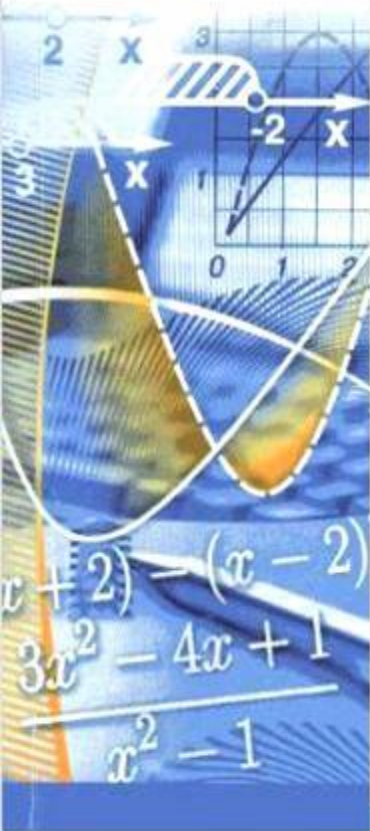




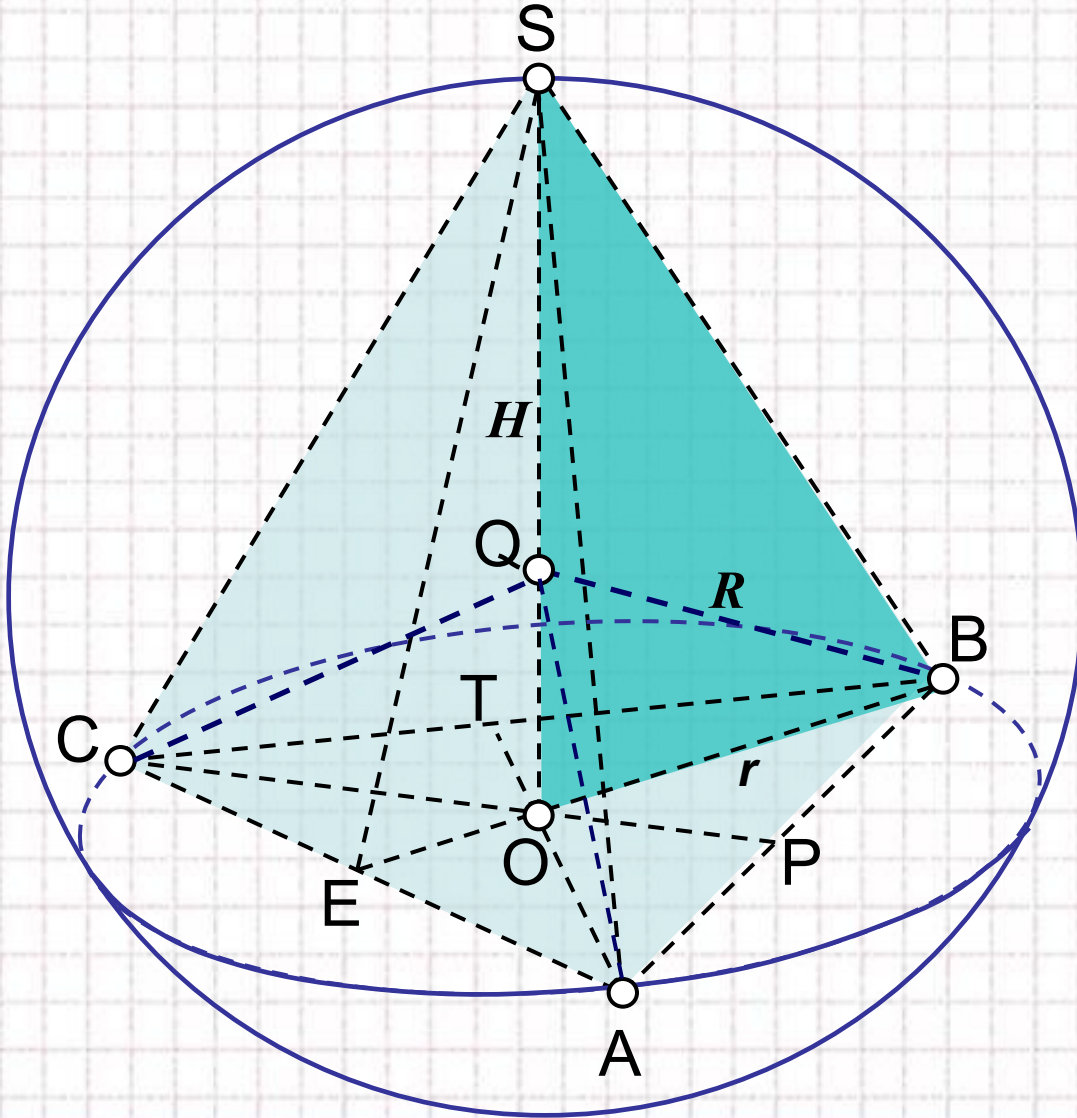
Решение задач на комбинации многогранников и тел вращения

