

Все что нужно знать к КР
По комбинаторике!

Формулы сложения и произведения

Сложение

- Когда использовать??
- Когда задача разбивается на несколько непересекающихся случаев!

Произведение

- Когда использовать??
- Когда задача разбивается на несколько независимых подзадач. Пусть количество решений первой подзадачи X , для ЛЮБОГО решения первой подзадачи имеется Y решений второй, тогда общее количество $X*Y$

Примеры использования сложения и произведения

Сложение и произведение

Пусть имеется 3 синих, 4 красных, и 5 белых шаров, каким количеством способом можно вытащить 2 разноцветных шара?

Решение: Разбиваем задачу на непересекающиеся случаи

-Синий и красный $3 \cdot 4 = 12$ (так как для каждого из 3 синих, можем вытянуть 4 красных)

-Синий и белый $3 \cdot 5 = 15$ (аналогично)

-Красный и белый $4 \cdot 5 = 20$

Ответ: $12 + 15 + 20 = 47$

Перестановки

- Формула $P(n)=n!$
- Когда использовать?? Имеется n отличающихся между собой объектов, и n позиций для них. Нужно расставить их на эти позиции. НИКАКОЙ ВЫБОРКИ ОБЪЕКТОВ НЕТ!
- Объяснение формулы: На первое можно поставить любой из n объектов, на следующее любой из оставшихся $n-1$, на следующее $n-2$ и.т.д.
- Пример: Каким количеством способов можно расставить 10 людей в линию? $10!$
Пример: Каким количеством способов можно перемешать колоду из 52 карт? $52!$

Размещение без повторений

- Формула $A(n,m)=n!/(n-m)!$
- Когда использовать?? Когда нужно выбрать из n различных объектов m , и выставить их в определенном порядке, при этом каждый объект может использоваться только 1 раз
- Объяснение формулы: На первую позицию можем поставить n объектов, на вторую $n-1$, на третью $n-2$, на последнюю $n-m+1$,
$$n*(n-1)*(n-2)*\dots*(n-m+1)=n!/(n-m)!$$

Примеры

- Каким количеством способов можно выбрать в группе из 30 старосту и его помощника? $A(30,2)=30!/(30-2)!=30*29=870$
- Каким количеством способов 10 человек из 30 могут выстроиться в очередь к врачу? $A(30,10)=30!/20!$

Размещения с повторениями

- Формула: $A(n, m) = m^n$
- Когда использовать?? Когда имеется n объектов, и требуется разбить их на n групп, при этом в каждой группе может быть более одного объекта
- Объяснение формулы: Первый объект может попасть в любую из m групп, второй тоже независимо от того куда попал первый может попасть в m групп $\rightarrow m * m * \dots * m = m^n$

Примеры

- Каким количеством способов 17 человек могут выйти на 15 остановках? Первый может выйти на любой 15, второй на любой из 15 -> Ответ 15^{17} . (Очень важно понимать почему не подходит обратные соображения с ответов 17^{15})
- Сколько подмножеств у множества из 100 элементов? Объекты – элементы, и есть 2 группы (группа элементов, входящих в подмножество и не входящих в ней), первый элемент можно отнести в любую из 2 групп, второй тоже в любую независимо от первого -> Ответ 2^{100}

Сочетания

- Формула: $C(n,k) = n! / (k! * (n-k)!)$
- Когда использовать?? Из n различных объектов нужно выбрать группу (в которой порядок не важен) из k объектов.
- Объяснение формулы: $C(n,k) = A(n,k) / P(k)$ Если мы сначала решим задачу, где нам важен порядок внутри группы, ответ будет $A(n,k)$. Однако все порядки отличающиеся лишь порядком элементов, будут давать одну группу, а таких групп будет $k!$ Для каждой выборки

Примеры

- Сколькими способами можно выбрать 10 карт из 36? $C(36,10)$
- Сколькими способами можно выбрать 4 позиций из 10? $C(10,4)$
- Сколькими способами можно выбрать 8 карт из 36, чтобы там были 2 короля и 2 туза? $C(4,2)*C(4,2)*C(28,4)$ - Количество способов выбрать 2 короля из 4, 2 туза из 4, и 4 любые карты из оставшихся 28
- В турнире по шахматам, каждый игрок должен сыграть с каждым ровно один раз, сколько партий будет сыграно в турнире из 14 человек? $C(14,2)$ – Количество неупорядоченных пар шахматистов и есть количество партий в турнире

Задача Муавра

- Формула $F(n,k)=C(n+k-1,k-1)$
- Когда использовать?? Либо когда у нас n ОДИНАКОВЫХ объектов, раскладывается по k кучам, либо когда задача сводится к нахождению решений уравнений $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ в целых числах, когда каждый $x_i \geq 0$
- Объяснение: Расположим между n шарами $k-1$ перегородок, однозначно разбивающую группу на k групп. Всего позиций у нас получается $n+k-1$, надо выбрать те, где будут стоять перегородки, это количество $C(n+k-1, k-1)$. Во втором случае мы как бы раскидываем n единиц по иксам.

