

Решение задач на нахождение расстояний и углов в пространстве координатным методом

*Учитель математики высшей
категории МБОУ - СОШ №7 г.
Клинцы Коваленко С.Ф.*

Математический диктант

Ответы для самопроверки математического диктанта

Дано : $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

Записать в координатах :

1. Условие коллинеарности двух векторов.

$$1. \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$$

2. Условие перпендикулярности двух векторов.

$$2. a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

3. Формулу для нахождения косинуса угла между векторами.

$$3. \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

4. Формулу для нахождения длины вектора.

$$4. |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

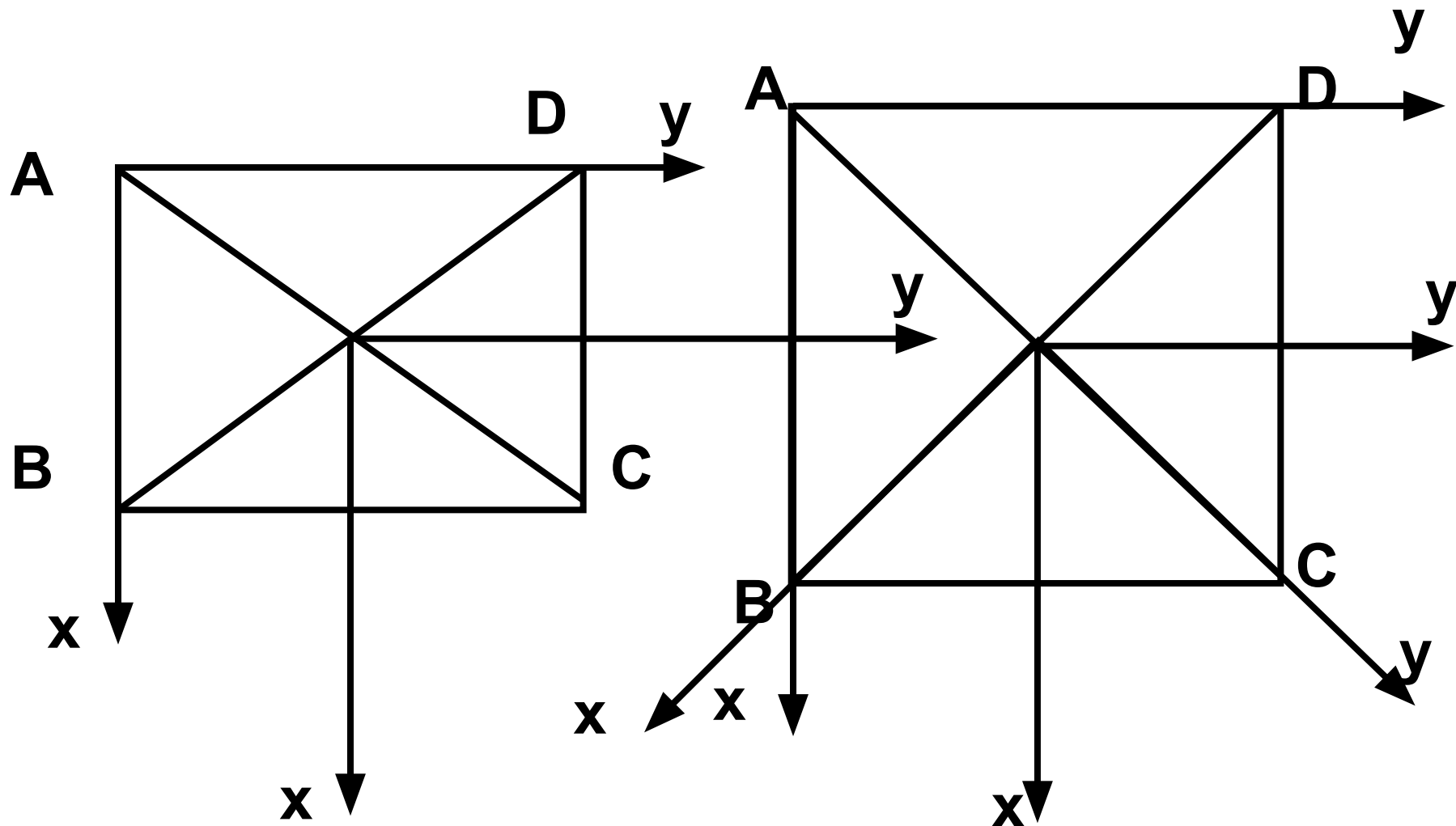
5. Уравнение плоскости.

$$5. Ax + By + Cz + D = 0$$

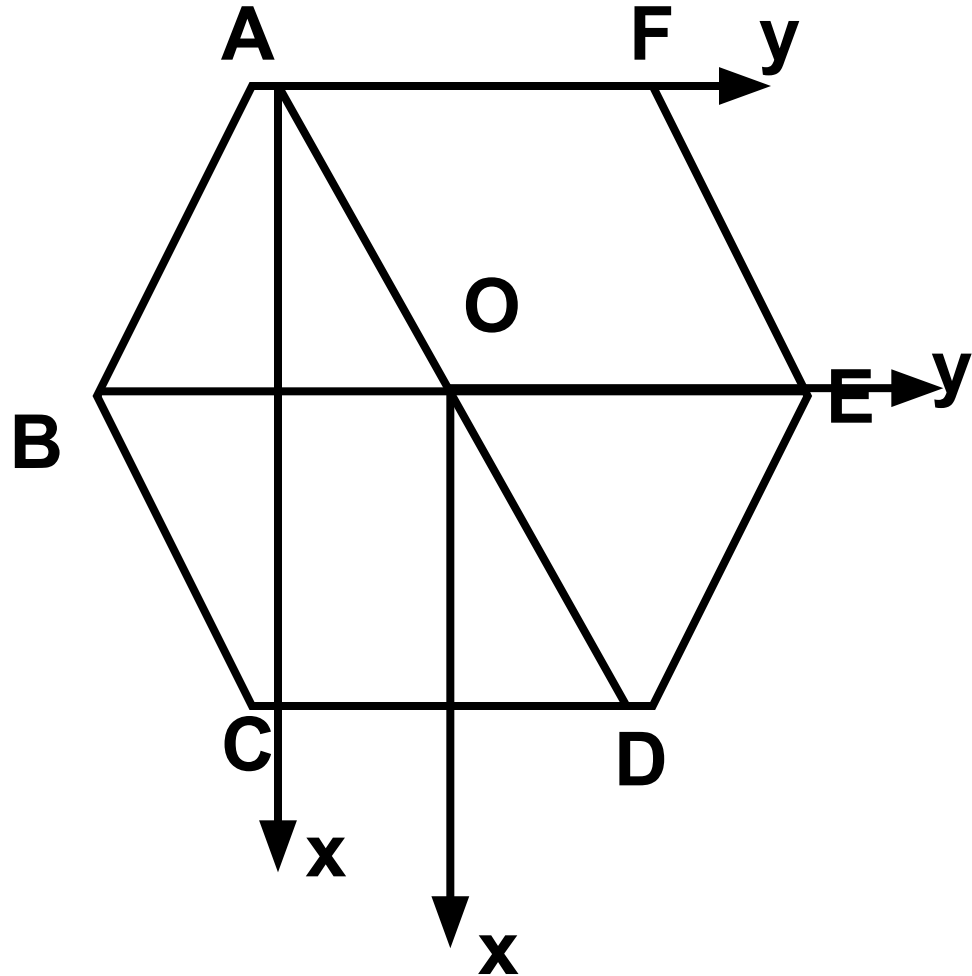
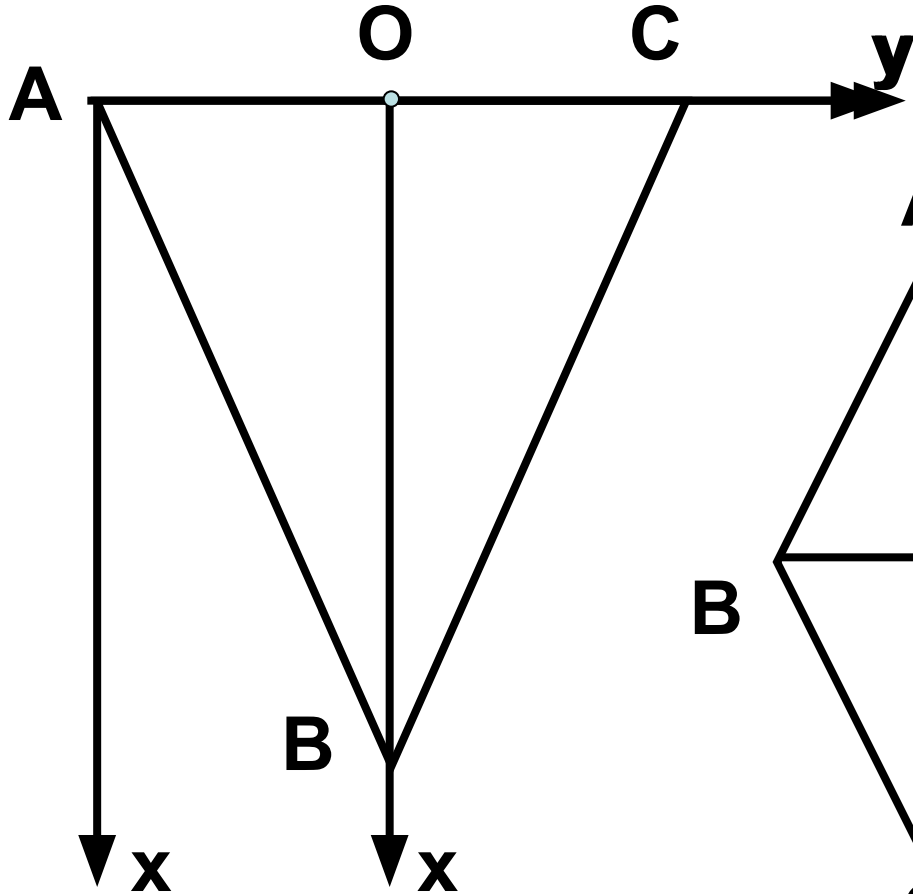
Алгоритм решения базовых задач