Урок геометрии, 11 класс

Чудаева Елена Владимировна,



Правильная треугольная пирамида, вписанная в шар



$AQ = BQ = CQ = SQ = R$ – радиус шара.

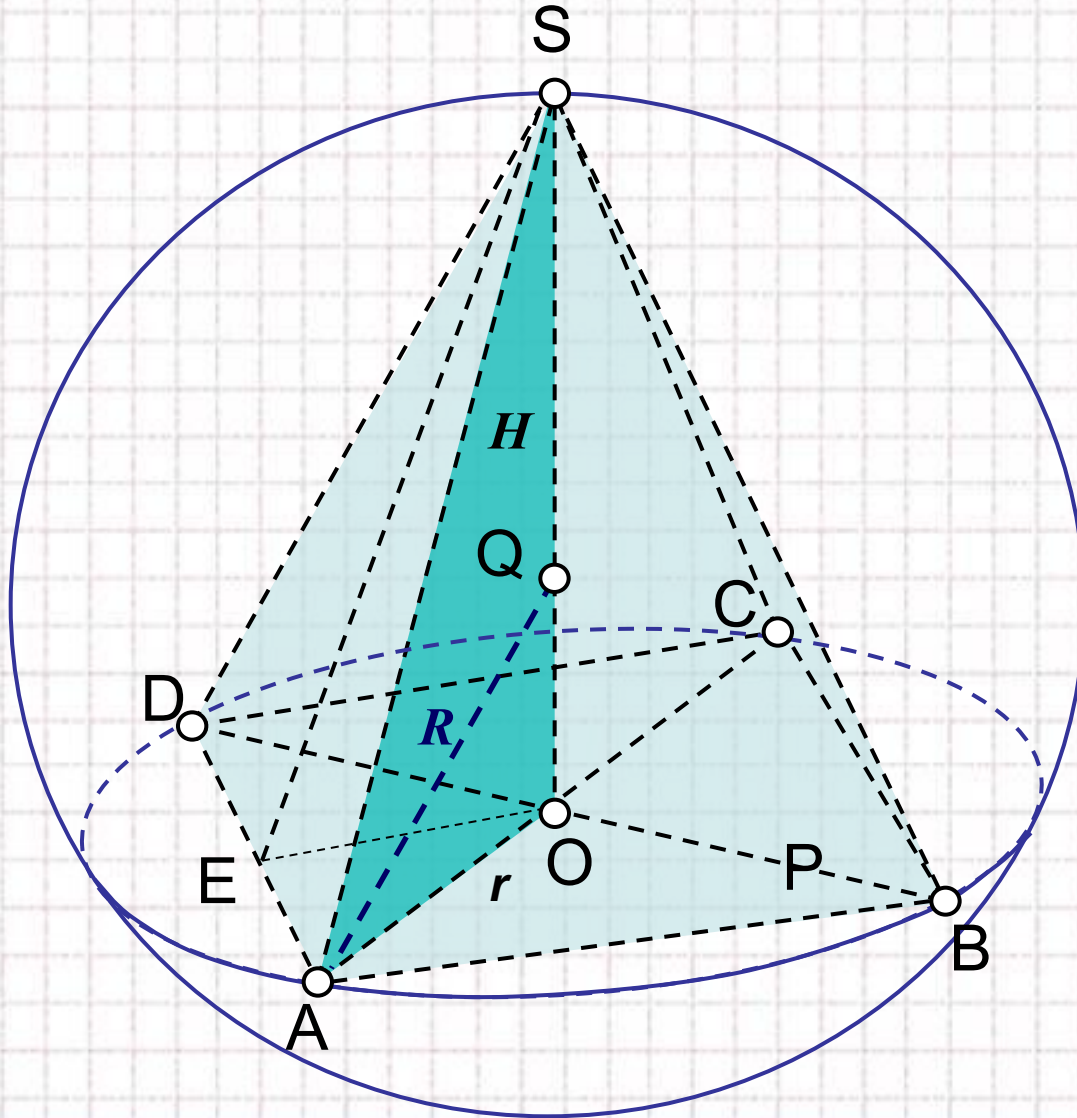
**$AO = BO = CO = r$ –
радиус круга,
описанного около
основания пирамиды.**

$SO = H$ – высота пирамиды.

