

The background image is a wide-angle, fisheye shot of a large, circular particle accelerator tunnel. The interior of the tunnel is dark, but it is filled with a dense, complex network of glowing blue and purple lines that represent particle tracks or data. These lines radiate from a central point and branch out towards the edges of the frame. The tunnel's structure, including metal railings and support beams, is visible in the foreground and background, illuminated by a warm, reddish-orange light. The overall atmosphere is one of high-tech scientific exploration.

ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Електронний курс лекцій

Укладач: Данилов
А.Б.

Лекція 15

Теорема Гаусса та її застосування.

Всі науки можна класифікувати
на дві групи:

1. Фізика.
2. *Колекціонування марок.*

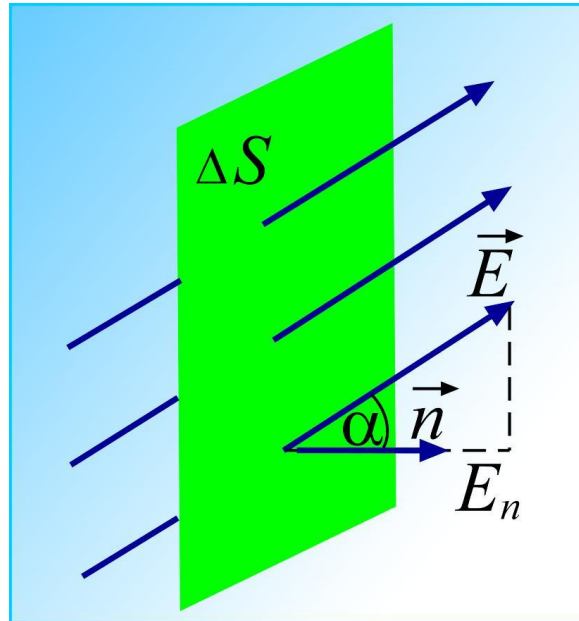
Ернест Резерфорд

План лекції

- Потік вектора напруженості електричного поля.
- Теорема Остроградського-Гаусса.
- Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів.
- Теорема Гаусса у диференціальній формі.
- Робота сил електростатичного поля.

Лекція 15
Теорема Гаусса

Потік вектора $\vec{E}$



Потік вектора E крізь площадку ΔS

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S \cos \alpha = E_n \Delta S$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

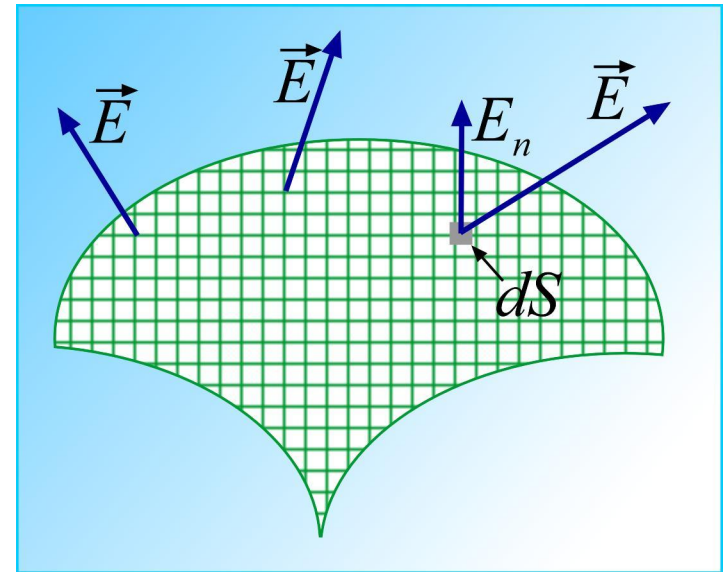
Потік вектора E

Елементарний електричний потік

$$d\Phi_E = E_n dS$$

Повний потік крізь поверхню S

$$\Phi_E = \int_S E_n dS$$



Лекція 15
Теорема Гаусса

Теорема Гаусса



*Гаусс Карл Фрідріх,
(1777-1855)*

*Німецький математик і фізик.
Роботи з алгебри, теорії чисел,
диференціальної геометрії і теорії
чисел, електрики і магнетизму,
астрономії.*