Примеры

- Сколькими способами можно купить 9 ручек, если в продаже имеется 4? Пусть x_i – количество ручек i $x_1+x_2+x_3+x_4=9$
-> Ответ $C(9+4-1, 4-1)=C(12, 3)$
- Сколькими способами можно разделить 7 яблок и 4 груши на 3 человека? Будем по отдельности делить яблоки и груши, поделит яблоки $C(7+3-1, 3-1)$ способов, а груш $C(4+3-1, 3-1)$ способов (Стандартная задача Муавра, объекты – фрукты, люди - ящики). -> Ответ $C(9, 2)*C(6, 2)$

Пример задач с ограничениями (было у нас в прошлом году на кр)

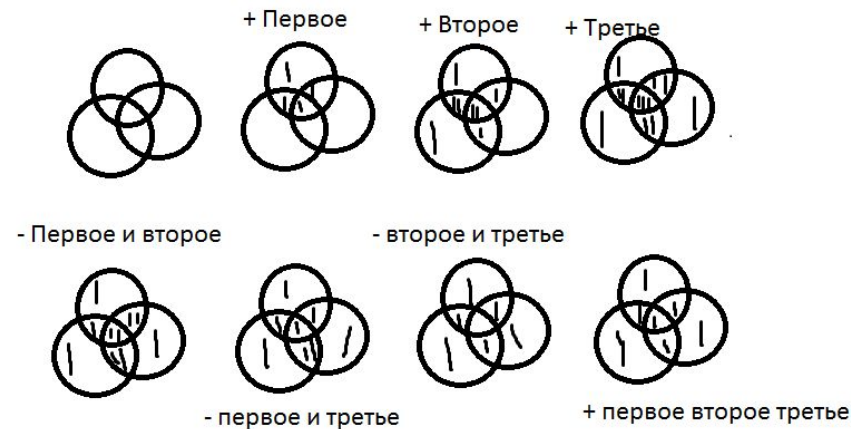
- Каким количеством способом могут распределиться голоса на выборах, если избирающих 450 человек, кандидатов 4, и известно что победитель набрал более $\frac{2}{3}$ голосов.
- Решение: Так как победитель набрал более $\frac{2}{3}$, значит как минимум 301 голос, отдадим их одну из 4 кандидатов, и оставшиеся 149 голосов распределим по Муавру.
- Ответ: $4 * C(149+4-1, 4-1) = 4 * C(152, 3)$

Пример задач с ограничениями (было у нас в прошлом году на кр)

- Каким количеством способом могут распределиться голоса на выборах, если избирающих 450 человек, кандидатов 4, и известно что кандидат А набрал ровно половину голосов.
- Решение: Так как А набрал 225 голосов, отдадим их ему, а оставшиеся распределим между 3 кандидатами по Муавру
- Ответ: $C(225+3-1, 3-1) = C(227, 2)$

Формула включений и исключений

- Когда использовать?
1. Когда нужно найти объединение некоторых множеств, при этом легко находятся их пересечения
 2. Когда в задаче легко найти обратное событие (очень часто тут используется ключевое слово ХОТЯ БЫ)



Примеры

- Сколько последовательностей из букв английского алфавита (их 26!) длины 5 содержащих хотя бы одну букву X, хотя бы одну Y и хотя бы Z?
- Решение: $26^5 - 3 \cdot 25^5 + 3 \cdot 24^5 - 23^5$ (От общего числа вычитаем те, где нет X, те где нет Y, те где нет Z, прибавляем те где нет пар, и вычитаем те, где нет всей тройки)

Задачи для решения (они из учебника Шварца ничего нового, но в конце презентации есть решения к ним)

111. Имеется куб размером $10 \times 10 \times 10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

115. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

121. Сколько троичных последовательностей (элементы последовательности — 0, 1, 2) длины n содержат в точности k символов 1?

158. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

171. Ладья стоит на левом поле клетчатой полосы 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

194. Найдите число решений уравнения $x + y + z = n$, где x, y, z — различные неотрицательные целые числа.

199. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно оставить букет из 9 цветов? (Цветы одного сорта считаем одинаковыми.)

Решение задачи 111

Введем систему координат, сейчас мы находимся в клетке (1,1,1) надо попасть в (10,10,10). Мы сделаем это за 27 ходов, среди которых 9 ходов это +1 по первой координате, 9 - +1 по второй и 9 - +1 по третьей. То есть наш путь описывается последовательностью из символов i, j, k , где каждого символа должно быть 9 штук. Выберем позиции на которых будет i $C(27,9)$ способами, из оставшихся 18 выберем позиции, на которых будет j , на оставшиеся автоматически попадут k .

Ответ $C(27,9) * C(18,9) = 27! / (9! * 9! * 9!)$

Решение задачи 115

- Выберем позиции на которых будут стоять четные числа, это можно сделать $C(10,5)$ способами. Выбрав позиции для четных, мы однозначно их расставляем в порядке возрастания, позиции для нечетных тоже выбираются однозначно и числа в них расставляются однозначно в порядке убывания
- Ответ: $C(10,5)$

Решение задачи 121

- Выберем k позиций из n $C(n,k)$ способами, это позиции на которых будут стоять единицы. На оставшихся $n-k$ позициях могут стоять как 0 так и 2. Количество способов их расставить $2^{(n-k)}$ так как по 2 способа на каждую позицию.
- Ответ: $C(n,k) \cdot 2^{(n-k)}$

Решение задачи 158

- Всего способов 4^{15} (так как каждый из 15 может попасть в любую из 4 комнат). Вычтем те, где какая-то пустая $C(4,1) \cdot 3^{15}$ (первый множитель это выбор пустых комнат, второй это разбиение людей по комнатам). Прибавим те, где какая-то пара комнат пуста $C(4,2) \cdot 2^{15}$, и вычтем те, где тройка комнат пуста $C(4,3) \cdot 1^{15}$. Надо бы еще прибавить те способы, где все пусты, но таких нет.
- Ответ: $4^{15} - C(4,1) \cdot 3^{15} + C(4,2) \cdot 2^{15} - C(4,3) \cdot 1^{15}$

Решение задачи 171

- А) У ней есть 28 промежуточных полей, на каждое поле можно как вступать так и не вступать, поэтому ответ 2^{28}
- Б) Она должна сделать 7 шагов, каждый шаг положительной длины, сумма шагов равна 29. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=29$, но все x положительные, значит задача с ограничениями, положим по единице в каждый x получим $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=22$. По Муавру ответ $C(22+7-1, 7-1)=C(28,6)$

Решение задачи 194

- Всего решений этого уравнений в неотрицательных целых числах $C(n+3-1, 3-1)$ способов. Вычтем те случаи в которых какая пара совпала. То есть найдем количество решений уравнения $2*x+z=n$. Их $n/2+1$ штук (округление вниз, не имеет никакого отношения к комбинаторике, но не трудно убедиться). То есть мы вычитаем от нашего решения $3*(n/2+1)$. Но возможен случай что все 3 переменные равны, его мы вычли 3 раза, надо 2 раза сложить. Такой случай возможен только если n кратно трем.
- Ответ: При n кратном 3: $C(n+2, 2)-3*(n/2+1)+2$
При n не кратном 3: $C(n+2, 2)-3*(n/2+1)$

Решение задачи 199

- Если бы цветов каждого вида было бы бесконечно много, или хотя бы больше 9, ответом была формула Муавра $C(9+3-1, 3-1)$. Однако нам нужно вычесть лишние случаи, когда мы превысили лимит на какой-то вид роз. Если мы превысили лимит на первый тип, то значит положили взяли его как минимум 4 раза, и того количество способов это сделать $C(5+3-1, 3-1)$, второй цветок чтобы превысить надо взять его минимум 5 раз, и того останется всего выбор для 4 цветов $C(4+3-1, 3-1)$, а для третьего останется 3 $C(3+3-1, 3-1)$. Но возможен случай когда мы превысили лимит на первые цветка одновременно (для остальных в данной задаче это невозможно), такой способ 1.
- Ответ: $C(11, 2) - C(7, 2) - C(6, 2) - C(5, 2) + 1$

Любите комбинаторику!

- И всем удачи на КР!

P.S. Если понравилась преза, подпишись на паблик <https://vk.com/oproseswithlove>