c' = 0$,
т.е. постоянный множитель
выносится за знак производной.

Теоремы о производных

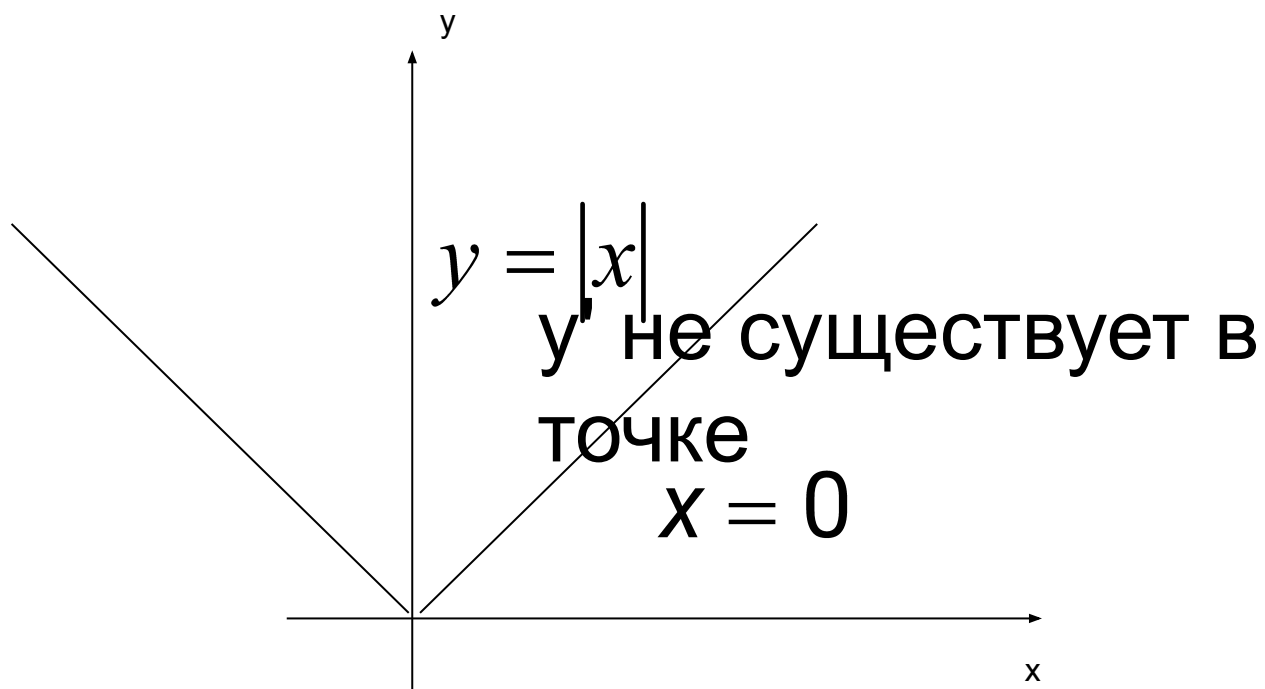
Теорема 2. Если функция в точке x_0 имеет производную, то она в этой точке непрерывна.

Обратное неверно. Возможен случай, когда непрерывная функция не имеет производной в точке непрерывности.



Теоремы о производных

Например:



Примеры

Выведем формулы некоторых производных, применяя определение производной:

1) $y = x^2$ имеет производную

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x ; \end{aligned}$$

Примеры

$$\begin{aligned} 2) (e^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \\ &= e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x. \end{aligned}$$

Таким же образом можно получить производные $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, а по правилу вычисления производных сложных функций можно вычислить и другие производные.

Производная обратной функции

Теорема. Пусть функция $x=f(y)$ монотонна и дифференцируема в некотором интервале (a,b) и имеет в точке y этого интервала не равную нулю производную $f'(y) \neq 0$. Тогда в соответствующей точке x обратная функция $y = f^{-1}(x)$ имеет производную

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} .$$

Примеры

Для функции $y=\arcsin x$ обратной является функция $x=\sin y$, которая в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ монотонна и дифференцируема. Ее производная в этом интервале в нуль не обращается. Поэтому

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Примеры

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Аналогично можно получить

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Теорема о производной сложной функции

Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную в точке x_0 , причем $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

Или: $y' = f'_u \cdot u'_x$ в произвольной точке x .

Производная степенной функции

Справедливо тождество $x^n = e^{n \ln x}$.