Лекція 15

Теорема Гаусса

Теорема Гаусса

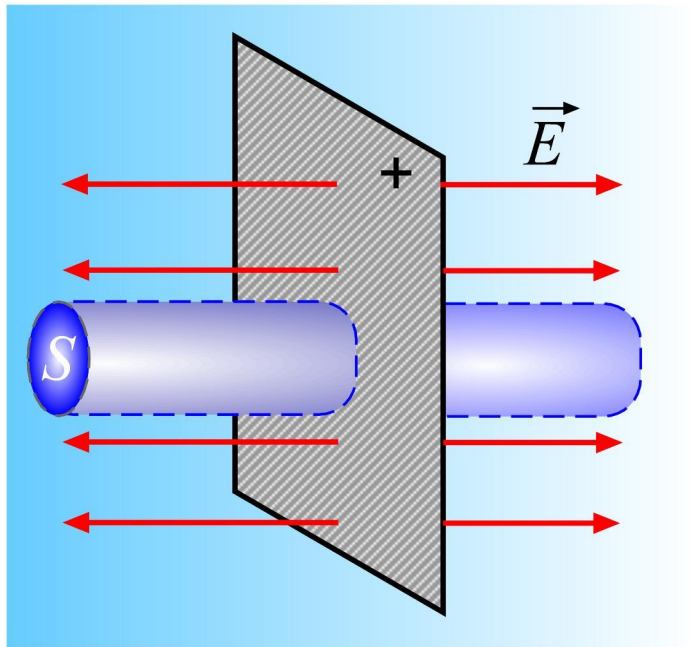
Потік вектора напруженості Φ_E електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню S зсередини назовні дорівнює алгебричній сумі тих точкових зарядів, які охоплюються поверхнею S , поділений на електричну сталу ϵ_0 .