1. Ввести прямоугольную систему координат
 - на плоскости основания многогранника;
 - в пространстве.
2. Найти координаты точек, о которых идет речь в условии задачи.
3. Найти координаты
 - направляющих векторов прямых;
 - векторов, перпендикулярных плоскостям (нормалей).
4. Воспользоваться соответствующей формулой для нахождения
 - расстояний в пространстве;
 - углов в пространстве.

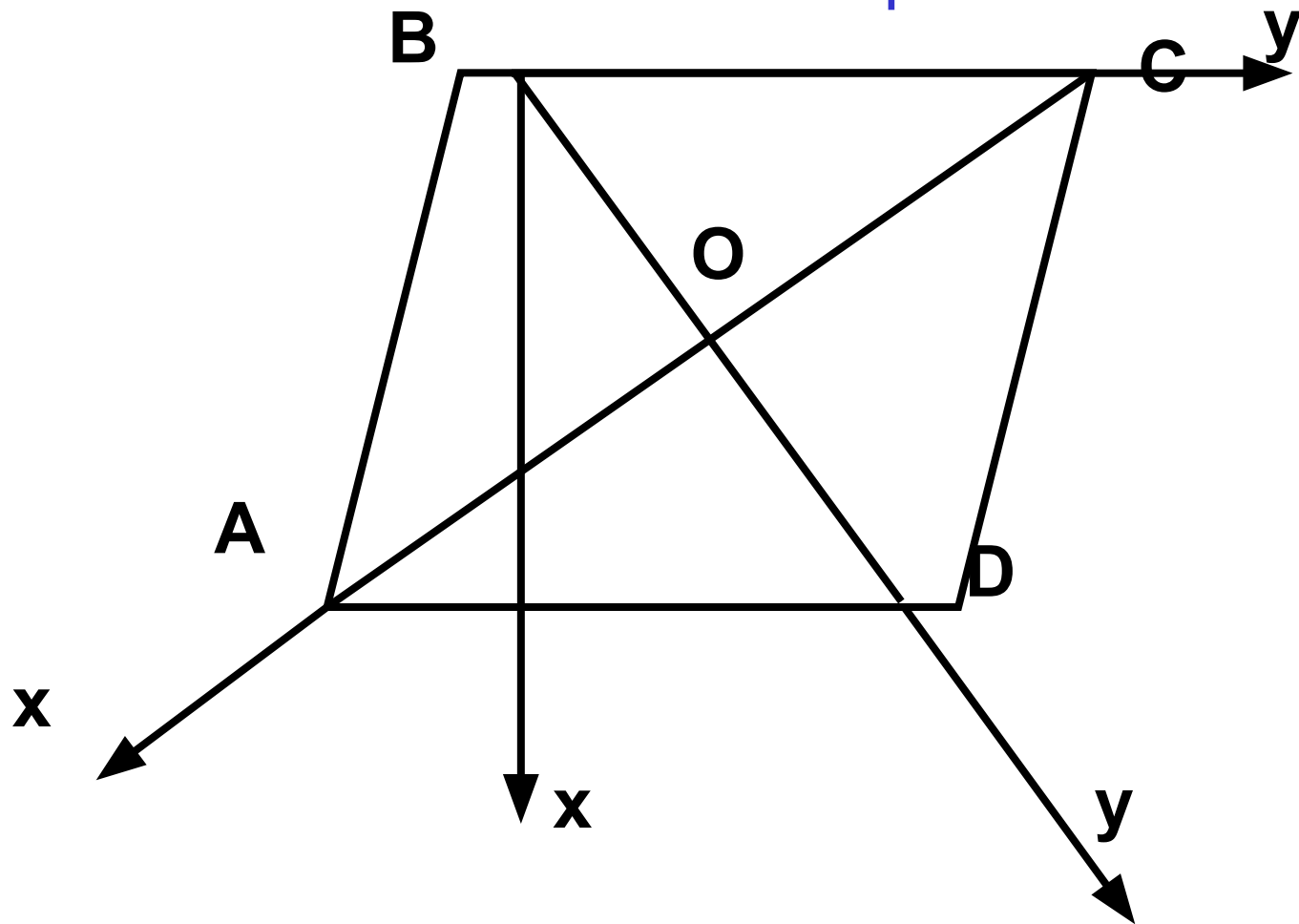
Введите прямоугольную систему координат, если в основании многогранника лежит...



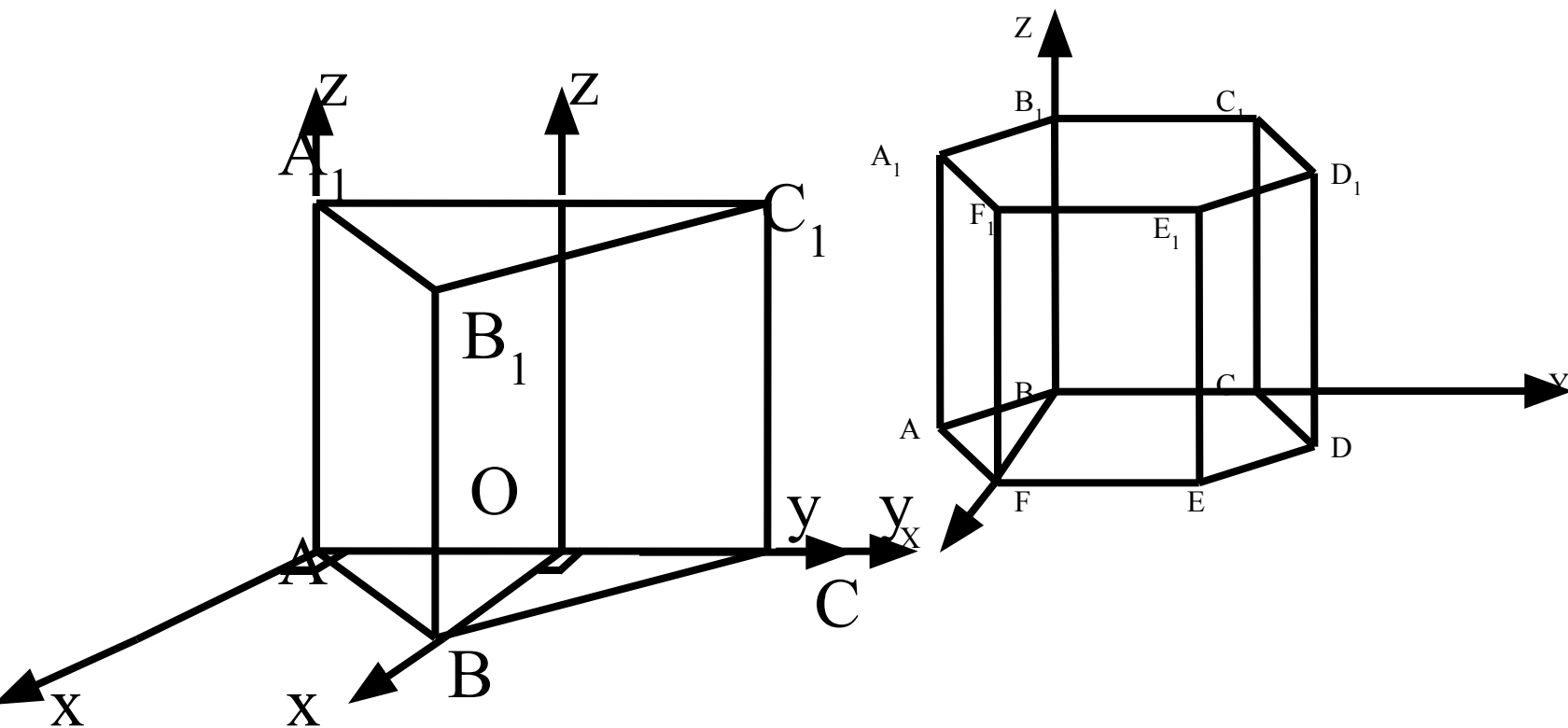
Введите прямоугольную систему координат , если в основании многогранника лежит...



