

ЕГЭ

Задание 5

Пазылов Бекжан
Чермных Матвей

УРАВНЕНИЯ.

Рациональное уравнение – это равенство двух рациональных (без знака корня) выражений.

Дробно-рациональное уравнение – рациональное (без знака корня) уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями.

Алгоритм решения рациональных уравнений

- 1
Понять, точно ли это рациональное уравнение (убедись, что в нем нет корней);
- 2
Определить ОДЗ;
- 3
Найти общий знаменатель дробей и умножить на него обе части уравнения;
- 4
Решить получившееся целое уравнение;
- 5
Исключить из его корней те, которые обращают в ноль знаменатель дробей.

Линейные, квадратные, кубические уравнения.

- Линейным называется такое уравнение, в котором неизвестное x находится в числителе уравнения и без показателей. Например: $2x-5=3$

Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — некоторые числа $a \neq 0$, x — неизвестное. Перед тем как решать уравнение, необходимо раскрыть скобки и собрать все слагаемые в левой части уравнения.

Для решения простых кубических уравнений необходимо обе части представить в виде основания в третьей степени. Далее извлечь кубический корень и получить простое линейное уравнение.

Иррациональное уравнение.

Иррациональное уравнение – это уравнение, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень.

Задание 5 № 510328

Решите уравнение: $\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6}$.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{1-5x} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow 1-5x = 36 \Leftrightarrow x = -7$$

Ответ: -7.

Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.

Решение.

Воспользуемся формулой $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$x^2 + 9 = (x+9)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = x^2 + 18x + 81 \Leftrightarrow 18x = -72 \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: -4.

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными уравнениями**

$$a^{f(x)} = a^{h(x)}$$



$$f(x) = h(x)$$

Методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.



Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} = 64$$

$$2^{2x-4} = 2^6$$

$$2x - 4 = 6$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x - 3,5 = 0,5$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Пример 3

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Ответ : 2; 4

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **логарифмическими уравнениями**

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.

$$a^{\log_a b} = b$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ:

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

6. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

7. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b$

8. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

10. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$

11. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$

$$d > 0$$

$$d \neq 1$$



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$x = -3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x + 4) + \log_2(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\log_2(x + 4)(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\begin{cases} (x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x) \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 13x + 11 = 0 \\ x > -4 \\ x > -1,5 \\ x < 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -5,5 \\ -1,5 < x < 0,5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Другие тригонометрические уравнения

1.Сводимые к квадратным

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда

$$a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

1)Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

2)Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$.

Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Простейшие тригонометрические уравнения

Общий вид	Ограничение	Частные случаи		
$\cos x = a,$ $ a \leq 1,$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$ a > 1,$ корней нет	$a = 1,$ $\cos x = 1,$ $x = 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$a = 0,$ $\cos \frac{\pi}{2} x = 0,$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$a = -1,$ $\cos x = -1,$ $x = \pi + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = a,$ $ a \leq 1,$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$ a > 1,$ корней нет	$a = 1,$ $\sin \frac{\pi}{2} x = 1,$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$a = 0,$ $\sin x = 0,$ $x = \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$a = -1,$ $\sin \frac{\pi}{2} x = -1,$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a,$ $a = \operatorname{arctg} a + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	нет	----	----	----

Типы тригонометрических уравнений

Простейшие
тригонометрические
уравнения

$$1) \sqrt{2} \cos x + 1 = 0$$
$$2) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$$

Уравнения,
приводимые к
квадратным

$$3) 5 \cos^2 x + 6 \sin x - 6 = 0$$

Однородные
тригонометрические
уравнения

$$4) \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$$
$$5) \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$$

Простейшие

Решим уравнения.

$$1. \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$3x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k\text{-целое.}$$

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \underline{x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}}$$

$$3. \quad \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad 4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \underline{x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}} \quad k\text{-целое}$$

$$2. \cos \frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2}{3}x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k \quad k\text{-целое}$$

$$\frac{2}{3}x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\underline{x = \pm \frac{9\pi}{8} + 3\pi k}$$

$$4. \quad \sin \frac{\pi}{4}x = \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{4}x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$\frac{\pi}{4}x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} \cdot \frac{4}{\pi} + \pi n \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$\underline{x = (-1)^n \frac{2}{3} + 4n} \quad n\text{-целое}$$

a^0	0	30	45	60	90
α , рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

a^0	120	135	150	180
α , рад	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2};$$

$$\sin x + \cos y = 2 \sin \left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sin x - \cos y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

Тригонометрические функции одного угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a; |a| \leq 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0; x = \pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a; |a| \leq 1; x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1; x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a; x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a; x = \operatorname{arccotg} a + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы приведения

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Выражение тангенса через синус и косинус двойного угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$* \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$$

$$* \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$* \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Задание 5 № 26669

Найдите корни уравнения: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x-7 = \pm 1 + 6n \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 6n; \\ x = 6 + 6n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значениям $n \geq 0$ соответствуют положительные корни.

Если $n = -1$, то $x = 2$ и $x = 0$.

Если $n = -2$, то $x = 8 - 12 = -4$ и $x = 6 - 12 = -6$.

Значениям $n \leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4 .

Ответ: -4 .