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

Напруженість поля нескінченної площини

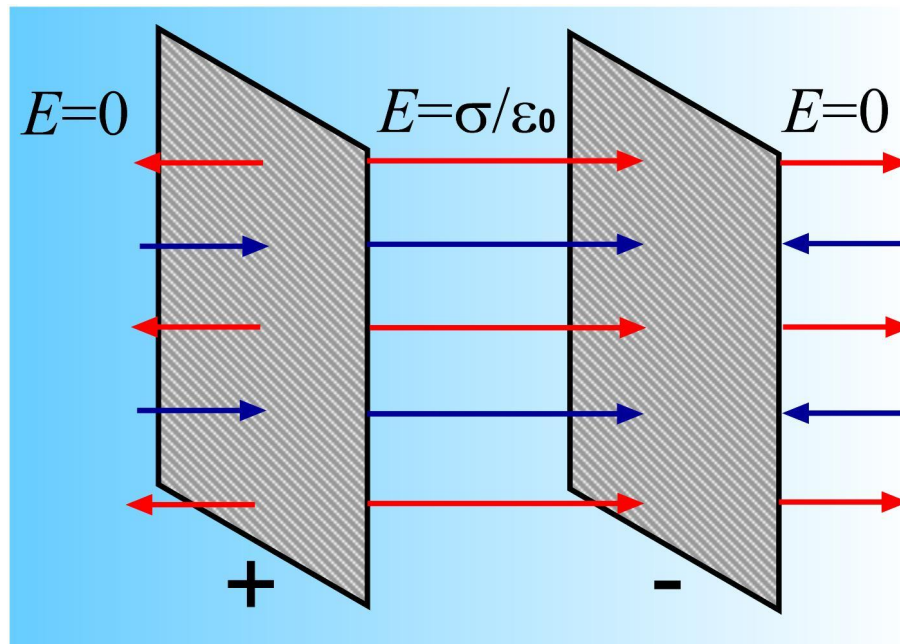


$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

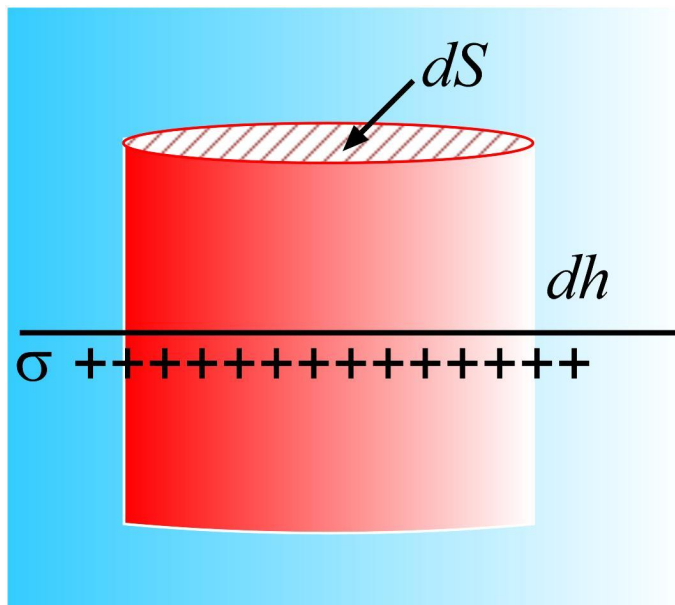
**Напруженість поля
двох різнойменно заряджених
площин**



Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

*Напруженість поля
поблизу поверхні зарядженого провідника*

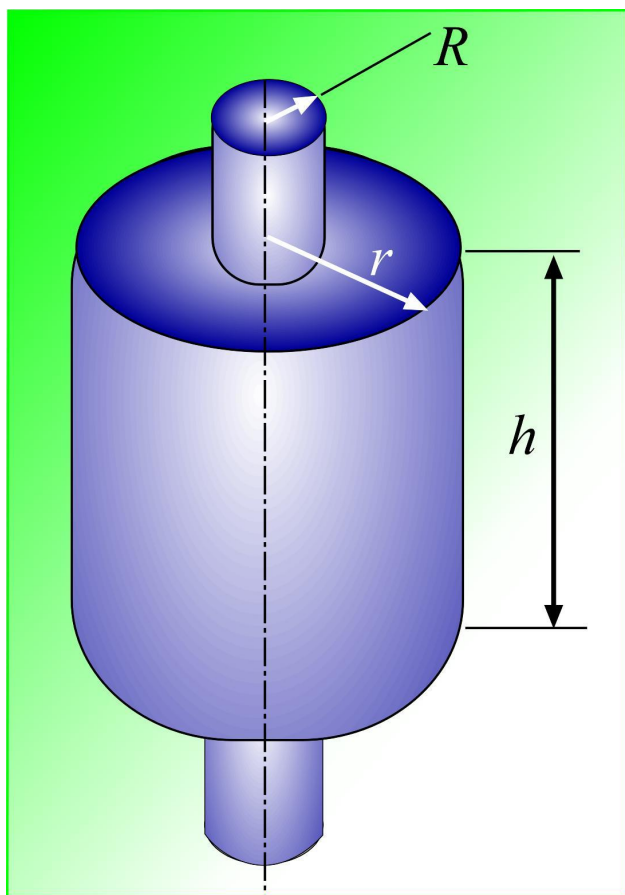


$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

*Напруженість поля
нескінченної зарядженої нитки, довгого циліндра*



Провідний циліндр радіуса R ,
по якому заряд розподілено
рівномірно з лінійної густиною

