Тема 4. Теплопроводность

Лекции 16, 17

§ 4. Нестационарная теплопроводность

Процесс теплопроводности в неограниченной пластине описывается уравнением:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = a \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2}, -$$

одномерное дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности при не зависящем от температуры λ и отсутствии внутренних источников теплоты.

В качестве начальных условий принимаем равномерное распределение температуры в начальный момент времени. В качестве граничных условий рассмотрим граничные условия III рода.

Для решения дифференциального уравнения воспользуемся методом разделения переменных:

$$T(x, t) = \Phi(x) \cdot \Pi(t).$$

$$\Phi \cdot \frac{d\Pi}{dt} = a \cdot \Pi \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{a \cdot \Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a \cdot \Pi} \cdot \dfrac{d\Pi}{dt} = -k^2, \\ \dfrac{1}{\Phi} \cdot \dfrac{d^2\Phi}{dx^2} = -k^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Pi(t) = C_1 \cdot \exp\left(-a \cdot k^2 \cdot t\right), \\ \Phi(x) = C_2 \cdot \cos(k \cdot x) + C_3 \cdot \sin(k \cdot x). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x, t) = \exp\left(-a \cdot k^2 \cdot t\right) \cdot \left[C \cdot \cos(k \cdot x) + D \cdot \sin(k \cdot x)\right],$$

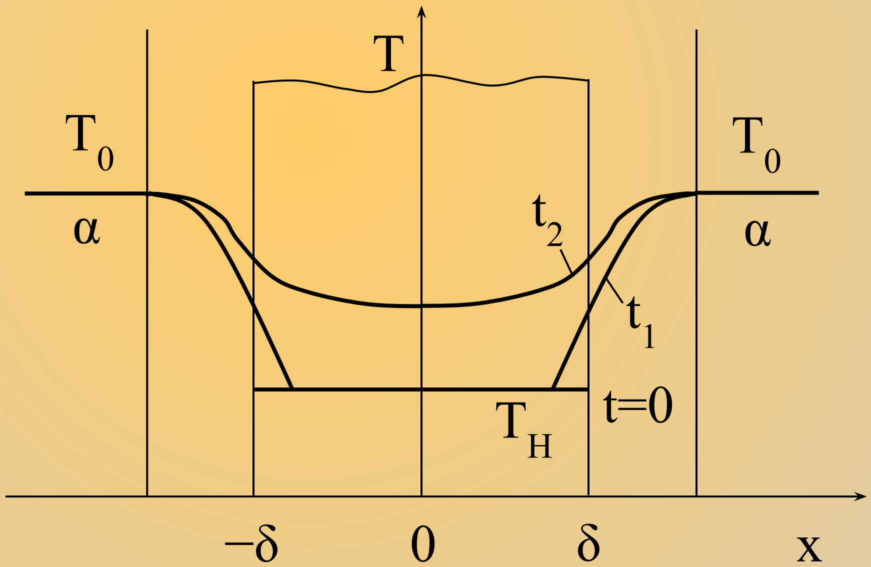
где $C = C_1 \cdot C_2$, $D = C_1 \cdot C_3$.

Константы C, D и *k* определим из краевых условий.

Принимаем допущения:

1) считаем, что нагрев (или охлаждение) пластины происходит из-за конвективной теплоотдачи от окружающей среды с постоянной температурой T_0;

2) рассматриваем осесимметричную задачу, то есть граничные условия на обеих поверхностях пластины считаем одинаковыми.



Функция $\sin(k \cdot x)$ является нечетной, следовательно, для симметричной задачи константа $D = 0$.