$SE = h$ – апофема пирамиды.

$$R^2 = r^2 + (H - R)^2$$

Правильная четырехугольная пирамида, вписанная в шар


$$AQ = BQ = CQ = DQ = SQ = R - \text{радиус шара.}$$

**$AO = BO = CO = DO = r$
радиус круга,
описанного около
основания пирамиды.**

$SO = H$ – высота пирамиды.

$SE = h$ – апофема пирамиды.

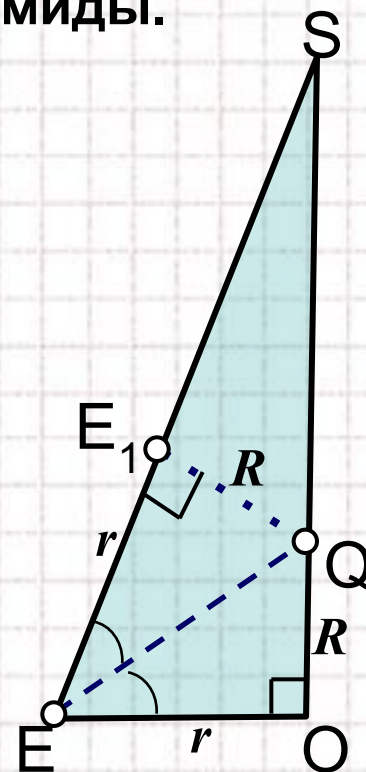
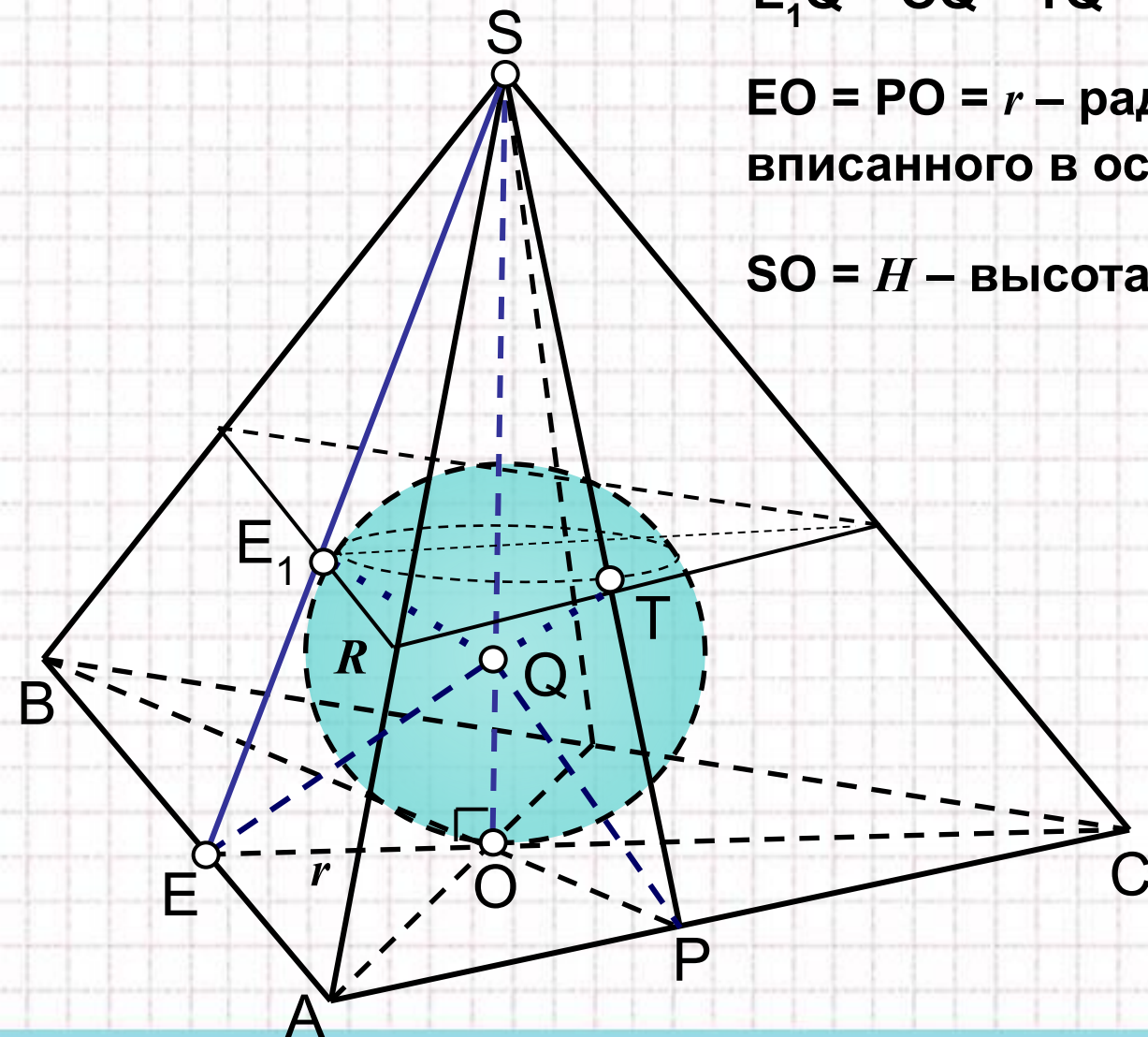
$$R^2 = r^2 + (H - R)^2$$