Тогда

$$y' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} (n \ln x)' =$$

$$= \frac{n}{x} e^{n \ln x} = \frac{n}{x} x^n = nx^{n-1}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Производные гиперболических функций

Гиперболическими называют функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Производные гиперболических функций

Поэтому

$$(shx)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx.$$

$$(chx)' = shx;$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x};$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Таблица производных

$$1. c' = 0,$$

$$2. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$$

$$3. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$$

$$4. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$$

$$5. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u',$$

$$6. (e^u)' = e^u \cdot u',$$

$$7. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$$

$$8. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$9. (\sin u)' = \cos u \cdot u',$$

$$10. (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$$

$$11. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$$

$$12. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$$

Таблица производных

$$13. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u',$$

$$(\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u',$$

$$(\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$$

$$14. (shu)' = chu \cdot u'.$$

$$(chu)' = shu \cdot u';$$

$$(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} u';$$

$$(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} u'.$$

Дифференцируемая функция

Определение. Если функция $f(x)$ в точке x имеет (конечную) производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

Дифференциал функции

Рассмотрим пример. Найдем приращение функции $y = x^2$ в точке x_0 .

Известно, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

В нашем примере

$f(x_0) = x_0^2$, $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$, а

приращение.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2$$

Итак, $\Delta y = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$, где, как известно, $2x_0$

является производной функции x^2 в точке x_0 .

Определение дифференциала

Пусть приращение функции в точке может быть представлено в виде

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, где Δx - приращение аргумента, A -величина, не зависящая от Δx , $o(\Delta x)$ -бесконечно малая более высокого порядка ,
чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение дифференциала

Тогда главная линейная относительно Δx часть приращения функции называется дифференциалом функции в точке и обозначается dy .

Итак, по определению $dy = A\Delta x$.

Теорема. Для того чтобы в точке x функция имела дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела производную.

Дифференциал функции

Приращение аргумента Δx в этом случае принято обозначать dx и тогда

$$dy = f'(x_0)dx, \text{ где } dx = \Delta x. \text{ В}$$

произвольной точке x $dy = f'(x)dx$.

Замечание. Из последней формулы получается еще одно обозначение

$$\text{производной } f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции

Пример.

$$d(\sin x) = \cos x dx;$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx; \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx;$$

$$d(x^2) = 2x dx; \quad d(x + a) = dx$$

Дифференциал функции

Как и для производной, для дифференциала функции имеют место формулы:

1. $d(u + v) = du + dv;$

2. $d(uv) = vdu + u dv ;$

3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0);$

4. $d(cu) = cdu .$

Инвариантность дифференциала

По правилу дифференцирования сложной функции

$$dy = y'_u u'_x dx = y'_u (u'_x dx) = y' du.$$

Здесь форма дифференциала остается неизменной, но под дифференциалом аргумента понимается не приращение этого аргумента, а его дифференциал.

Производные высших порядков

Введем теперь понятие производной второго порядка функции $f(x)$.

Производную от первой производной функции $f(x)$, т.е. $(y')'$ будем называть производной второго порядка (тогда y' - производная первого порядка) и будем ее обозначать y'' или $f''(x)$. Далее

$(y'')' = y''' = f'''(x)$ - это производная третьего порядка, ... а $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$ - это производная n -го порядка.

Дифференциалы высшего порядка

Дифференциал от дифференциала данной функции называется ее дифференциалом второго порядка и обозначается $d^2 y = d^2 f(x)$. По определению

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2.$$

$$d^2 y = f''(x)dx^2,$$

Итак, $d^3 y = f'''(x)dx^3$ и т.д.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y от x задана
параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), t \in (\alpha, \beta).$$

И пусть эти функции
дифференцируемы. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$
Если существует вторая производная,

то

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Пример

Найти производную функции

$$x = a(t - \sin t),$$

Имеем $y = a(1 - \cos t).$

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2a \sin^2 \frac{t}{2} (1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Производные неявных функций

Пусть значения x и y связаны уравнением $F(x,y)=0$. Если функция $y=f(x)$, определенная на некотором промежутке, при подстановке ее вместо y в уравнение $F(x,y)=0$ обращает это уравнение в тождество, то говорят, что это уравнение задает функцию $y=f(x)$ неявно.

Пример

Продифференцируем функцию

$$y = x + \ln y \quad .$$

Имеем $y' = 1 + \frac{1}{y} y'$ Отсюда

$$y'(1 - \frac{1}{y}) = 1, \quad y' = \frac{y}{y-1}.$$

Продолжение

Найдем вторую производную.

Так как $y' = \frac{y}{y-1}$, то

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = \frac{y'(y-1-y)}{(y-1)^2} = \\ &= -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}. \end{aligned}$$

Логарифмическое дифференцирование

Найти производную функции $y = (\cos x)^x$.

Прологарифмируем обе части:

$\ln y = x \cos x$. Теперь берем
производную

$$\frac{y'}{y} = \cos x - x \sin x, y' = y(\cos x - x \sin x).$$

Окончательно

$$y' = (\cos x)^x (\cos x - x \sin x).$$