Решение принимает вид:

$$T(x,t) = C\cdot \exp\left(-k^2\cdot a\cdot t\right)\cdot \cos(k\cdot x).$$

Краевые условия:

$$T\,(x,\,0) = T_H\,,$$

$$\alpha\cdot\left[T_0 - T(\pm\delta,t)\right] = -\lambda\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta}.$$

Введем новую переменную – избыточную температуру:

$$\vartheta\,(x,\,t) = T_0 - T\,(x,\,t)\,.$$

Для этой переменной формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\,.$$

Краевые условия:

$$\vartheta\,(x, 0) = T_0 - T_H = \vartheta_H\,,$$

$$\alpha \cdot \vartheta(\pm\delta, t) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta}.$$

Знак в правой части граничного условия изменился в связи с тем, что

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Решение имеет тот же вид, так как уравнение теплопроводности имеет тот же вид:

$$\vartheta(x, t) = C \cdot \exp\left(-k^2 \cdot a \cdot t\right) \cdot \cos(k \cdot x).$$

Подставим решение в граничное условие, например, при x=−δ:

$$\alpha \cdot C \cdot \exp\left(-k^2 \cdot a \cdot t\right) \cdot \cos(k \cdot \delta) =$$

$$= \lambda \cdot C \cdot k \cdot \exp\left(-k^2 \cdot a \cdot t\right) \cdot \sin(k \cdot \delta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ctg}(k \cdot \delta) = \frac{k \cdot \lambda}{\alpha} = \frac{k \cdot \delta}{\dfrac{\alpha \cdot \delta}{\lambda}} .$$

Обозначим произведение $k \cdot \delta = \mu$ и назовем эту величину характеристическим числом.

$$\frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda} = Bi$$ – критерий Био.

Жан Батист Био (1774–1862) – французский физик, геодезист и астроном. Его первые работы были посвящены исследованию свойств газов. В 1811 г. открыл поляризацию света при преломлении, в 1815 – круговую поляризацию и установил закон вращения плоскости поляризации (закон Био), существование право- и левовращающих веществ. В 1820 г. совместно с Феликсом Саваром открыл закон, определяющий напряженность магнитного поля проводника с током (закон Био-Савара).

Био – автор широко известного «Курса общей физики» (1816). Его идеи о нематериальности теплоты, работы по теплопроводности, обработка математическим путем опытов над тепловым расширением тел и многое другое показывают, как он стремился все части современной ему физики усвоить и оформить до такой степени, что читателю кажется, будто они являются его оригинальными открытиями.

Имеем трансцендентное характеристическое уравнение, которое можно решить графически:

$$\mathrm{ctg}\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}.$$

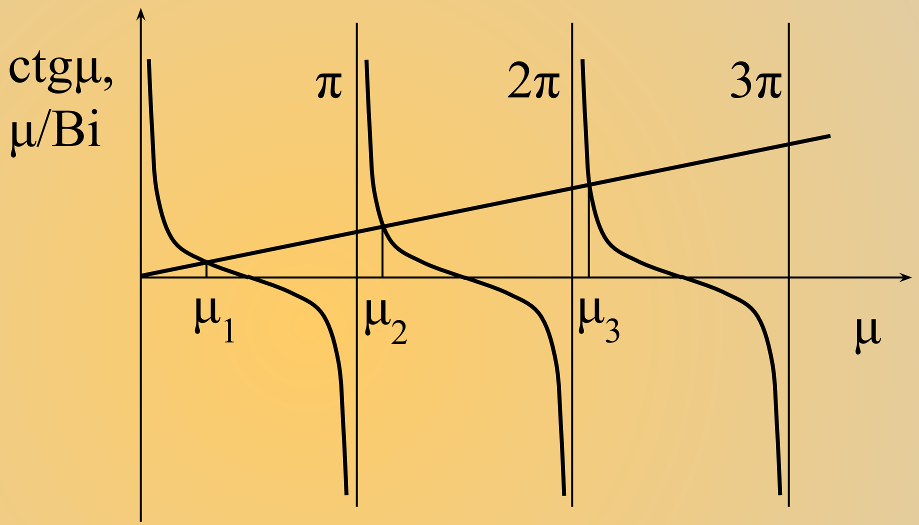


График левой части уравнения представляет собой котангенсоиду, являющуюся периодической функцией аргумента μ с периодом π, а график правой части – прямую с угловым коэффициентом 1/Bi. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение имеет бесчисленное множество корней.