Треугольная пирамида описана около шара

$E_1Q = OQ = TQ = R$ – радиус шара.

$EO = PO = r$ – радиус круга,
вписанного в основание пирамиды.

$SO = H$ – высота пирамиды.

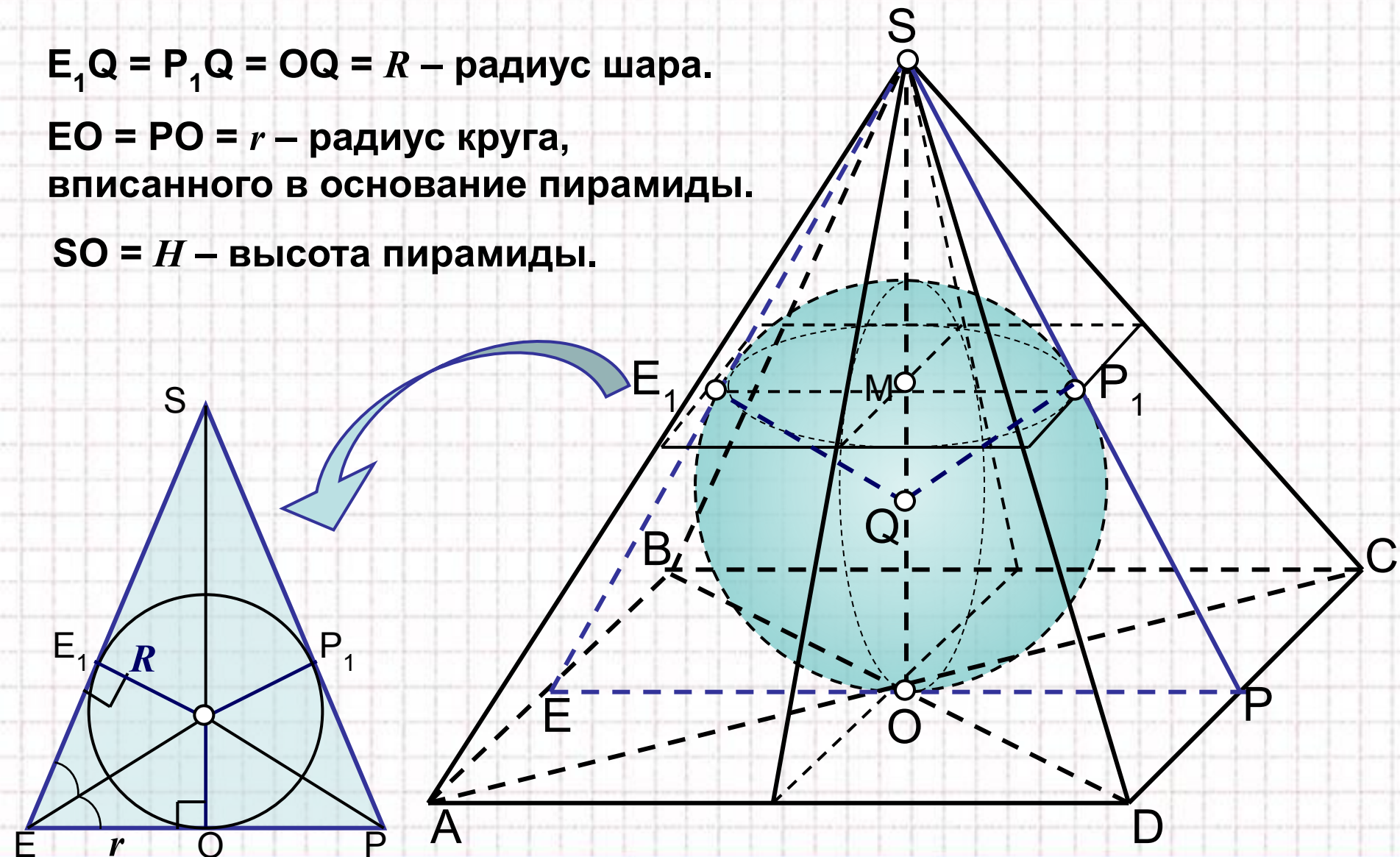


Четырехугольная пирамида описана около шара

$E_1Q = P_1Q = OQ = R$ – радиус шара.

$EO = PO = r$ – радиус круга,
вписанного в основание пирамиды.

$SO = H$ – высота пирамиды.



Задачи



1

Шар вписан в пирамиду.

2

Пирамида вписана в шар.

3

Сфера вписана в конус.

4

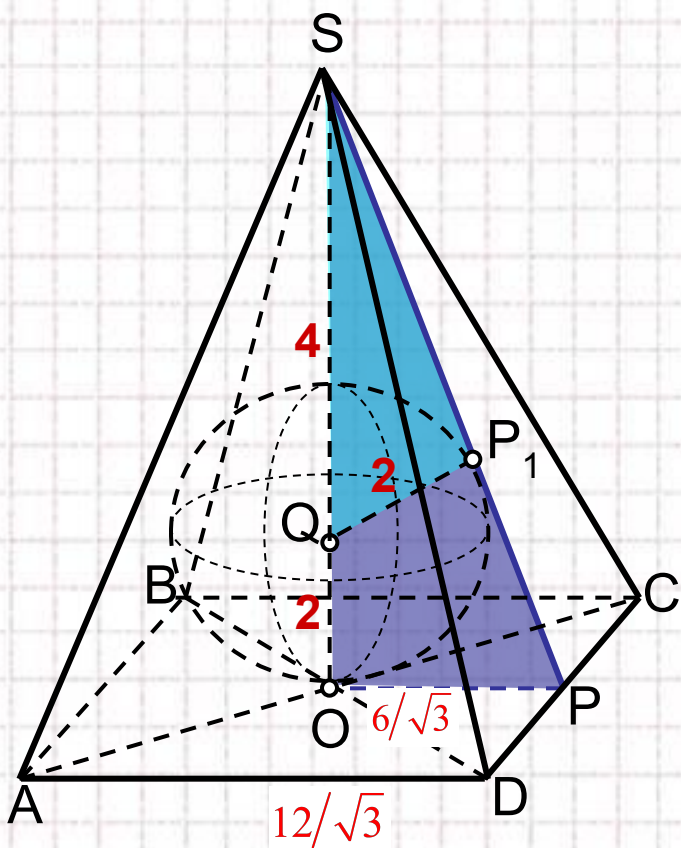
Куб вписан в конус.

5

Шар вписан в конус.

1

В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, объем которого $32\pi/3$. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 6.



Решение.

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot H$$

1) $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32}{3} \pi$, тогда $R^3 = 8$, $R_{ш} = 2$.

2) $SQ = SO - OQ$, $SQ = 6 - 2 = 4$.

3) $\triangle SP_1Q$ – прямоугольный, $SP_1 = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

4) $\triangle SP_1Q \sim \triangle SOP$ ($\angle P_1 = \angle O = 90^\circ$, $\angle S$ – общий),
 $\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}$, откуда $OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2 \cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

5) Тогда сторона основания пирамиды вдвое больше, и равна $\frac{12}{\sqrt{3}}$.

6) $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot 6 = 96$.

Ответ: 96.



2

В шар, объём которого $\frac{500}{3}\pi$, вписана правильная четырёхугольная пирамида. Найдите объём пирамиды, если её боковое ребро равно $3\sqrt{10}$, а высота больше радиуса шара.

