

Тема 12. Уравнения и неравенства

- **12.5.** Решение неравенств с одной переменной. Системы и совокупности неравенств

- <https://youtu.be/jDj1r4ltSdw>



несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в **верное числовое неравенство**, называют **частным решением системы неравенств**.



Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто решение системы неравенств).

Решить систему неравенств – значит найти все её частные решения, либо доказать, что у данной системы решений нет.



Решение системы неравенств – это пересечение решений неравенств, входящих в систему.

Запомните! Решение системы неравенств – это пересечение решений неравенств, входящих в систему.

Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой.

Алгоритм решения системы неравенств с одной переменной:

1. отдельно решить каждое неравенство;
2. найти пересечение найденных решений.

Это пересечение и является множеством решений системы неравенств

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$

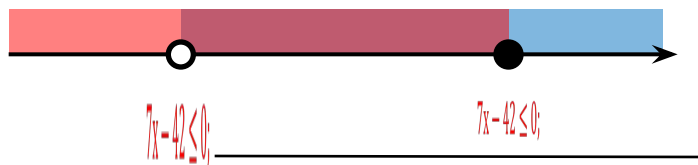
Решение.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$



Отметим эти промежутки на координатной прямой. Решение первого неравенства помечено штриховкой снизу, второго неравенства – штриховкой сверху. Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств, то есть промежуток, на котором обе штриховки совпали. В итоге получаем полуинтервал от семи вторых до шести, включая шесть.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

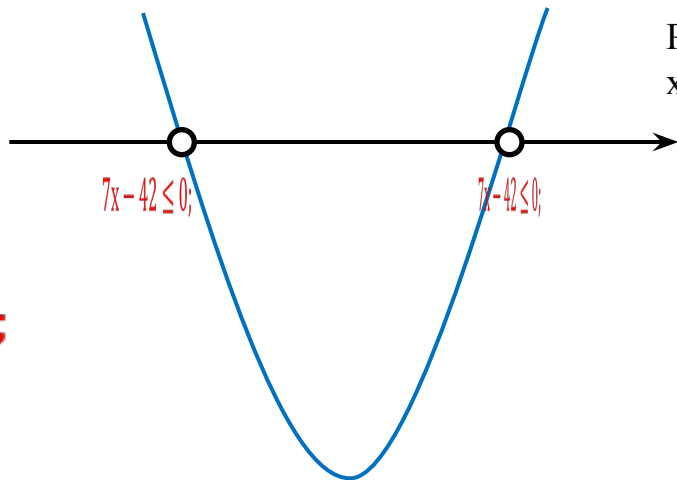
Решение.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$



Решим первое неравенство —
 $x^2 + x - 6 > 0$

Рассмотрим функцию $y = x^2 + x - 6$

Нули функции: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Изображая схематически параболу, найдем, что решением первого неравенства является объединение открытых числовых лучей $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$

Решение. Решим второе неравенство системы $x^2 + x + 6 > 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^2 + x + 6$.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x^2 + x + 6 > 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$y = x^2 + x + 6;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$D = -23 < 0;$$

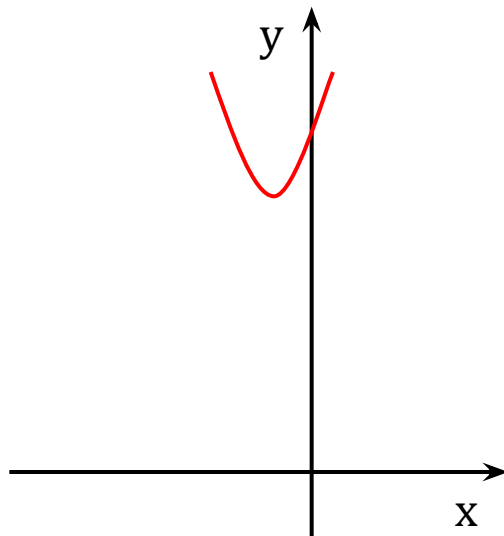
$$7x - 42 \leq 0;$$

Дискриминант равен $D = -23 < 0$, значит, функция не имеет нулей.

Парабола не имеет общих точек с осью Ox .

Изображая схематически параболу, найдем,

что решением неравенства является множество всех чисел



Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$

Решение.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x^2 + x + 6 > 0;$$

$$y = x^2 + x + 6;$$

$$D = -23 < 0;$$



$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

Изобразим на координатной прямой решения неравенств системы.