τ

Ззовні

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

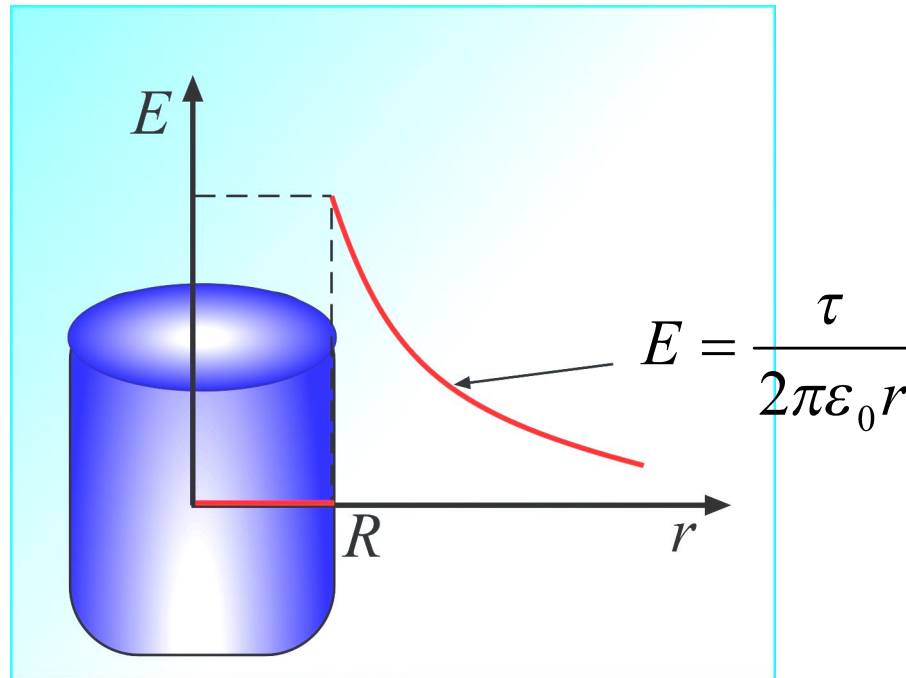
Всередині

$$E = 0$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

*Напруженість поля
нескінченної зарядженої нитки, довгого циліндра*



Лекція 15
Теорема Гаусса

**Приклади
розрахунку полів за
Гауссом**

***Напруженість поля
нескінченного довгого діелектричного циліндра***

Непровідний циліндр радіуса R , в якому заряд розподілено рівномірно з об'ємною густиною ρ

Ззовні циліндра

$$\Phi_E = ES_{\sigma} = E2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho V_{\text{непров.ц.}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \pi R^2 h$$

$$E = \frac{\rho \pi R^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

Всередині циліндра

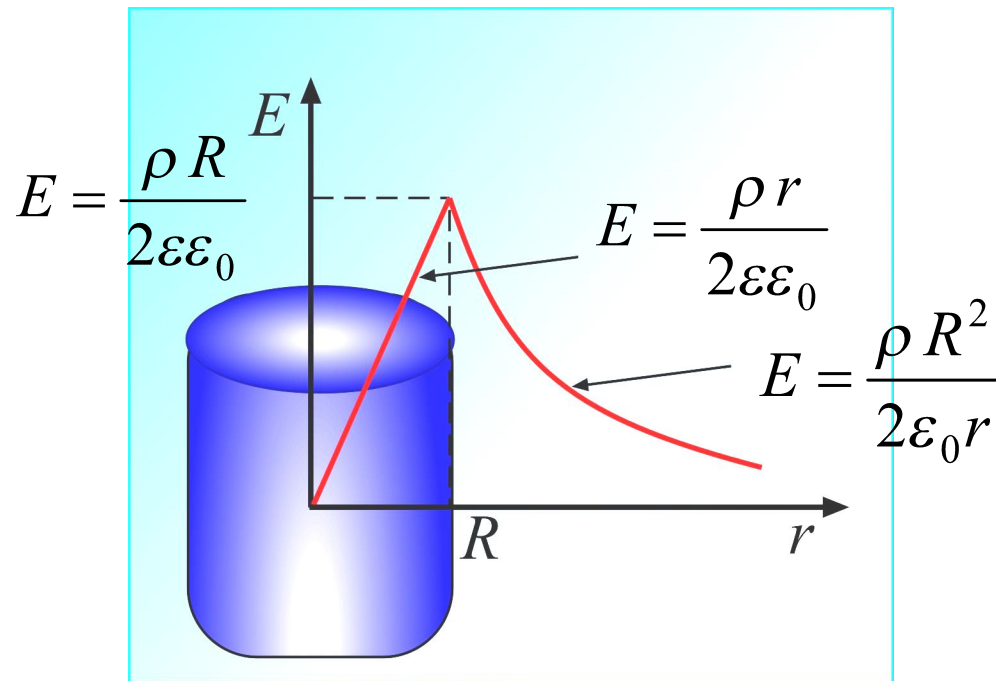
$$\Phi_E = ES_{\sigma} = E2\pi r h = \frac{\rho V_{\text{дон.ц.}}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon \varepsilon_0}$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