Решение.

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot H$$

1) $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{500}{3} \pi$, тогда $R^3 = 125$, $R_{ш} = 5$.

2) Пусть $OQ = x$, тогда из $\triangle AOQ$ выразим сторону AO : $AO = \sqrt{25 - x^2}$.

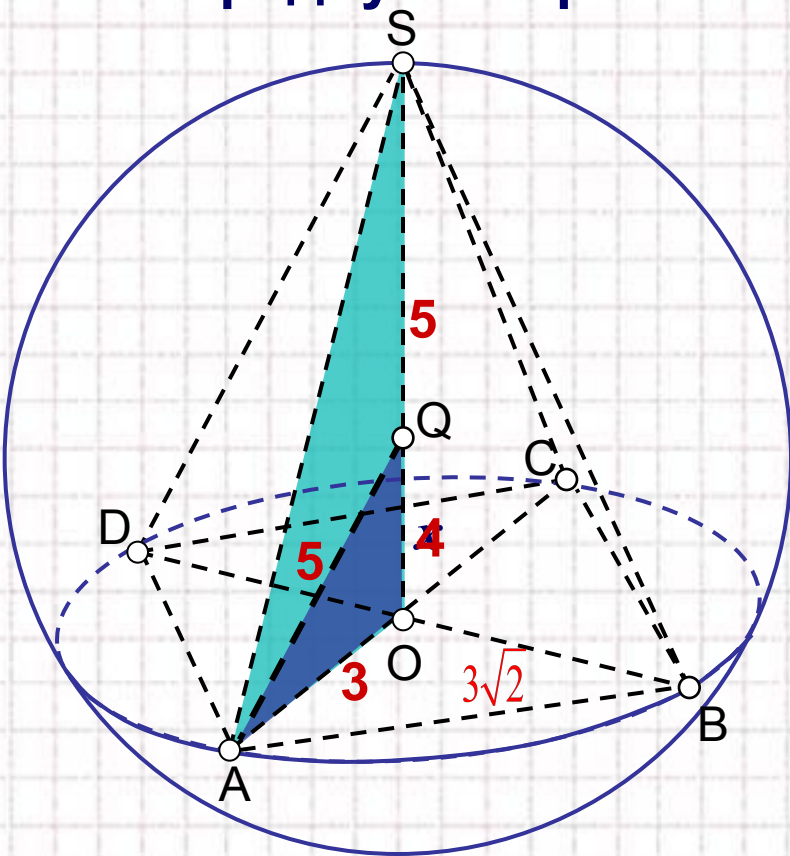
3) Составим теорему Пифагора для $\triangle ASO$:
 $AS^2 = AO^2 + SO^2$, $(3\sqrt{10})^2 = (25 - x^2) + (5 + x)^2$.
 Откуда находим $OQ = 4$.

4) Тогда $SO = 5 + 4 = 9$, и $AO = 3$.

5) В основании пирамиды квадрат, со стороной a , равной $AO\sqrt{2}$, т.е. $a = 2\sqrt{2}$.

6) $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 9 = 54$.

Ответ: 54.



3

Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π . Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π . Найдите радиус основания конуса.

Решение.

1) $C = 2\pi r = 6\pi$, тогда $r = O_2P = 3$.

2) $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 100\pi$, тогда $R = O_1P = 5$.

3) Из $\triangle O_1O_2P$ по теореме Пифагора находим:

$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

4) В $\triangle O_1PS$ отрезок PO_2 высота, проведенная из вершины прямого угла, значит

$$O_2P = \sqrt{SO_2 \cdot O_1O_2} \text{ т.е. } 3 = \sqrt{SO_2 \cdot 4}, \quad SO_2 = \frac{9}{4} = 2,25.$$