Из рисунка видно, что решением системы является объединение открытых числовых лучей от минус бесконечности до минус трех и от двух до плюс бесконечности. Ответ: объединение открытых числовых лучей от минуса бесконечности до минус трех и от двух до плюс бесконечности.

Пример 3. Решить систему неравенств $\log_2(x^2 - 13x + 42) \geq 1$.

Решение.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 13x + 42 > 0; \\ x^2 - 13x + 42 \geq 2; \end{array} \right.$$

$$x^2 - 13x + 40 > 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

ОДЗ неравенства задается условием $x^2 - 13x + 42 > 0$

Представим число один как логарифм двух по основанию два и получим неравенство — $\log_2(x^2 - 13x + 42) \geq 1$

Видим, что основание логарифма равно двум больше одного, то приходим к равносильному неравенству $\log_2(x^2 - 13x + 42) \geq \log_2 2$.

Следовательно, решение данного логарифмического неравенства сводится к решению системы двух квадратных неравенств.

Причем легко заметить, если выполнено второе неравенство, то тем более выполняется первое неравенство. Поэтому первое неравенство – следствие второго, и его можно отбросить. Второе неравенство преобразуем и запишем в виде: $x^2 - 13x + 40 > 0$

Решением его является объединение двух числовых лучей $x \in (-\infty; 5] \cup [8; +\infty)$

Ответ: объединение двух числовых лучей от минус бесконечности до пяти и от восьми до плюс бесконечности.
открытых числовых лучей



Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением, хотя бы одного из заданных неравенств.



Каждое такое значение переменной называют
частным решением совокупности неравенств.



Запомните! Решение совокупности неравенств – объединение решений неравенств, входящих в совокупность.
Неравенства, входящие в совокупность,
объединяются квадратной скобкой.

Множество всех частных решений
совокупности неравенств представляет собой
общее решение совокупности неравенств.

Алгоритм решения совокупности неравенств:

1. отдельно решить каждое неравенство;
2. найти объединение найденных решений.

Это объединение и является решением совокупности неравенств.

Пример 4. Решить совокупность неравенств

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$



$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение

Преобразуем каждое из неравенств. Получим равносильную совокупность неравенств

Для первого неравенства множеством решений служит промежуток от семи третьих до плюс бесконечности, а для второго – промежуток от одной четвертой до плюс бесконечности.

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $x > 7/3$ и $x > 1/4$.

Находим, что объединением этих множеств, т.е. решением данной совокупности неравенств, является открытый числовой луч от одной четвертой до плюс бесконечности.
Ответ: открытый числовой луч от одной четвертой до плюс бесконечности.

Пример 5. Решить совокупность неравенств

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$



$(2; +\infty);$

Ответ: $(2; +\infty).$

Преобразуем каждое из неравенств.

Получим равносильную совокупность неравенств: x больше двух и x больше либо равно четырем.

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих этим неравенствам.

Находим, что объединением этих множеств, т.е. решением данной совокупности неравенств, является открытый числовой луч от двух до плюс бесконечности. Ответ: открытый числовой луч от двух до плюс бесконечности.

Тема 12. Уравнения и неравенства

- **12.6.** Решение неравенств с одной переменной. Иррациональные неравенства. Неравенства с модулем

- https://youtu.be/3_w-X34vGWw

Рассмотрим решение неравенства

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

1. ОДЗ: $f(x) \geq 0$;

2. $g(x) > 0$. При $g(x) \leq 0$ неравенство не имеет решения.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$

1) ОДЗ неравенства задается условием $f(x) \geq 0$.

2) правая часть первого неравенства должна быть положительной, то есть $g(x) > 0$.

При $g(x) \leq 0$ неравенство (1) не имеет решения

3. обе части первого неравенства неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат

при этом знак неравенства сохраняется): $f(x) < g^2(x)$.

Таким образом, данное иррациональное неравенство равносильно системе неравенств

$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение.

$$7x - 42 \leq 0;$$

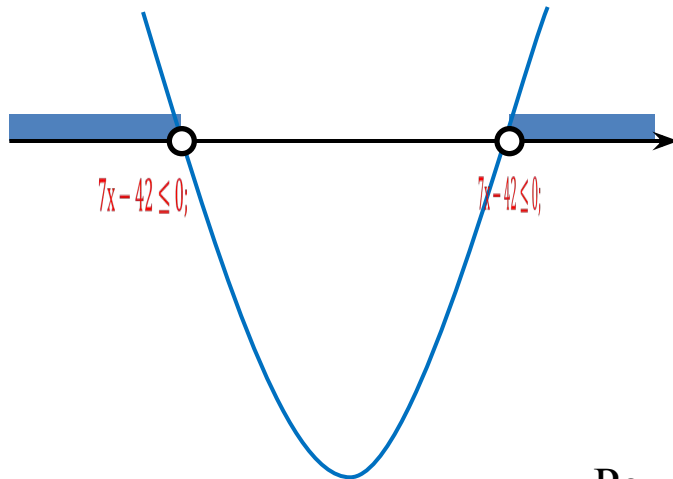
$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x^2 - x - 2 > 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$



