

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Момент инерции материальной точки

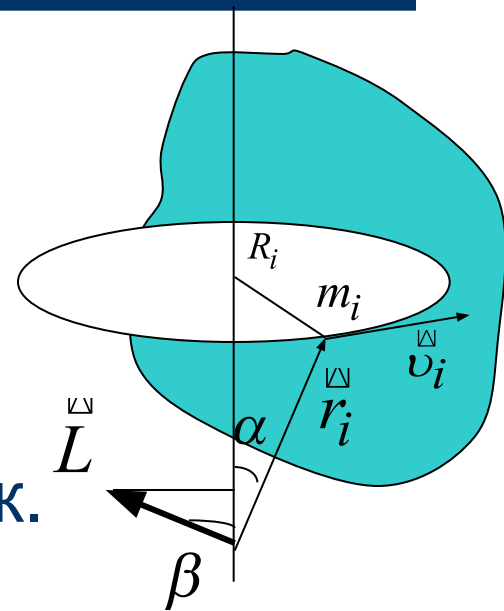
Момент инерции системы материальных точек

Момент инерции твердого тела



Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси

- Рассчитаем момент импульса тела относительно оси, представив тело как систему материальных точек.



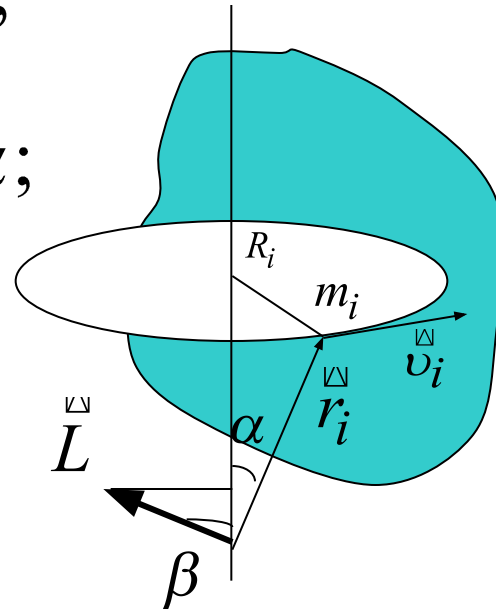
Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси

$$L_{zi} = L_i \cos \beta = L_i \sin \alpha;$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i v_i r_i \sin \alpha;$$

$$L_z = \sum_i m_i v_i R_i = \sum_i m_i R_i^2 \omega_z;$$

$$L_z = I \omega_z.$$



Момент инерции

- Момент инерции материальной точки

$$I = mR^2.$$

- Момент инерции системы материальных точек

$$I = \sum m_i R_i^2.$$

- Момент инерции ^{*i*}твёрдого тела

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV.$$

Теорема Штейнера

- Момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I = I_c + ma^2.$$

Уравнение динамики вращательного движения

- Основное уравнение динамики вращения *твёрдого тела* с неподвижной осью вращения легко получить, как следствие, если продифференцировать по времени уравнение

$$L_z = I\omega_z,$$

- тогда

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad I\beta_z = M_z.$$

Физический смысл момента инерции

Из уравнения динамики, в частности, видно, что момент инерции определяет инерционные свойства твердого тела при вращении: при одном и том же значении момента сил тело с большим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорение.

Кинетическая энергия вращающегося тела

- Рассмотрим тело как систему материальных точек

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} =$$
$$\sum_i \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Работа внешних сил при вращении твердого тела

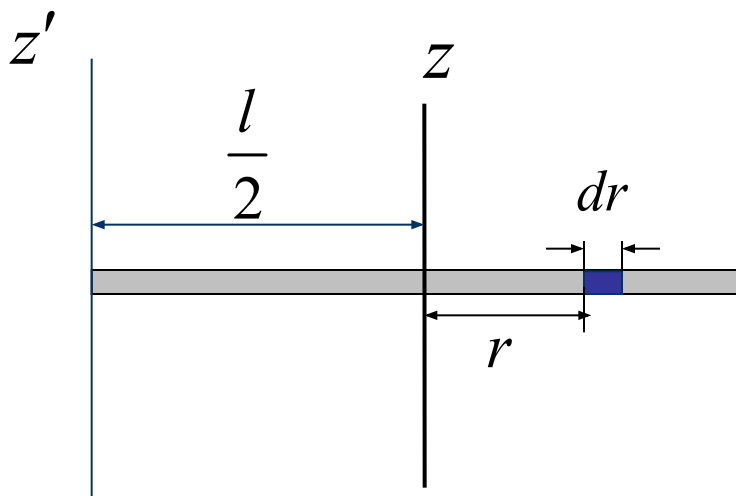
- При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси работа внешних сил идет на приращение его кинетической энергии

$$\partial A = dE_k; \quad \partial A = d\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) = I\omega_z d\omega_z;$$

$$Id\omega_z = M_z dt, \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\partial A = M_z d\varphi. \quad A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Момент инерции стержня