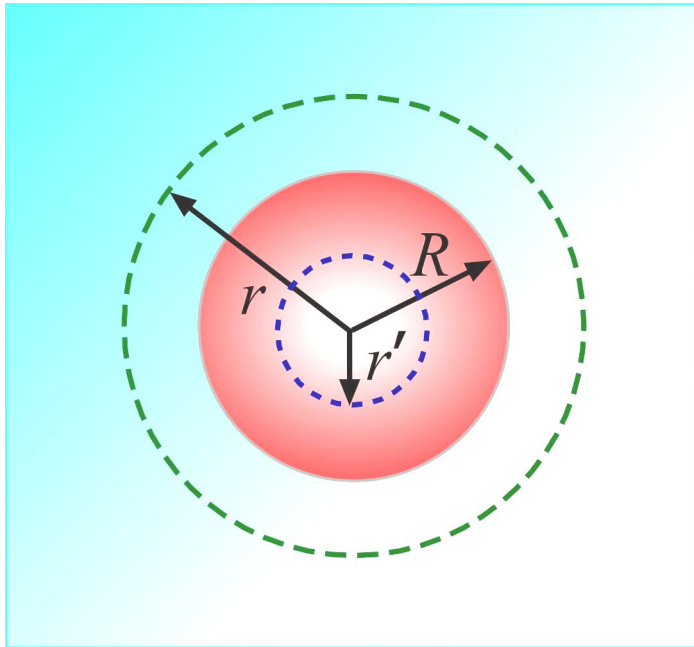
*Напруженість поля
нескінченного довгого діелектричного циліндра*



Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

*Напруженість поля
рівномірно зарядженої сфери*



Провідна
сфера:

Ззовн
і

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

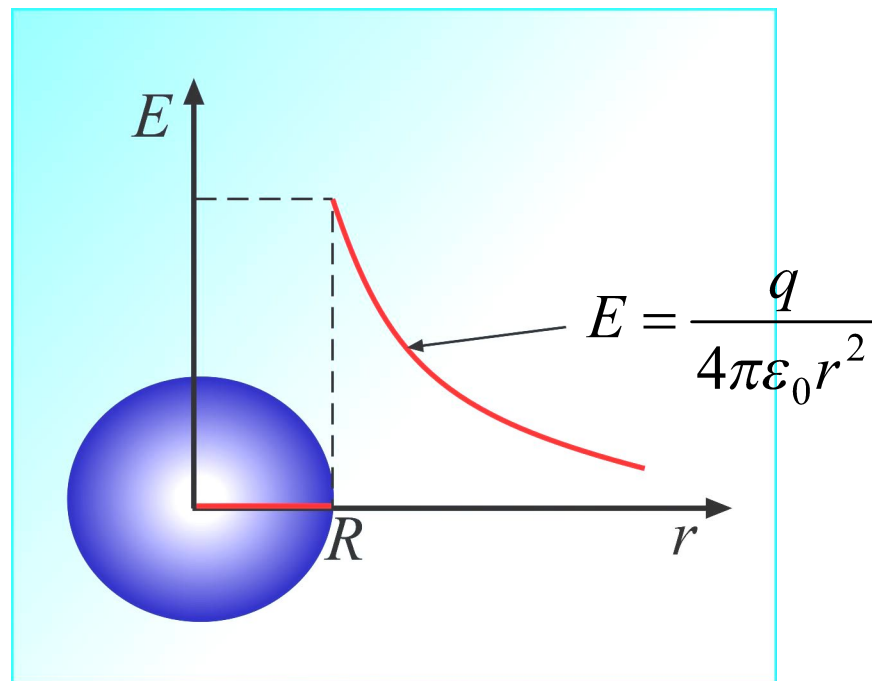
Всередині

$$E = 0$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

*Напруженість поля
рівномірно зарядженої сфери*



Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

**Напруженість поля
непровідної кулі**

Ззовні кулі

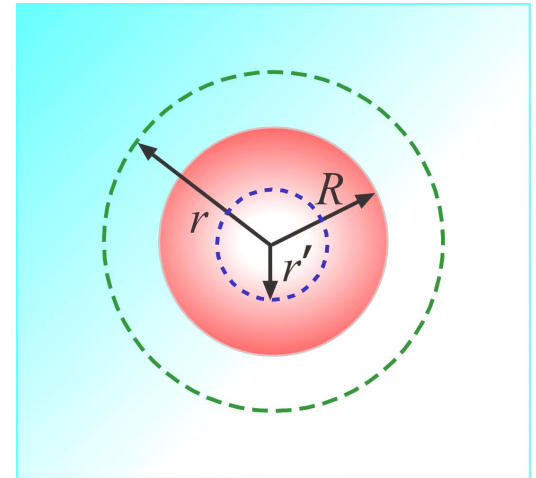
$$\Phi_E = E S = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho 4\pi R^3}{4\pi r^2 3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Всередині
кулі

$$\Phi_E = E S = E 4\pi r'^2 = \frac{q'}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r'^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