Это неравенство равносильно системе неравенств

Выполним преобразования в первом и третьем неравенствах

Решим квадратное неравенство
Графически. Для этого найдем
корни квадратного трехчлена

Геометрическая модель помогает
найти решение неравенства

$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение.

Это неравенство равносильно системе неравенств

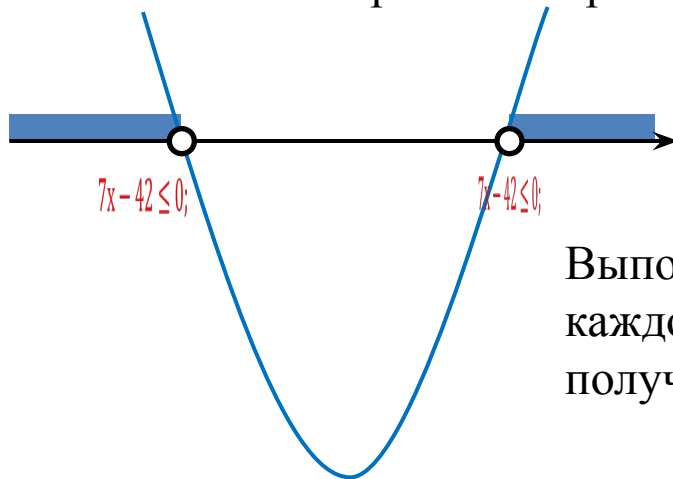
$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x_1 = -2, x_2 = 7;$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$



Выполним преобразования в каждом неравенстве системы, получим систему, в которой

Вычислим корни квадратного трехчлена

Решим квадратное неравенство графическим способом.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right]$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right]$$

3.

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right]$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение.

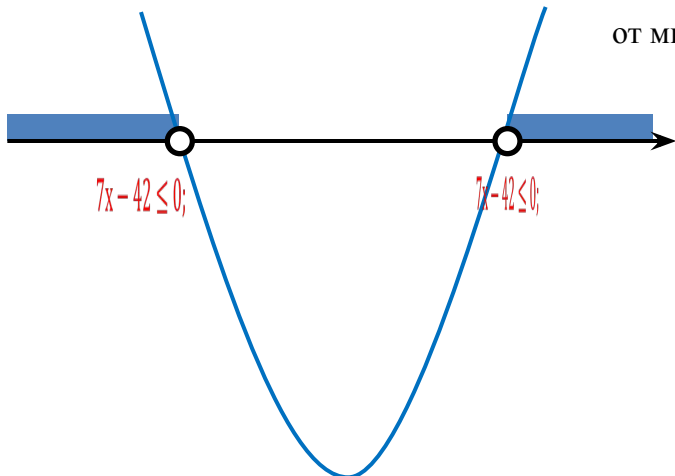
$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x \in (-\infty; -2).$$



Решение

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

Первая система:

три минус x больше либо равно нулю, x минус один меньше нуля;

Вторая система:

x минус один больше либо равно нулю, три минус x больше квадрата разности x и единицы.

Решим первую систему неравенств

x меньше либо равно трем, x меньше единицы.

Решением является открытый числовой луч от минус бесконечности до единицы.

Решим вторую систему неравенств.

Решением является полуинтервал от единицы до двух, включая один.

Решением совокупности системы неравенств является объединение двух открытых лучей — это открытый луч от минус бесконечности до двух.

Решение данного иррационального неравенства — открытый луч

от минус бесконечности до двух.

Открытый луч

$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение.