Введите прямоугольную систему координат , если в основании многогранника лежит...



Введите прямоугольную систему координат.

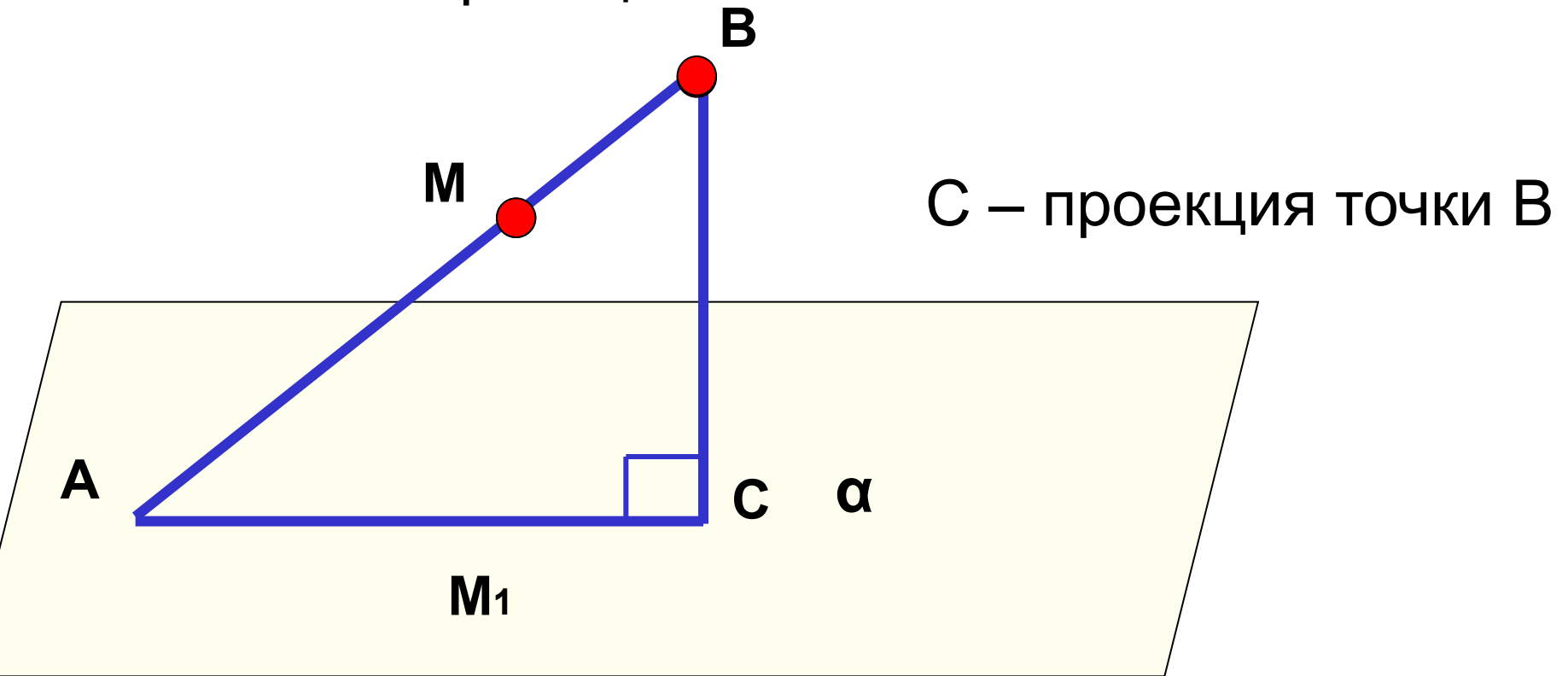


Назовите наклонную к плоскости α , ее проекцию на плоскость, проекции точек В и М.

AB – наклонная к плоскости α

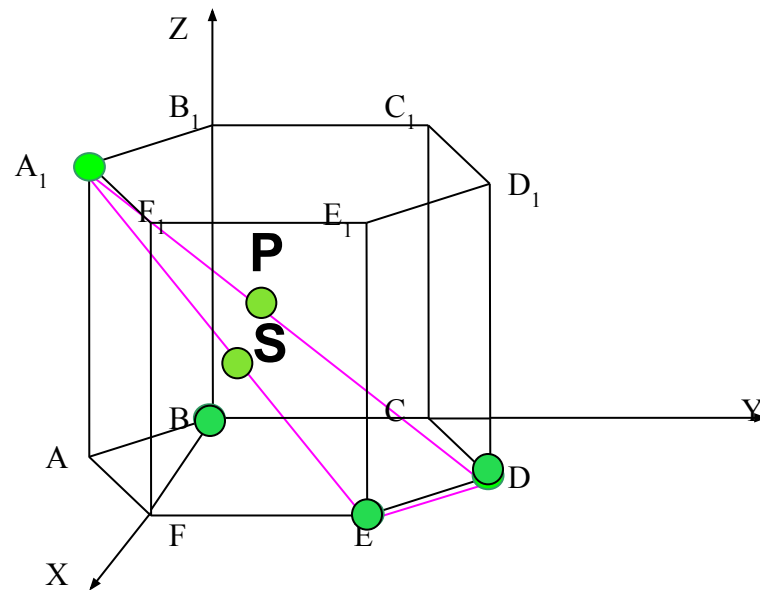
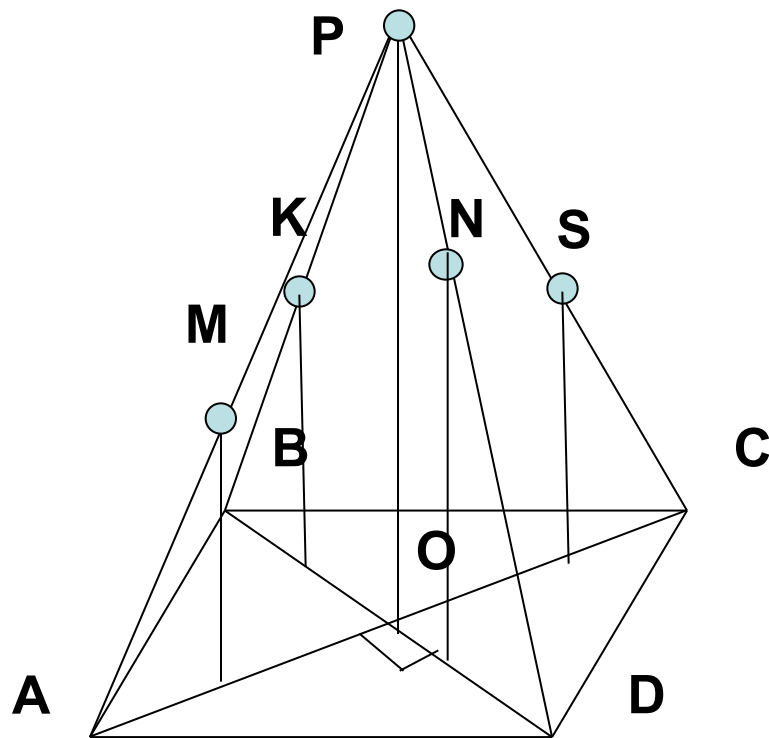
BC – перпендикуляр к плоскости α

AC – проекция наклонной AB на плоскость α



M₁ – проекция точки M

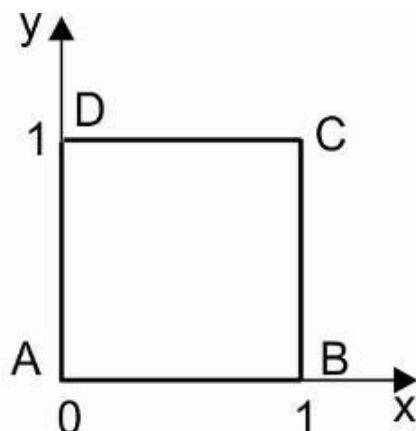
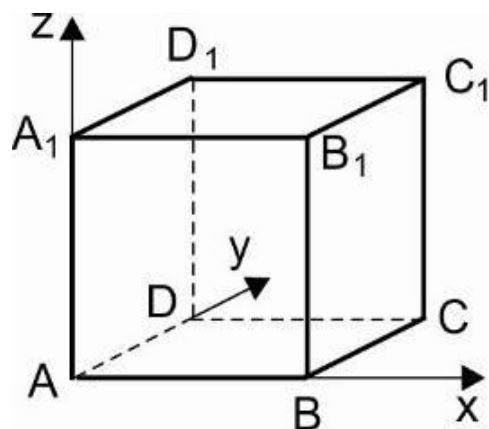
На какие отрезки в плоскости основания
попадают проекции точек P, M, S, K, N?



Проекциями каких точек являются точки
B, E, D в плоскости основания призмы?