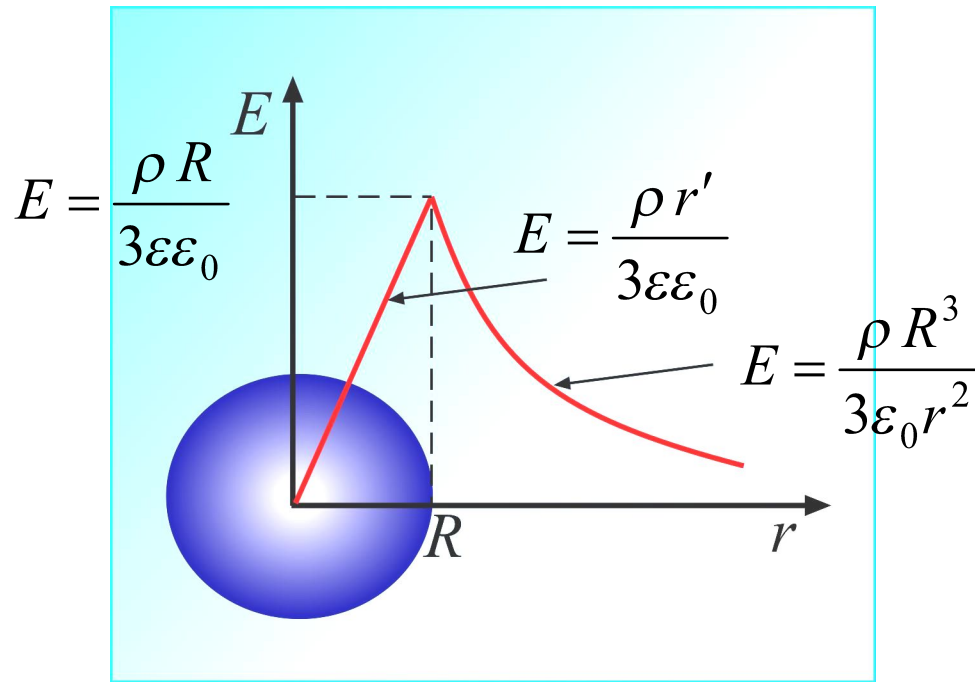
$$E = \frac{4\pi\rho r'^3}{4\pi r'^2 3\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho r'}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$



Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади
розрахунку полів за
Гауссом

*Напруженість поля
непровідної кулі*



Лекція 15

Теорема Гаусса

Поняття дивергенції

Дивергенцією деякого векторного поля $A(\mathbf{r})$ називається границя відношення

$$\operatorname{div} A = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A_n dS}{V}$$

У декартовій системі координат

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

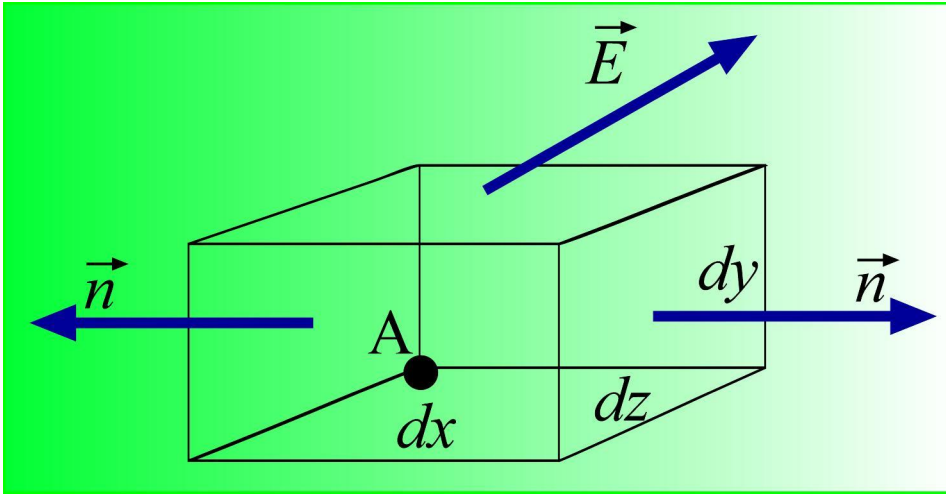
$$\operatorname{div} A = (\nabla A)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Лекція 15