Данное неравенство равносильно
совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] 7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1;$$

$$\left[\begin{array}{l} \\ \end{array} \right] 7x - 42 \leq 0;$$

$$x \in (-\infty;$$

$$-2);$$

$$\left[\begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] 7x - 42 \leq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \\ \end{array} \right] 7x - 42 \leq 0;$$

$$x \in (2;$$

$$+\infty);$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

Тема 12. Уравнения и неравенства

- **12.7.** Решение систем уравнений второй степени

<https://youtu.be/9uV7TPwLpTI>

*Рассмотрим сначала системы уравнений
с двумя переменными,
составленные из одного уравнения
второй степени и одного уравнения
первой степени.*

*Такую систему всегда можно
решить способом подстановки.*

Для этого выполняют следующий алгоритм действий:

- выражают из уравнения первой степени одну переменную через другую;*
- подставляют полученное выражение в уравнение второй степени, в результате приходят к уравнению с одной переменной;*
- решают получившееся уравнение с одной переменной;*
- находят соответствующие значения второй переменной.*

Пример 1: Решить систему уравнений

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение:

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0; \quad 7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0; \quad 7x - 42 \leq 0;$$

Ответ: (-1, 25; 0,75); (1,6; -0,2)

Выразим из второго уравнения переменную x через y

Подставим это выражение в первое уравнение вместо x

После упрощения получим равносильное уравнение

Соответствующие значения x можно найти, подставив найденные значения y в одно из уравнений системы



Если система состоит из двух уравнений второй степени с двумя переменными, то найти её решения обычно трудно.

*В отдельных случаях такие системы можно решить **способом подстановки** или **способом сложения**.*

Пример 2: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{cases}$$

Решение: $x \neq 0$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0; \quad 7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

Ответ: (-2; -1); (2; 1)

Тема 12. Уравнения и неравенства

- **12.8.** Системы уравнений

- <https://youtu.be/RJg-GrAcv10>

Для решения систем уравнений с двумя переменными
использовались такие способы:

- Метод подстановки;
- метод алгебраического сложения;
- метод введения новых переменных;
- графический метод.



Если поставлена задача – найти такие пары $(x; y)$,
которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x; y) = 0$
и уравнению $q(x; y) = 0$, то говорят, что данные уравнения
образуют систему уравнений

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

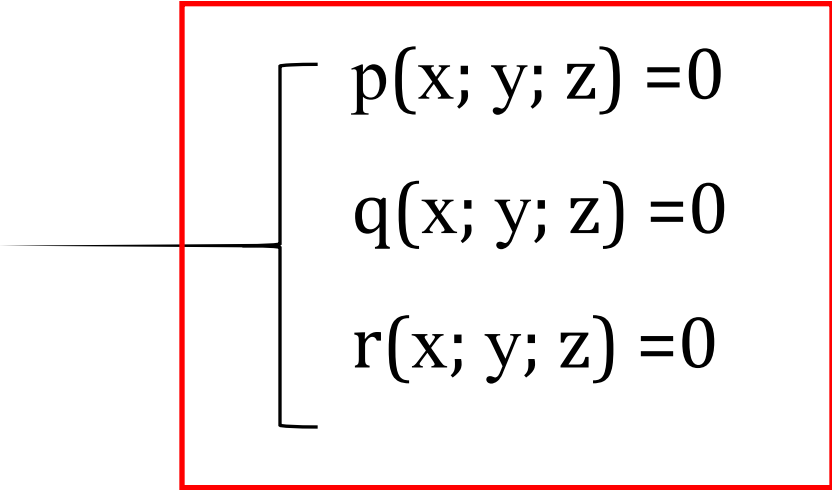


Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют **решением системы уравнений**.



Решить систему уравнений – значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Система трех уравнений с тремя неизвестными


$$\begin{cases} p(x; y; z) = 0 \\ q(x; y; z) = 0 \\ r(x; y; z) = 0 \end{cases}$$

При этом надо найти тройки $x; y; z$ удовлетворяющие каждое уравнение системы.

Вообще, можно говорить о системах с любым количеством уравнений и неизвестных.

Алгоритм решения системы уравнений

- постепенный переход от сложного уравнения к более простому, но при этом выполнять равносильные преобразования.
- стремиться получить хотя бы одно линейное уравнение, а если происходит переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка корней.



Две системы уравнений называют
равносильными, если они имеют одни и те же
решения или решений не имеют.

Равносильные способы решения систем уравнений:

- метод подстановки;
- метод алгебраического сложения;
- введения новых переменных.

Запомните!

Неравносильные преобразования:

- возведение в квадрат обеих частей уравнения;
- умножение уравнений системы;
- преобразования, приводящие к расширению области определения.

Проверка решений их подстановкой в исходную систему
обязательна.

Обратите внимание на рациональность решения системы.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$$

Решение.