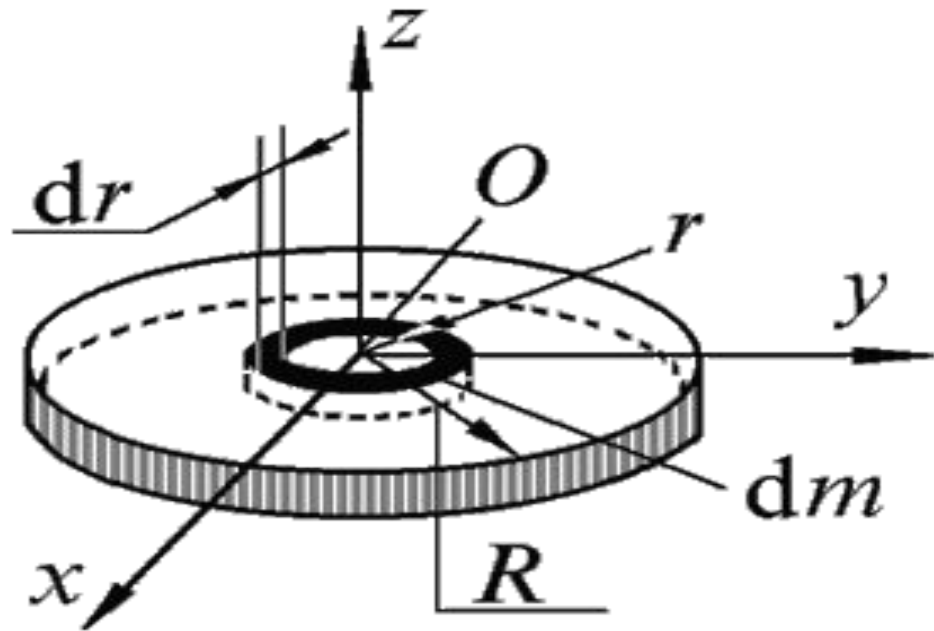
$$I = \frac{1}{12}ml^2.$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2.$$

Момент инерции диска

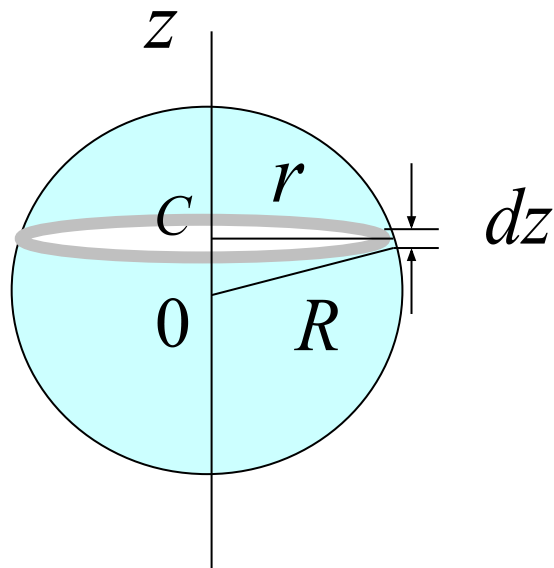
Для расчета момента инерции диск разбивается на кольца.

$$I = \frac{1}{2}mR^2.$$



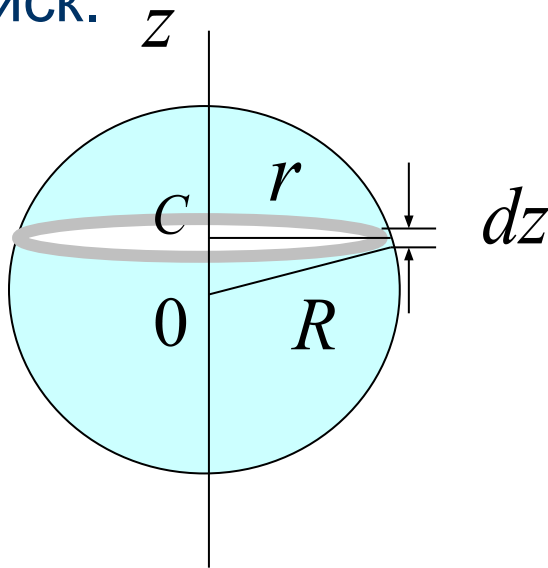
Момент инерции шара

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$



Момент инерции шара

- Разобьем шар на диски и выберем произвольный диск.

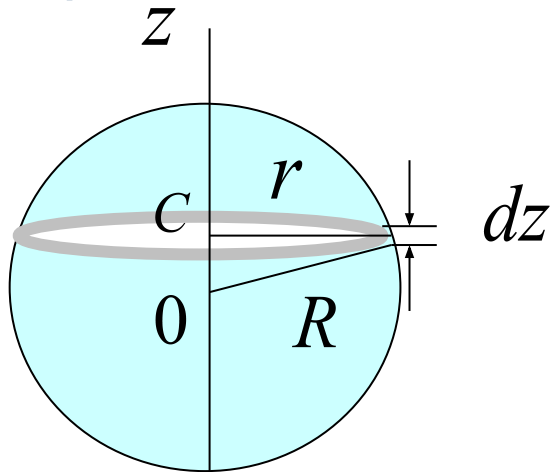


$$\partial I = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 dz r^2;$$

$$\partial I = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz.$$

Момент инерции шара

- Перейдем к одной переменной



$$r^2 = R^2 - z^2.$$

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \frac{8}{15} \rho \pi R^5.$$

Момент инерции шара

- Учтем, что

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

- Окончательно получим

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

Плоское движение

- Плоским называется движение, при котором все точки тела описывают траектории в параллельных плоскостях (качение цилиндра). При этом тело участвует в двух движениях: поступательном и вращательном.

Плоское движение

- Динамические уравнения для плоского движения:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z.$$

Скорость и кинетическая энергия при плоском движении

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$