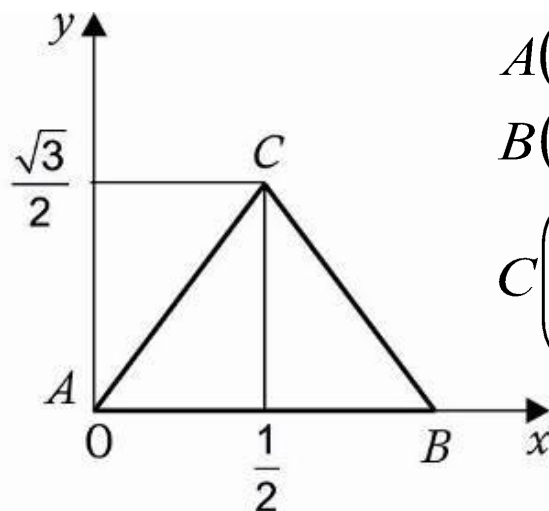
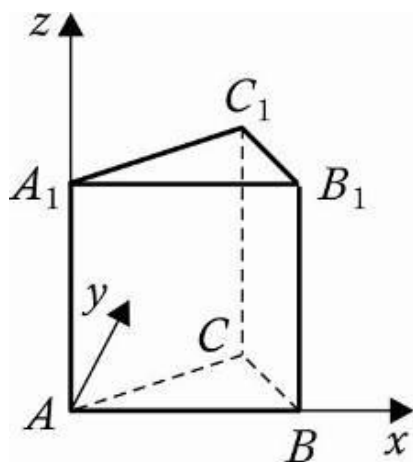
Координаты вершин многогранников

Найдите координаты вершин единичного куба.



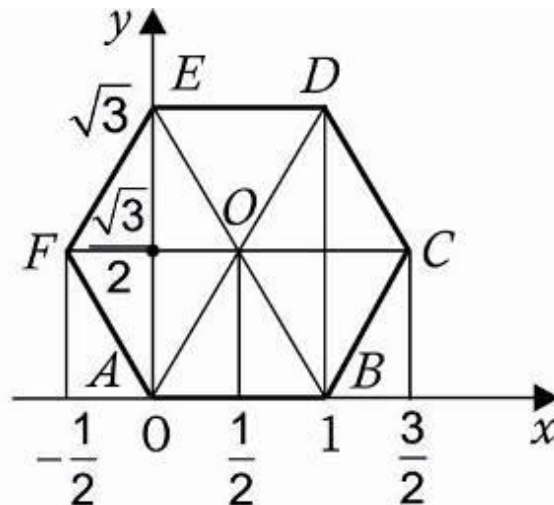
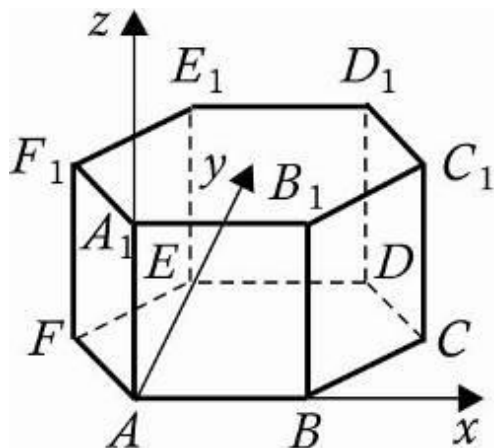
$$\begin{aligned} &A(0;0;0), \quad A_1(0;0;1) \\ &B(1;0;0), \quad B_1(1;0;1) \\ &D(0;1;0), \quad D_1(0;1;1) \\ &C(1;1;0), \quad C_1(1;1;1) \end{aligned}$$

Найдите координаты вершин правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.



$$\begin{aligned} &A(0;0;0), \quad A_1(0;0;1) \\ &B(1;0;0), \quad B_1(1;0;1) \\ &C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

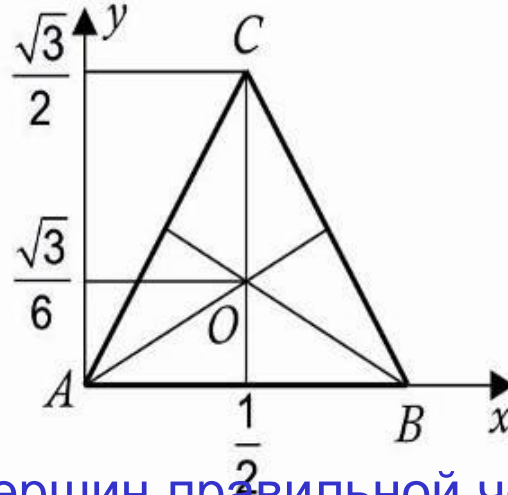
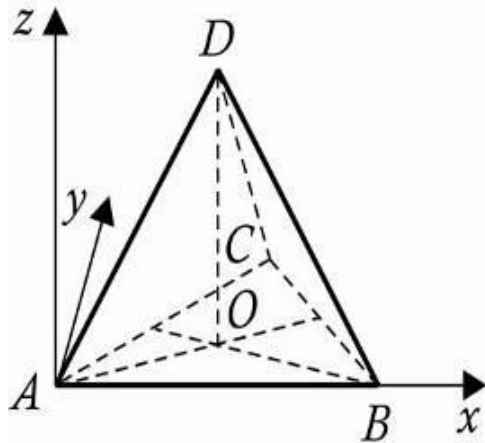
Найдите координаты вершин правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.



$$A(0;0;0), \quad A_1(0;0;1), \quad B(1;0;0), \quad B_1(1;0;1), \quad C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad C_1\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$

$$D(1; \sqrt{3}; 0), \quad D_1(1; \sqrt{3}; 1), \quad E(0; \sqrt{3}; 0), \quad E_1(0; \sqrt{3}; 1), \quad F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$

Найдите координаты вершин правильной треугольной пирамиды (тетраэдра), все ребра которой равны 1

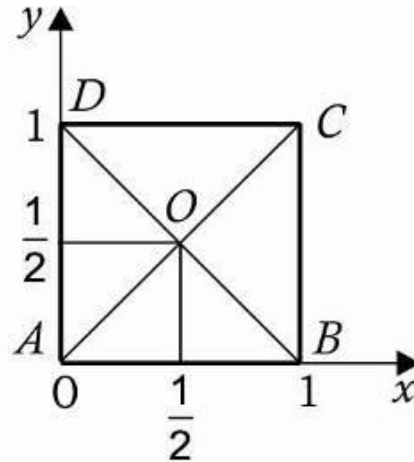
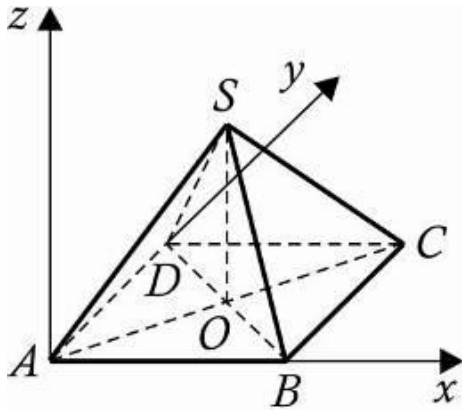


$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0),$$

$$C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Найдите координаты вершин правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1

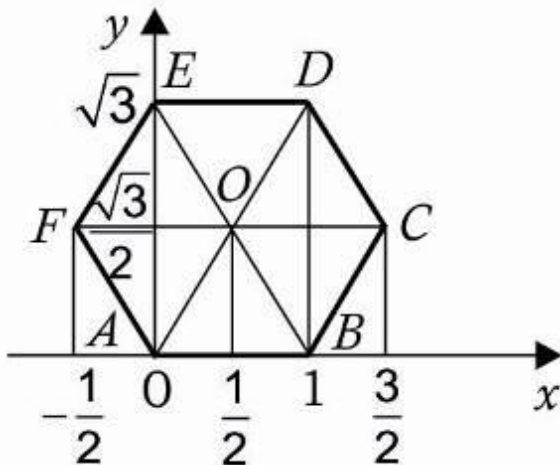
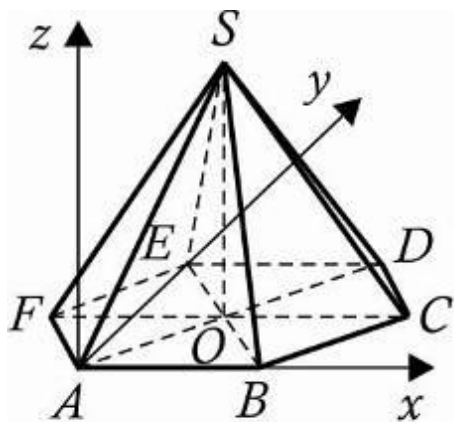


$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0),$$

$$C(1;1;0), \quad D(0;1;0)$$

$$S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Найдите координаты вершин правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2



$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0), \quad C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad D(1; \sqrt{3}; 0),$$

$$E(0; \sqrt{3}; 0), \quad F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

Составить уравнение плоскости по 3 точкам

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общий вид уравнения плоскости

1. $A(0, -\frac{1}{2}, 0), D(0, \frac{1}{2}, 1), B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 2).$

$$(ADB_1) : \begin{cases} A \cdot 0 - B \cdot \frac{1}{2} + C \cdot 0 + D = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot \frac{1}{2} + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2D, \\ C = -2D, \\ A = 2\sqrt{3}D. \end{cases}$$

$$2\sqrt{3}xD + 2yD - 2zD = 0,$$

$$2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Ответ. $2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$

Составьте уравнения координатных плоскостей

2. Уравнение плоскости yOz : $x = 0$.