В связи с линейностью дифференциального уравнения теплопроводности его общее решение является суммой его частных решений:

$$\vartheta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cdot\exp\left(-\mu_n^2\cdot\frac{a\cdot t}{\delta^2}\right)\cdot\cos\left(\mu_n\cdot\frac{x}{\delta}\right).$$

Стоящая в показателе экспоненты величина $\frac{a\cdot t}{\delta^2}=\mathrm{Fo}$ – критерий Фурье, безразмерное время.

Неизвестные величины C_n определим из начального условия.

При Fo=0

$$\vartheta_{Н}=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cdot\cos\left(\mu_n\cdot\frac{x}{\delta}\right).$$

Умножим обе части равенства на $\cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ и проинтегрируем по x в пределах толщины пластины.

Меняя порядок интегрирования и суммирования (ввиду линейности этих операций) получим выражение:

$$\vartheta_H \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx =$$

$$= C_n \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx,$$

поскольку $\cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ и $\cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ являются ортогональными функциями, как это следует из характеристического уравнения. То есть их произведение обращается в нуль, кроме случая, когда m = n.

Учитывая, что $\int \cos a\,x\,dx = \dfrac{1}{a}\sin a\,x$, получим:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = 2 \cdot \int_{0}^{\delta} \cos\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right)\Bigg|_0^{\delta} = 2 \cdot \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin\mu_n \cdot$$

Учтем также, что $\int \cos^2 a\,x\,dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin 2a\,x$
 и $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x.$

Тогда $$\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = \int_{0}^{\delta} 2 \cdot \cos^2\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx =$$

$$= \left[x + \frac{\delta}{2 \cdot \mu_n} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right)\right]\Bigg|_0^{\delta} = \left[x + \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right)\right]\Bigg|_0^{\delta} =$$

$$= \delta + \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n = \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \left(\mu_n + \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n\right) \cdot$$

Итак, получаем

$$C_n = \frac{2 \cdot \vartheta_H \cdot \sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n},$$

и решение принимает окончательный вид:

$$\vartheta = \vartheta_H \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \vartheta_H \cdot \sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot Fo\right),$$

где $X = \frac{x}{\delta}$ – безразмерная координата.

Таким образом, безразмерная избыточная температура

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_H} = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_H} = f(Bi, Fo, X),$$

где Bi – параметр задачи,

Fo и X – безразмерные независимые переменные.

Рассмотрим, к чему сводится полученное решение при $Bi \to 0$.

При этом угловой коэффициент $1/Bi$ прямой на рисунке графического решения характеристического уравнения (слайд 9) $\to \infty$ и прямая совпадает с осью ординат.

μ_n принимает следующий ряд значений: $0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots$ Все коэффициенты C_n, кроме первого, обращаются в нуль, а для первого получается неопределенность типа нуль, деленный на нуль, которую необходимо раскрыть.

Обозначим через $$D_n = \frac{2\cdot\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cdot\cos\mu_n} \sim C_n .$$

Раскроем с помощью предельного перехода неопределенность для D_1 при $\mu_1 = 0$:

$$\lim_{\mu_1\to 0} D_1 = \lim_{\mu_1\to 0} \frac{2\cdot\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cdot\cos\mu_1} = \frac{2\cdot\mu_1}{\mu_1+\mu_1\cdot 1} = 1\cdot$$

Решение для рассматриваемого случая сводится к следующему:

$$\theta = \cos\left(\mu_1 \cdot X\right) \cdot \exp\left(-\mu_1^2 \cdot Fo\right).$$

Определим конкретный вид связи между μ_1 и Bi. При $\mu_1 \to 0$ $\sin \mu_1 \approx \mu_1$, $\mathrm{tg}\, \mu_1 \approx \mu_1$, $\mathrm{ctg}\, \mu_1 \approx 1/\mu_1$. Следовательно, характеристическое уравнение принимает вид:

$$1/\mu_1 = \mu_1/Bi \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \sqrt{Bi}\,,$$

а $\lim\limits_{Bi \to 0}\left(\cos\left(\sqrt{Bi} \cdot X\right)\right) \to 1$, так как $0 \le X \le 1$.