Теорема Гаусса

Теорема Гаусса в диференціальній формі



$$\oint_S \vec{E}_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Дивергенція фізично характеризує потужність джерел або стоків.
- Заряди є джерелами (додатний) і стоками (від'ємний) електричного поля.

Лекція 15

Теорема Гаусса

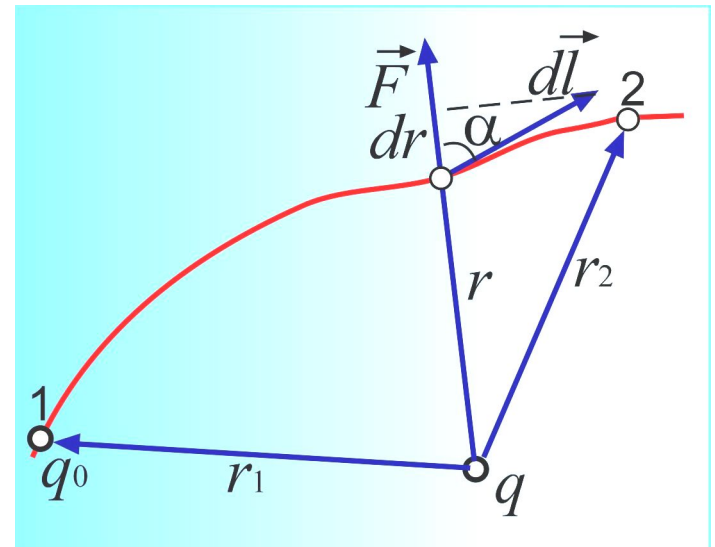
Робота сил електростатичного поля

- Елементарна робота сил
електростатичного поля

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = F dl \cos \alpha = q_0 E dl \cos \alpha$$

- Для поля точкового заряду

$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$



Лекція 15 Теорема Гаусса

Робота сил електростатичного поля

Робота сил електростатичного поля точкового заряду при переміщенні в цьому полі пробного заряду з точки 1 в точку 2:

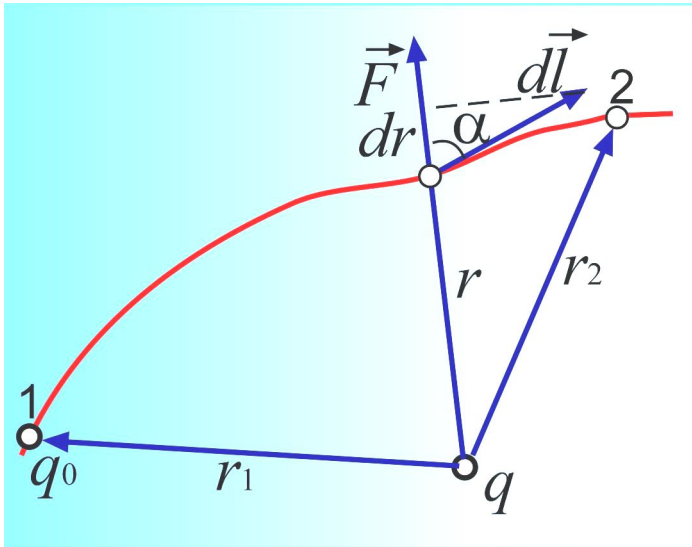
$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} dA = q_0 \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Робота додатна, якщо:

- однойменні заряди віддаляються;
- різнойменні заряди наближаються.

Робота від'ємна, якщо:

- різнойменні заряди віддаляються;
- однойменні заряди наближаються.