Сложим все три уравнения(это равносильное преобразование) и получим: $4x + 4y + 4z = 8$.

$$4x + 4y + 4z = 8;$$

Разделим почленно обе части уравнения на четыре, получим; $x + y + z = 2$

$$x + y + z = 2;$$

Из третьего уравнения получаем: $(x + y + z) + y = 3$

$$x + (x + y + z) = 1;$$

$$(x + y + z) + y = 3;$$

$$(x + y + z) + z = 4;$$

$$x + 2 = 1;$$

$$2 + y = 3;$$

$$2 + z = 4;$$

$$x = -1;$$

$$y = 1;$$

$$z = 2;$$

Из второго уравнения системы имеем: $x + (x + y + z) = 1$

Ответ: $(-1; 1; 2)$.

Из первого уравнения имеем: $(x + y + z) + z = 4$

Итак, система уравнений имеет единственное решение $(-1; 1; 2)$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1, \\ \log_3 x = \log_3(1 - y). \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ \log_3 x = \log_3 x; \end{cases}$$

$$\log_3 x = \log_3 x;$$

$$x = \alpha \ (\alpha > 0);$$

$$y = 1 - \alpha;$$

Ответ: $(\alpha; 1 - \alpha), \alpha > 0$.

Выразим y через x из первого уравнения системы и, подставляя его вместо y во второе уравнение,

$$y = 1 - x; \text{ получаем уравнение: } \log_3 x = \log_3(1 - y).$$

Решениями этого уравнения являются все положительные числа.

Каждому такому значению $x = \alpha \ (\alpha > 0)$,

соответствует значение $y = 1 - \alpha$.

Следовательно, решениями исходной системы являются все пары чисел α и $1 - \alpha$, где α — положительное число.

Способ подстановки — равносильное преобразование.

Ответ: пара чисел: альфа и один минус альфа, где альфа — положительное число

Пример 3. Решить систему уравнений $\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$

Решение.

$$\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \\ (1; 1), (-1; -1); \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$
$$7x - 42 \leq 0;$$

Задание 3

Решить систему уравнений: $x^2 + 2x + 3 = 0$ и $x^2 + 3x = 4$.

Решение

- Можно заметить, что первое уравнение системы – однородное. Считая x неизвестной величиной, а 1 – постоянной, решим его. Получим: $x^2 = -2x$ и $x^2 = -3x$.
- Тем самым мы получили линейные уравнения. Исходная система сводится к совокупности двух систем уравнений:
- первая система состоит из уравнений: $x^2 = x$, $x^2 + 3x = 4$.
- Вторая система состоит из уравнений: $x^2 = -3x$, $x^2 + 3x = 4$.
- Решения первой системы — пара чисел: 0 и 1 и пара чисел: -1 , -1 . Вторую систему решаем способом подстановки.
- Решениями системы является пара чисел: 1 , $\sqrt{3}$ и 1 , $-\sqrt{3}$, вторая пара: -1 , $\sqrt{3}$ и -1 , $-\sqrt{3}$.
- При решении исходной системы все преобразования были равносильными, поэтому проверка не нужна.
- Ответ: пара чисел: 0 и 1 ; пара чисел: -1 , -1 ; пара чисел: 1 , $\sqrt{3}$ и 1 , $-\sqrt{3}$; пара: -1 , $\sqrt{3}$ и -1 , $-\sqrt{3}$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Проверка.} \\ 7x - 42 \leq 0; \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \end{array} \right.$$

(1; 0), (-2; 3);

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$x = -2, y = 3$:

$1 = 1$ – верное равенство;

$7x - 42 \leq 0$; – неопределён;

Ответ: (1; 0).

Задание 4

Решить систему уравнений

Первое уравнение – x плюс y равно единице.

Второе — $2x^2$ плюс $2\sqrt{x}$ минус x равно y^2 минус один плюс два, умноженное на один плюс $\sqrt{x}$.

Решение

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе, перенесем во втором уравнении все члены в левую часть и, приведя подобные слагаемые, получим систему уравнений:

y равен один минус x и x в квадрате плюс x минус два равно нулю.

Решением системы является пара чисел: один и ноль и пара чисел: минус два и три.

Эта система является следствием исходной, поэтому проверка обязательна.

Проверка

Проверим подстановкой в исходную систему уравнений, является ли каждая пара чисел решением данной системы.

Проверим первое уравнение.

Если x равен единице, y равен нулю, то получаем верное равенство,

и во втором уравнении получаем

верное равенство. Значит, пара чисел: один и ноль — решение системы.

Проверяем вторую пару чисел: минус два и три. Если x равен минус двум, y равен трем, то первое уравнение системы — верное равенство. А второе уравнение неверно, так как квадратный корень из минус двух не определён, поэтому пара чисел: минус два и три не является решением системы.

Ответ: пара чисел: один и ноль.