Окончательно получим:

$$\theta = \exp(-Bi \cdot Fo)\,.$$

Рассмотрим нестационарную теплопроводность при граничных условиях I рода для неограниченной пластины. Считаем, что на границах пластины происходит конвективная теплоотдача.

При конечных значениях величины полутолщины пластины δ и коэффициента теплопроводности λ случай $Bi \to \infty$ означает $\alpha \to \infty$. Из-за интенсивной теплоотдачи разность температуры между средой и поверхностью объекта $T_0 - T_W = q / \alpha \to 0$ (так как плотность теплового потока q – величина постоянная).

Формулировка задачи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2};$$

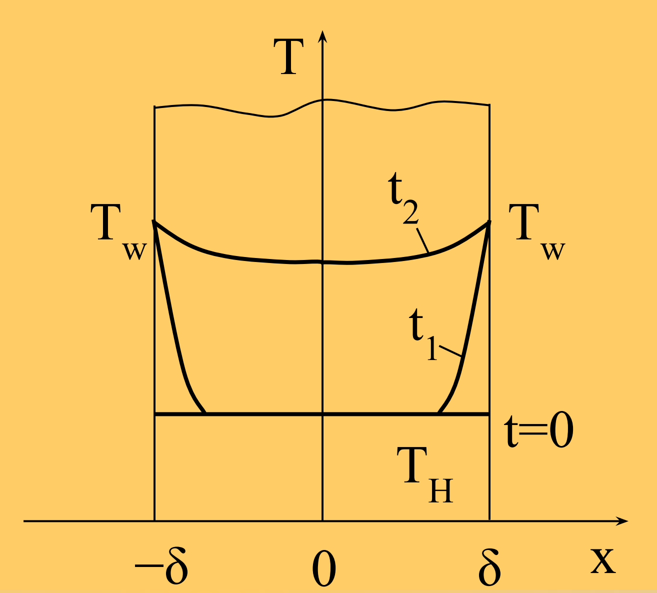
начальное условие: $\vartheta(x, 0) = \vartheta_H$,

граничное условие: $\vartheta(\pm\delta, t) = 0$,

где $\vartheta = T_W - T$ – текущая избыточная температура,

$\vartheta_H = T_W - T_H$ – начальная избыточная температура.

Считаем, что T_W не изменяется:



Характеристическое уравнение $\mathrm{ctg}\mu_n = \frac{\mu_n}{Bi}$ при $Bi \to \infty$ принимает вид $\mathrm{ctg}\mu_n = 0$, то есть прямая на рисунке графического решения характеристического уравнения совпадает с осью абсцисс.

Корни характеристического уравнения составляют следующий ряд значений: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2}, \frac{5\cdot\pi}{2} \ldots$

При этом $\sin\mu_n = -1$ при четных n, т.е. $\sin\mu_n = (-1)^{n+1}$, а $\cos\mu_n = 0$.

Выражение для безразмерной избыточной температуры

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cdot \cos\mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo)$$

(решение задачи нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода, см. слайд 13) принимает вид:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo).$$

В данном случае относительная избыточная температура определяется как функция числа Фурье и безразмерной координаты $\theta = f(Fo, X)$.

Число Био не является параметром задачи, так как лимитирующим звеном в процессе теплообмена является внутренний теплообмен.

§ 5. Регулярный тепловой режим

В переходных процессах нестационарной теплопроводности, когда температура в каждой точке тела изменяется от одного установившегося значения до другого, можно выделить три характерных режима:

- неупорядоченный, при котором начальное распределение температуры оказывает заметное влияние на развитие процесса;
- регулярный, когда влияние начального распределения температуры исчезает;
- стационарный, при котором температура во всех точках тела становится равной температуре окружающей среды.

Ряд решения задачи нестационарной теплопроводности из § 17 быстро сходится.

Во-первых, каждое следующее характеристическое число больше предыдущего, $\mu_k > \mu_{k+1}$, и μ_n стоит в квадрате в отрицательном показателе экспоненты.