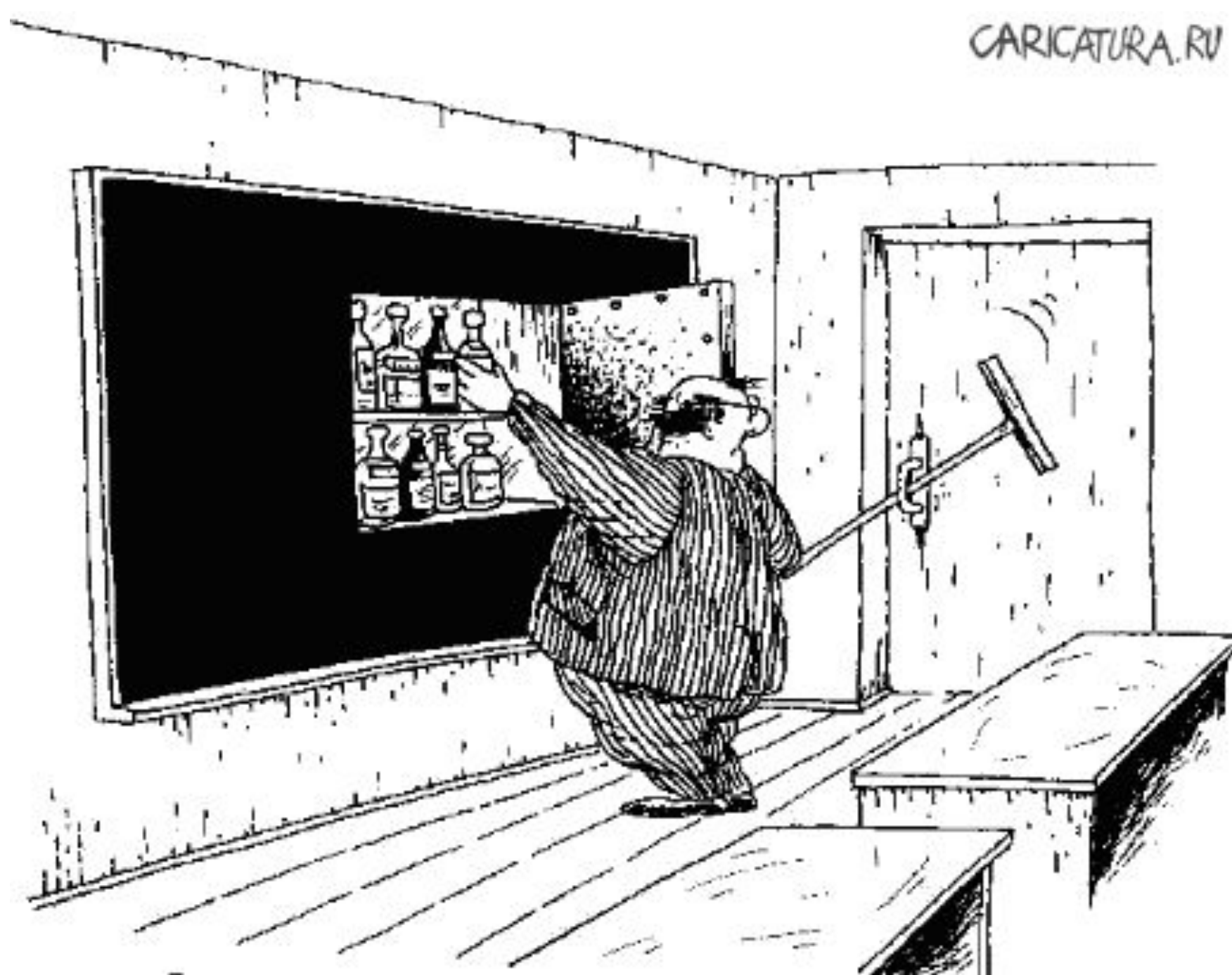
Лекція 3

Потенціал електростатичного поля

*Робота сил
електростатичного поля*

Робота електростатичного поля не залежить від форми шляху переміщення заряду від точки 1 до точки 2, а визначається лише положенням початкової і кінцевої точки.

Силові поля, що задовольняють таку умову, називаються *потенціальними*, або *консервативними*





Дякую за