Уравнение плоскости xOz : $y = 0$.

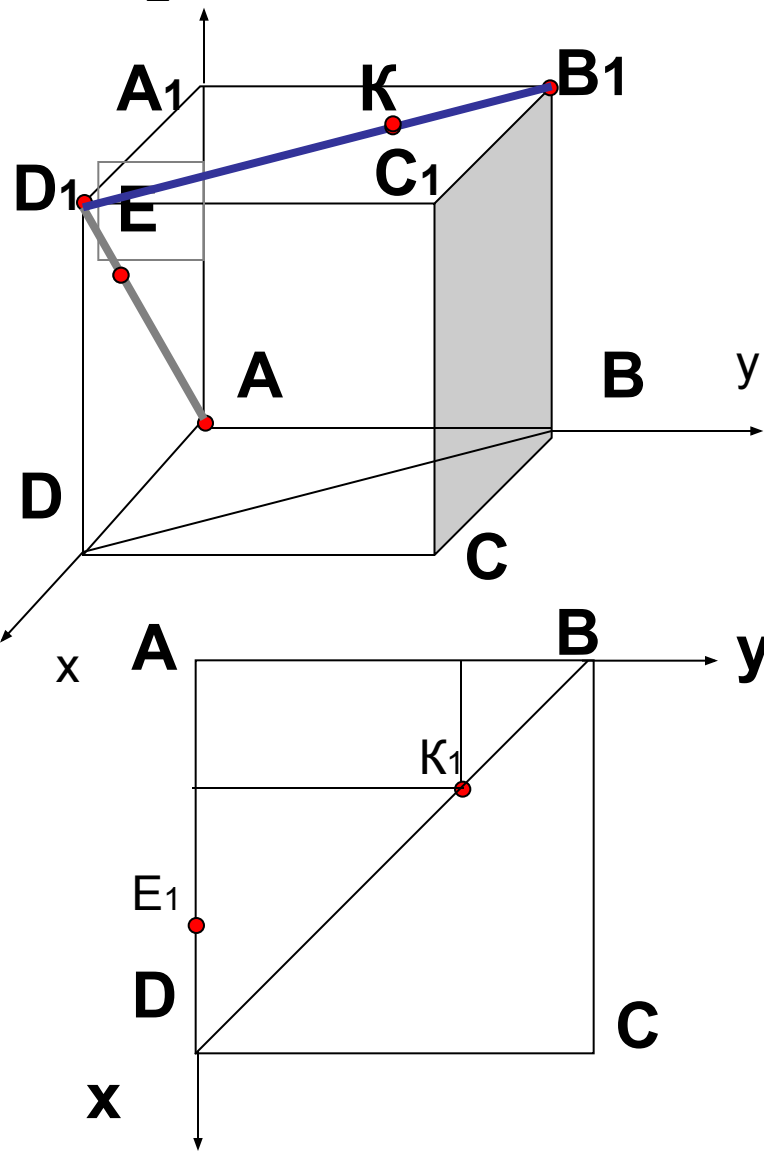
Уравнение плоскости xOy : $z = 0$.

3. Вектор нормали к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет координаты $\{A; B; C\}$ и обозначается $\vec{n} \{A; B; C\}$.

Найдите координаты нормалей к координатным плоскостям и плоскости ADB_1 .

$$\vec{n}_1 \{1; 0; 0\}, \quad \vec{n}_2 \{0; 1; 0\}, \quad \vec{n}_3 \{0; 0; 1\}, \quad \vec{n} \{2\sqrt{3}; 2; -2\}$$

Решить задачу. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, сторона которого равна 3, на диагоналях граней AD_1 и $D_1 B_1$ взяты точки E и K так, что $D_1 E : AD_1 = 1 : 3$, $D_1 K : D_1 B_1 = 2 : 3$. Найти длину отрезка EK .



Решение.

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A как показано на рис.
2. Найдем координаты точек E и K с помощью их проекций на плоскость основания.

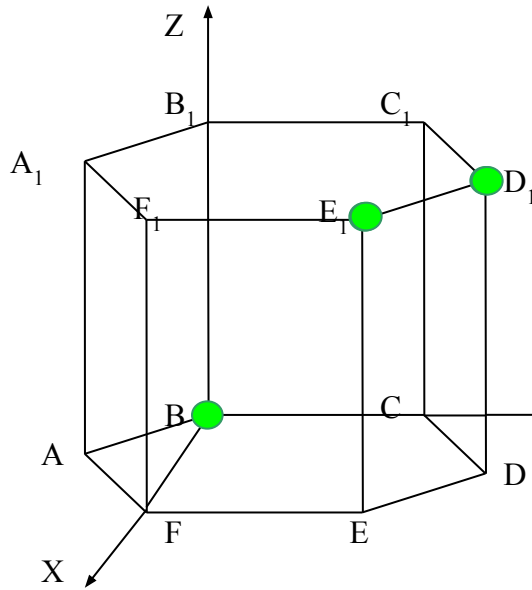
$$A(0,0,0), E_1(2,0,0), E(2,0,2), K_1(1,2,0), K(1,2,3)$$

$$3. EK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$EK = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{6}.$$

Ответ. $EK = \sqrt{6}$.

Решите задачу. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до точек E_1, D_1 .



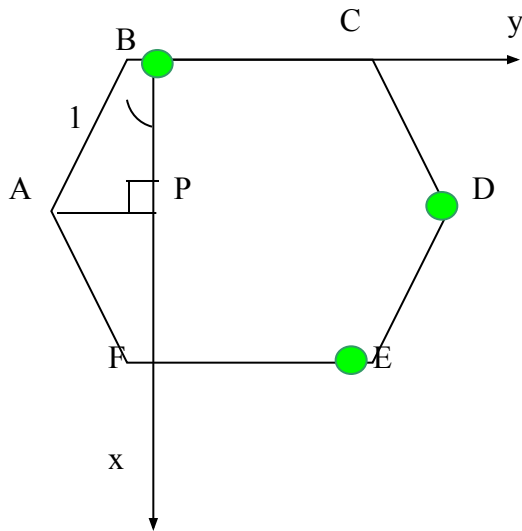
1. Введем систему координат с началом в точке B как показано на рис.

2. Найдем координаты точек E_1 и D_1

с помощью их проекций на плоскость основания.

$$\text{Из } \triangle ABP : \angle P = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, AB = 1, BP = \frac{\sqrt{3}}{2}, AP = \frac{1}{2}.$$

$$B(0;0;0), E(\sqrt{3};1;0), E_1(\sqrt{3};1;1), D(\frac{\sqrt{3}}{2};1,5;0), D_1(\frac{\sqrt{3}}{2};1,5;1).$$



$$3. BE_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$BE_1 = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}.$$

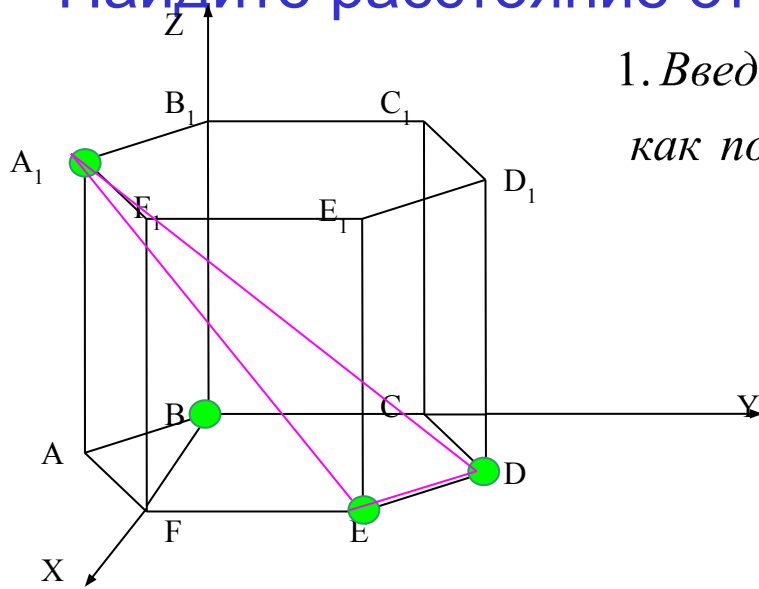
$$BD_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$BD_1 = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2 + (1,5 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = 2.$$

Ответ. $\sqrt{5}, 2$.