5) Найдём высоту конуса

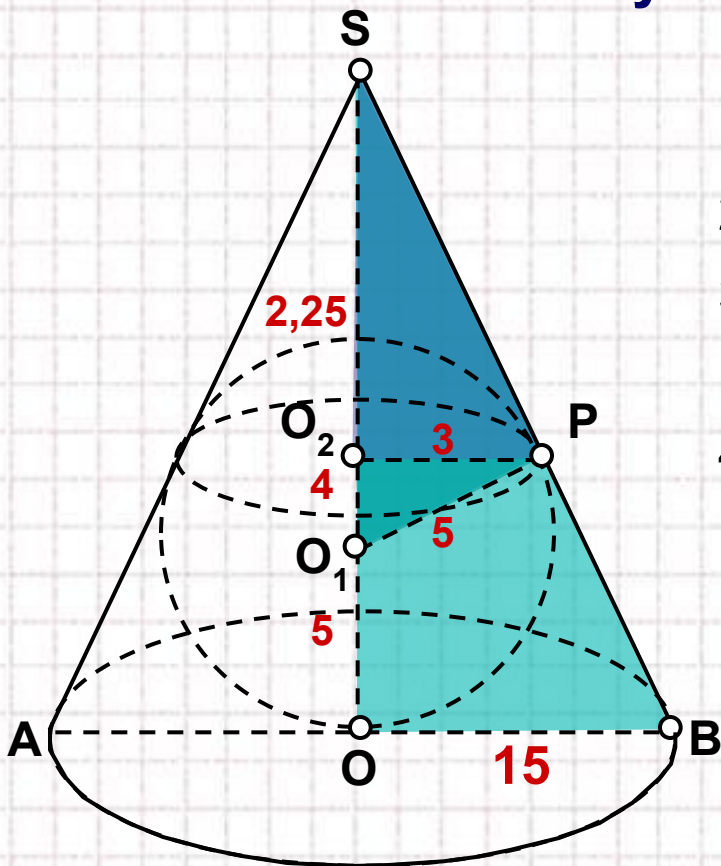
$$SO = SO_2 + O_2O_1 + O_1O = 2,25 + 4 + 5 = 11,25.$$

6) $\triangle SO_2P \sim \triangle SOB$ ($\angle O_2 = \angle O = 90^\circ$, $\angle S$ –

общий)

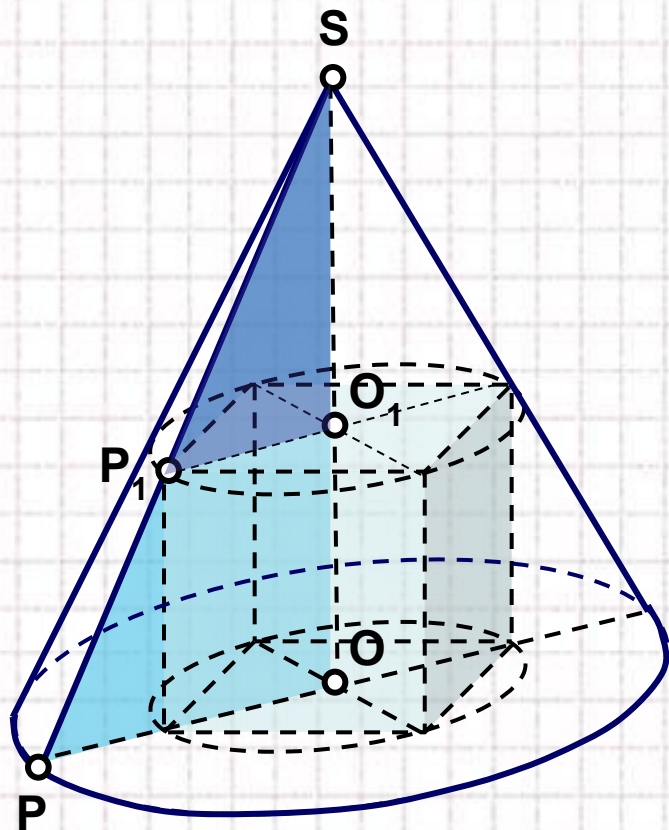
$$\frac{SO_2}{SO} = \frac{O_2P}{OB}, \text{ откуда } OB = \frac{O_2P \cdot SO}{SO_2} = \frac{3 \cdot 11,25}{2,25} = 15.$$

Ответ: 15.



4

В конус с образующей $6\sqrt{6}$ и высотой 12 вписан куб. Найдите объём куба.



Решение.

1) Из прямоугольного $\triangle SOP$ находим:

$$OP = \sqrt{SP^2 - SO^2} = \sqrt{216 - 144} = 6\sqrt{2}.$$

2) a – сторона куба, тогда $a = R\sqrt{2}$.

3) Выразим через a : $O_1P_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$OO_1 = a, \quad SO_1 = SO - OO_1 = 12 - a.$$

4) $\triangle SO_1P_1 \sim \triangle SOP$ ($\angle O_1 = \angle O = 90^\circ$, $\angle S$ – общий)
 $\frac{SO_1}{SO} = \frac{P_1O_1}{PO}$, $\frac{12 - a}{12} = \frac{a/\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$, откуда $a = 6$.