Во-вторых, поскольку критерий Фурье тоже стоит в отрицательном показателе экспоненты, ряд сходится тем быстрее, чем больше времени прошло с начала процесса. Практически уже при $\mathrm{Fo} \geq 0{,}3$ сумма ряда равна его первому слагаемому:

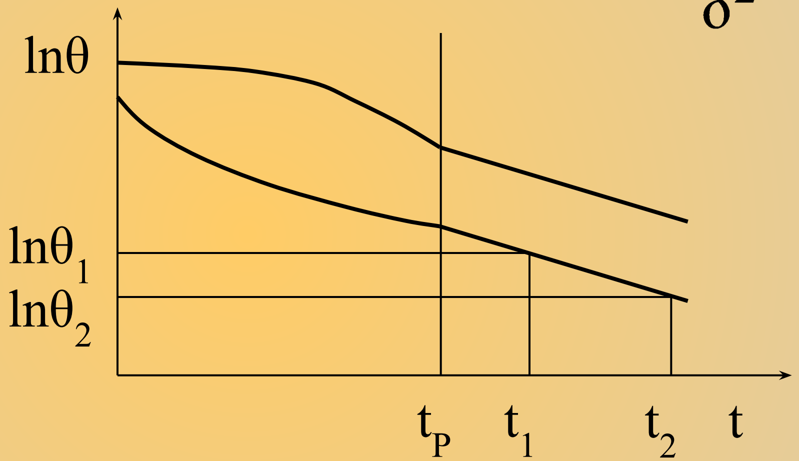
$$\theta = \frac{2 \cdot \sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1} \cdot \cos\left(\mu_1 \cdot X\right) \cdot \exp\left(-\mu_1^2 \cdot \mathrm{Fo}\right),$$

где $\mu_1 = f\,(\mathrm{Bi})$, $\quad 0 \leq \mu_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Обозначим $D_1 = \dfrac{2 \cdot \sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1}$

и прологарифмируем последнее выражение:

$$\ln\theta = \ln\left[D_1 \cdot \cos(\mu_1 \cdot X)\right] - \mu_1^2 \cdot \frac{a \cdot t}{\delta^2}.$$



t_P – время наступления регулярного режима.

$m = \dfrac{\ln\theta_1 - \ln\theta_2}{t_2 - t_1}$ – темп охлаждения (нагрева), постоянная скорость изменения $\ln\theta$, c^{-1}.

Очевидно, что $m = \mu_1^2 \cdot \dfrac{a}{\delta^2}$.

Для граничных условий I рода при $Fo \geq 0{,}3 \quad \mu_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Величина $m_\infty = \dfrac{\pi^2 \cdot a}{4 \cdot \delta^2}$ называется темпом нагрева (охлаждения) при граничных условиях I рода. Итак, в этом случае темп нагрева пропорционален коэффициенту температуропроводности:

$$m_\infty = k \cdot a\,,$$

где $k = \dfrac{\pi^2}{4 \cdot \delta^2}$ – коэффициент формы для плоской пластины.

Таким образом, при граничных условиях I рода темп нагрева не зависит от критерия Био, поскольку нагрев (охлаждение) тела лимитируется только внутренним теплообменом.

Закономерности регулярного теплового режима используют для экспериментального определения теплофизических свойств различных материалов и коэффициента теплоотдачи.

Для этого необходимо снять кривую изменения температуры в какой-либо точке тела и, представив ее в координатах $\ln\theta$–t, найти тангенс угла наклона прямолинейного отрезка зависимости к оси времени.

Теперь, зная форму и размер тела, можно найти $a = \frac{m_\infty}{k}$.

Тогда коэффициент теплопроводности $\lambda = a \cdot \rho \cdot c$.

Затем, уменьшив интенсивность внешнего теплопереноса, надо организовать теплообмен с граничными условиями III рода, и найти m, зависящий в данном случае от μ_1 и Bi.

Наконец, находят коэффициент теплоотдачи: $\alpha = \frac{Bi \cdot \lambda}{\delta}$.