500013. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1 .

1. Введем систему координат с началом в точке B как показано на рис.



2. Из $\triangle ABP : \angle P = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, AB = 1, BP = \frac{\sqrt{3}}{2}, AP = \frac{1}{2}$.

$$B(0;0;0), A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; 0\right), E(\sqrt{3}; 1; 0)$$

Составим уравнение плоскости DEA_1 :

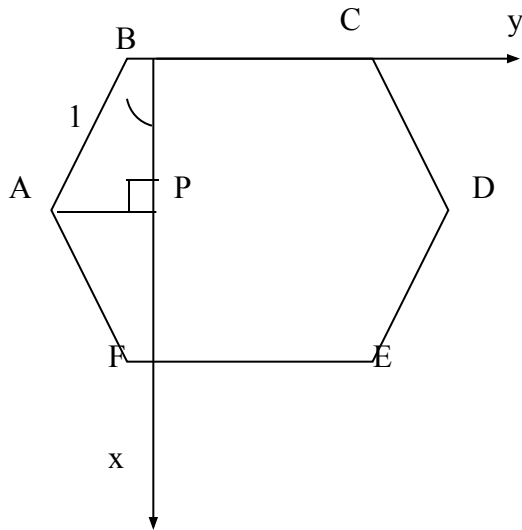
$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + y + 2z - 2 = 0,$$

$\vec{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; 1; 2 \right\}$ – вектор нормали к плоскости

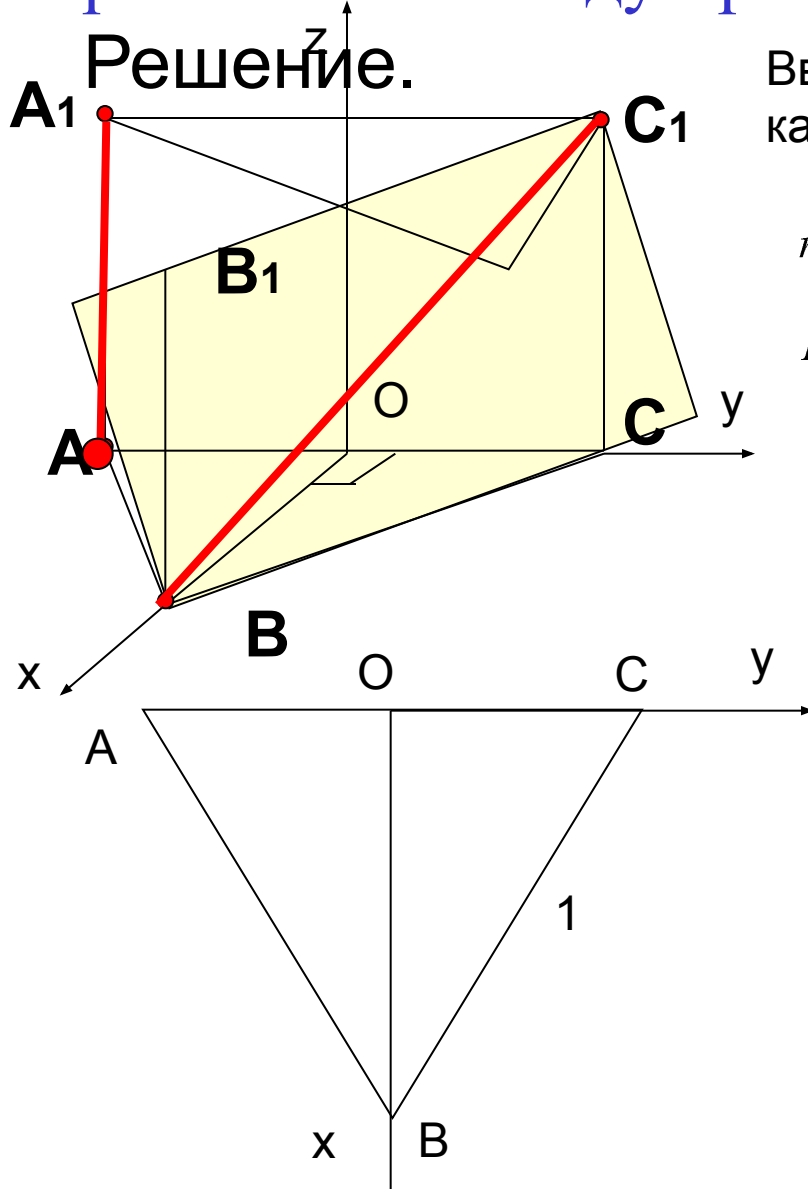
$$3. \rho(B, DEA_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\rho(B, DEA_1) = \frac{|-2|}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ответ. } \frac{\sqrt{3}}{2}$$



484577. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ все ребра которой равны 1 найти расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки на одной прямой до плоскости, содержащей вторую прямую и параллельной первой прямой.



Введем систему координат с началом в точке O как показано на рисунке.

Из равностороннего треугольника ABC имеем:
т.к. BO – медиана и высота, то

$$BO = \sqrt{BC^2 - OC^2}, \quad BO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(0, -\frac{1}{2}, 0), \quad B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), \quad C(0, \frac{1}{2}, 0), \quad C_1(0, \frac{1}{2}, 1).$$

Составим уравнение плоскости (BCC_1) :

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}x - 2y + 1 = 0.$$

$$\vec{n} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}}; -2; 0 \right\}$$

$$\rho(A; BCC_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + cZ_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

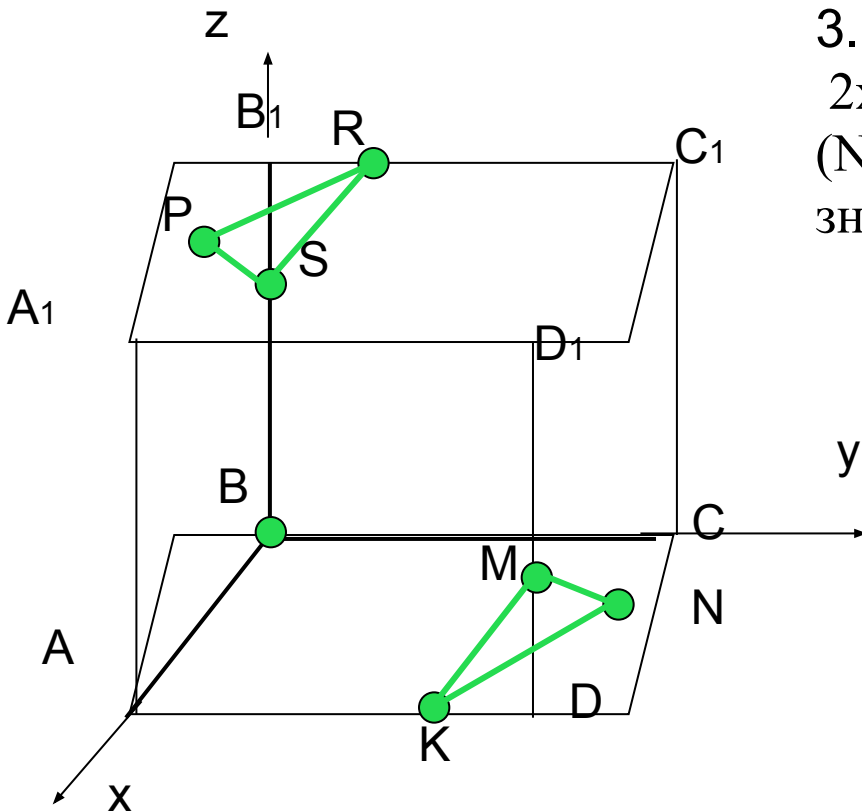
$$\rho(A; BCC_1) = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{0 + \frac{4}{3} + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решите задачу. Найти расстояние между плоскостями сечений куба (PRS) и (NKM), ребро которого 12, где $DN:NC=A_1P:PB_1=1:2$, $B_1S:SB=D_1M:MD_1=1:3$, $B_1R:RC_1=DK:KA=1:4$.

Решение.