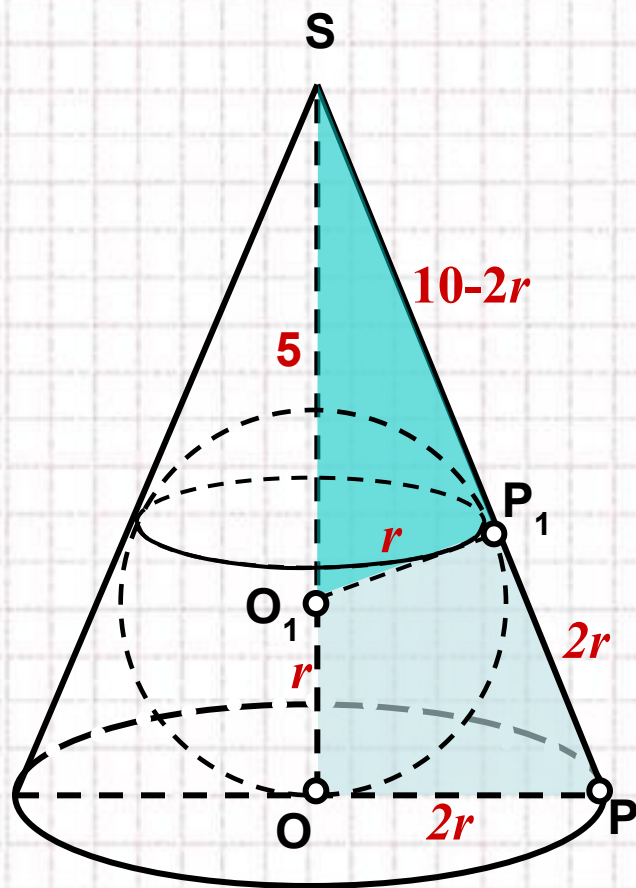
$$5) V_{\text{куба}} = a^3 = 6^3 = 216.$$

Ответ: 216.



5

Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна 10.



Ответ: 3.

Решение.

1) Обозначим радиус шара r , а радиус основания конуса R .

2) По условию $S_{\text{осн.конуса}} = S_{\text{шара}}$, т.е.
 $\pi R^2 = 4\pi r^2$, $R = 2r$.

3) $\triangle SP_1O_1 \sim \triangle SOP$ ($\angle P_1 = \angle O = 90^\circ$, $\angle S$ – общий)
 $\frac{O_1P_1}{OP} = \frac{SO_1}{SP}$, $\frac{r}{2r} = \frac{SO_1}{10}$, откуда $SO_1 = 5$,
 коэффициент подобия треугольников $k = \frac{1}{2}$.

4) Заметим, что $PP_1 = 2r$, $SP_1 = 10 - 2r$, $SO = 5 + r$.

5) Тогда $\frac{SP_1}{SO} = \frac{1}{2}$, $\frac{10 - 2r}{5 + r} = \frac{1}{2}$, откуда $r = 3$.



Реши самостоятельно

1

Высота конуса равна 6, а объём равен 144π .
Найдите площадь полной поверхности куба,
вписанного в конус.

Ответ: 96

2

Шар объём которого равен $32\pi/3$, вписан в конус.
Найдите высоту конуса, если радиус его
основания равен $2\sqrt{3}$.

Ответ: 6



Желаю удачи!



Домашнее задание

Реши задачу и оформи решение либо на альбомном листе, либо в виде электронного документа (PowerPoint, Paint, Word и т.д.)

Рефлексия

Что нового вы узнали на уроке?

Чему вы научились?

Какое у вас настроение в конце урока?

Можете ли вы объяснить решение данных задач однокласснику, пропустившему урок сегодня?



Использованные ресурсы

1. Готман Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения. М.: МЦНМО, 2006.— 160 с.
2. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия. М.: Просвещение, 1992.
3. Комплект таблиц по стереометрии:
http://www.varson.ru/geometr_9.html
4. Единый государственный экзамен 2001: Тестовые задания: Математика/С.В. Климин, Т.В. Стрункина, Е.И. Пантелеева и др.; М-во образования РФ. – М.: Просвещение, 2001
5. Для создания шаблона презентации использовалась картинка http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg и шаблон с сайта <http://aida.ucoz.ru>
6. Рисунки на слайдах №6, №12, №13 взяты с сайта:
<http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B>