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке В как показано на рисунке.
2. $B(0; 0; 0)$; $P(6; 0; 12)$; $R(0; 3; 12)$; $S(0; 0; 8)$; $N(6; 12; 0)$; $K(12; 9; 0)$; $M(12; 12; 4)$



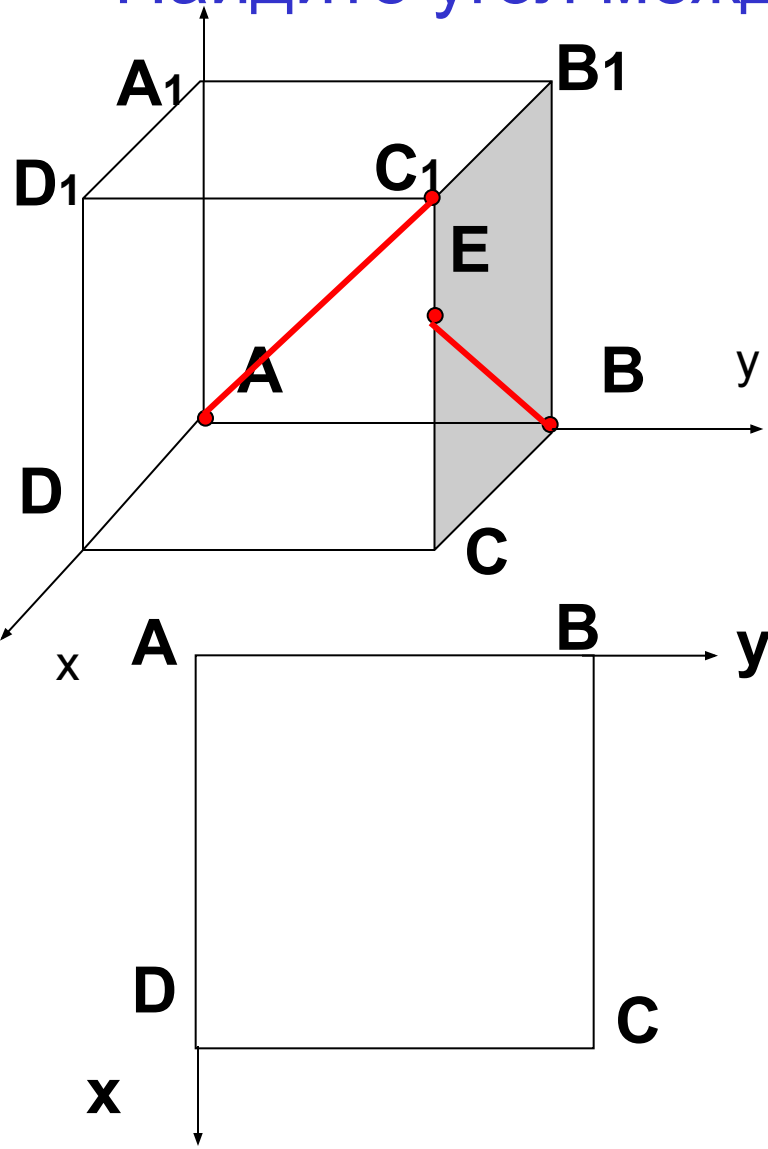
3. Уравнение плоскости (PRS) имеет вид $2x+4y-3z+24=0$, а уравнение плоскости (NKM) $2x+4y-3z-60=0$, значит плоскости параллельны.

$$4. \rho(PRS; NKM) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\rho(PRS; NKM) = \frac{|24 + 60|}{\sqrt{4 + 16 + 9}} = \frac{84}{\sqrt{29}}.$$

Ответ: $\frac{84}{\sqrt{29}}.$

500387. На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $CE:EC_1=2:1$.
Найдите угол между прямыми BE и AC_1 .



Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A как показано на рис. Пусть сторона куба равна 3.

$$A(0, 0, 0), \quad B(0, 3, 0), \quad E(3, 3, 2), \quad C_1(3, 3, 3)$$

$$\overrightarrow{AC_1} \{3, 3, 3\}, \quad \overrightarrow{BE} \{3, 0, 2\}.$$

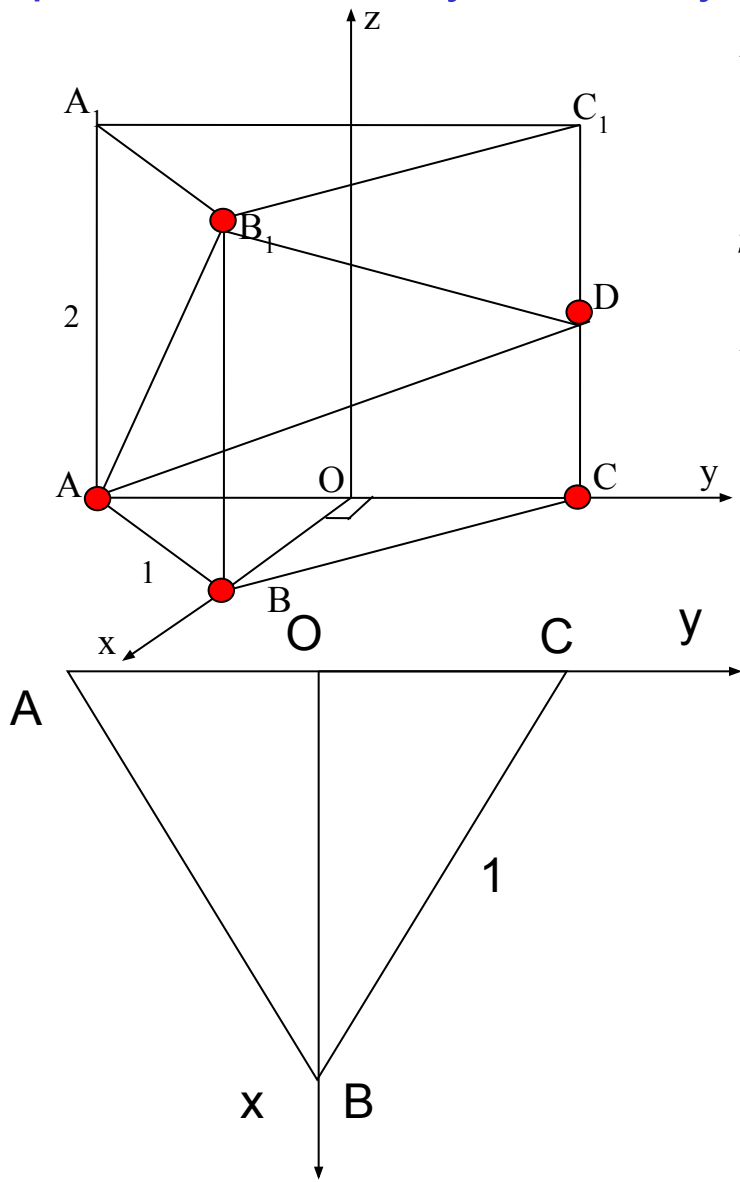
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BE}) = \frac{|3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{9 + 9 + 9} \cdot \sqrt{9 + 0 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

$$\text{Искомый угол равен } \arccos \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

$$\text{Ответ. } \arccos \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

500347. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка D — середина ребра CC_1 . Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .



Введем прямоугольную систему координат как показано на рис.

Из равностороннего треугольника ABC имеем : т.к. BO — медиана и высота, то

$$BO = \sqrt{BC^2 - OC^2}, \quad BO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(0, -\frac{1}{2}, 0), \quad B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), \quad C(0, \frac{1}{2}, 0), \quad D(0, \frac{1}{2}, 1), \quad B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 2).$$

Составим уравнения плоскостей $ABC : z = 0$ и $ADB_1 :$

$$2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

$$\vec{n}_2 \{ 2\sqrt{3}; 2; -2 \} - (\vec{n}_2 \perp (ADB_1))$$

$$\vec{n}_1 \{ 0; 0; 1 \} - (\vec{n}_1 \perp (ABC))$$

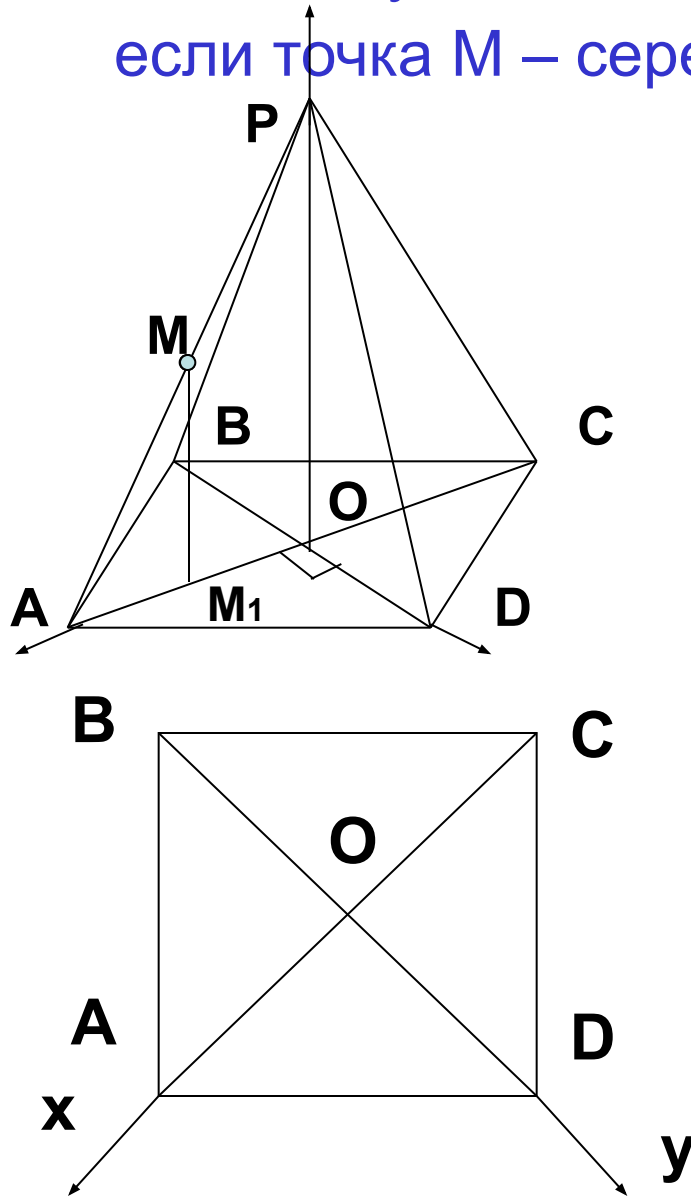
$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|0 \cdot 2\sqrt{3} + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

искомый угол равен $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$

Ответ : $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$

484568. Длины ребер правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP , если точка M – середина бокового ребра пирамиды AP .



Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O – точке пересечения диагоналей квадрата как показано на рис. Пусть $AB = 1$.

$$\text{Из } \triangle ABC \text{ имеем: } \angle B = 90^\circ, AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}, AC = \sqrt{2}, AO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle APO \text{ имеем: } \angle O = 90^\circ, PO = \sqrt{AP^2 - AO^2}, PO = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Из подобия треугольников } AMM_1 \text{ и } APO \text{ имеем: } PO = 2MM_1, MM_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$B\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right), D\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), P\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{BM} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} - \text{направляющий вектор прямой } BM.$$

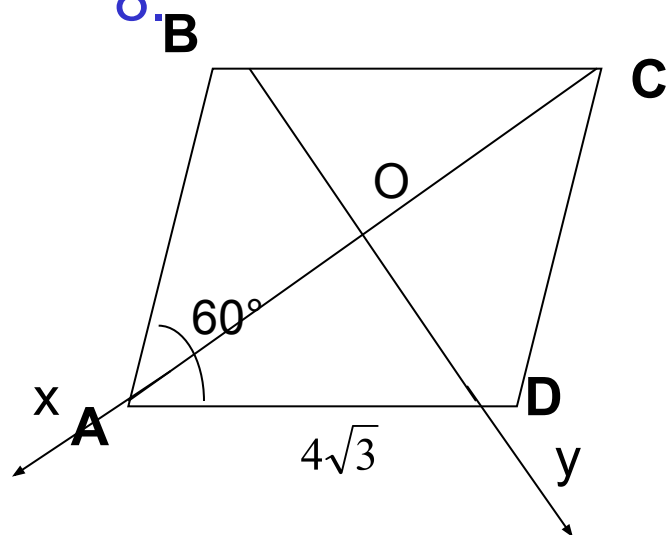
$$\text{Составим уравнение плоскости } (BDP): x = 0, \vec{n} \{1; 0; 0\}.$$

$$\sin(\overrightarrow{BM}, \vec{n}) = \frac{a_1 A + a_2 B + a_3 C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\sin(\overrightarrow{BM}, \vec{n}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ искомый угол равен } \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$$

500001. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, со стороной $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60° . Найти расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$, если боковое ребро параллелепипеда равно 8.

Как введем прямоугольную систему координат?



Т.к. диагонали ромба перпендикулярны, то начало координат можно взять в точке их пересечения.

Координаты каких точек надо найти?

A , C_1 , D_1 и основания перпендикуляра опущенного из точки A на прямую $C_1 D_1$ – точки K_1 .

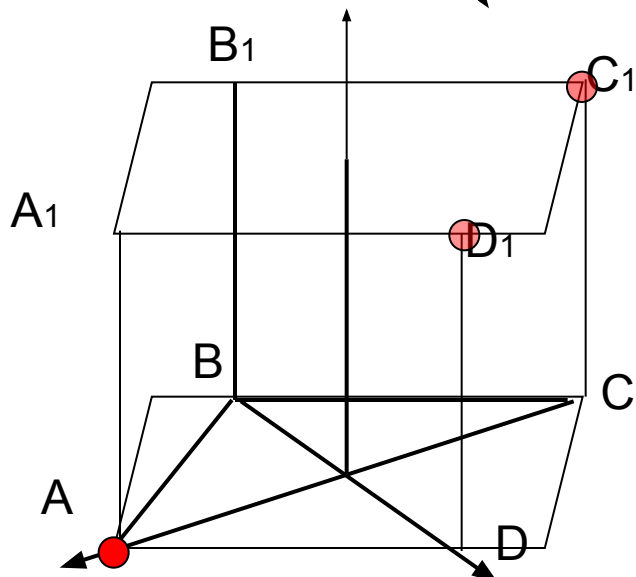
Где лежит проекция точки K_1 ? На прямой CD .

Пусть $K_1(x_0, y_0, z_0)$, ее проекция $K(x_0, y_0, 0)$

Из $\triangle ABD$: $AB = AD = BD = 4\sqrt{3}$, $DO = 2\sqrt{3}$.

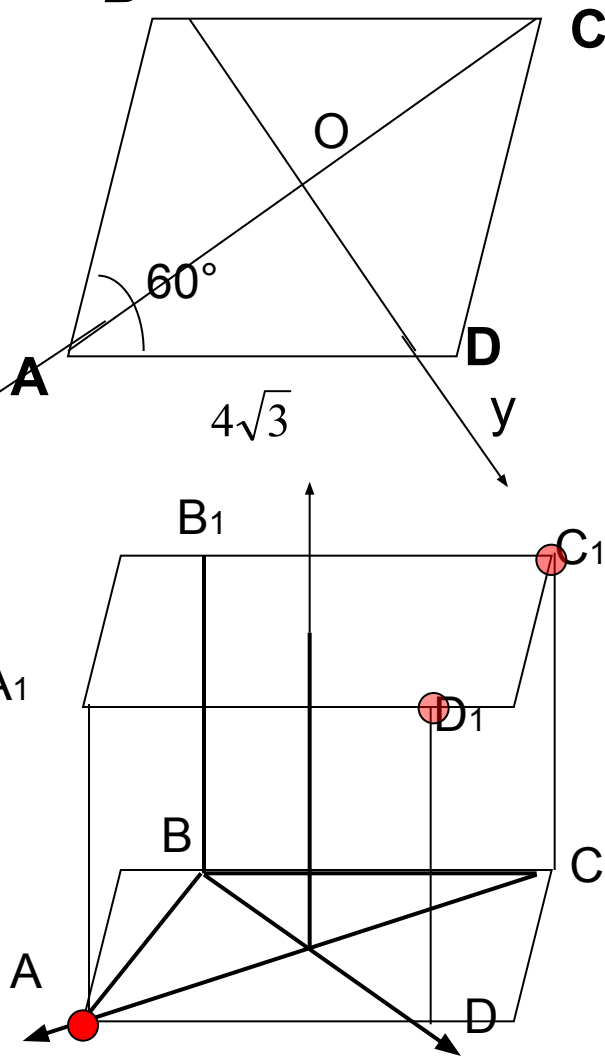
Из $\triangle AOD$: $AO = 6$

$A(6, 0, 0)$, $C_1(-6, 0, 8)$, $D_1(0, 2\sqrt{3}, 8)$



500001. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, со стороной $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60° . Найти расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$, если боковое ребро параллелепипеда равно

8.



$A(6, 0, 0)$, $C_1(-6, 0, 8)$, $D_1(0, 2\sqrt{3}, 8)$, $K_1(x_0, y_0, 8)$

Найдем координаты точки K_1 .

1) Т.к. $K_1 \in C_1 D_1$, то $\overrightarrow{C_1 D_1} \parallel \overrightarrow{D_1 K_1}$, следовательно их координаты пропорциональны

$$\overrightarrow{C_1 D_1} \{6, 2\sqrt{3}, 0\}, \quad \overrightarrow{D_1 K_1} \{x_0, y_0 - 2\sqrt{3}, 0\}$$

$$\frac{x_0}{6} = \lambda, \quad \frac{y_0 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \lambda,$$

$$x_0 = 6\lambda, \quad y_0 = 2\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}.$$

$$\overrightarrow{A K_1} \{6\lambda - 6, 2\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}, 8\}.$$

2) Т.к. $\overrightarrow{C_1 D_1} \perp \overrightarrow{A K_1}$, то $\overrightarrow{C_1 D_1} \cdot \overrightarrow{A K_1} = 0$

$$6 \cdot (6\lambda - 6) + 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}) + 8 \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}. \quad A K_1 = \sqrt{\left(6 \cdot \frac{1}{2} - 6\right)^2 + \left(2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = 10$$

Домашнее задание: решить задачи по выбору

1. Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4, 4. Найти расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.
2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до точек E_1, D_1 .
3. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали $B_1 D_1$ так, что $B_1 M = 2 M D_1$. Найти расстояние между точками Q и L , где Q – середина отрезка EM , а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2 LK$.

**№ 484559, 484569, 485992, 485997, 500007, 500193,
500367**

на сайте <http://reshuege.ru>