

Электромагнитные волны

- Волновое уравнение электромагнитного поля
 - Плоская электромагнитная волна
 - Связь мгновенных значений E и H
 - Энергия электромагнитной волны
 - Импульс электромагнитной волны
- 

Волновое уравнение электромагнитного поля

- Из уравнений Максвелла
следует вывод о
существовании
электромагнитных волн.
Рассмотрим однородную
нейтральную
непроводящую среду
($\rho=0, j=0$) :

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}}, & \nabla \times \vec{H} &= \dot{\vec{D}}, \\ \nabla \vec{B} &= 0, & \nabla \vec{D} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{H}, & \vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.\end{aligned}$$

Продифференцируем второе уравнение по времени
и затем используем первое уравнение

$$\begin{aligned}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \right) \right) = \nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \nabla \times (-\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{\mu\mu_0} \left[\nabla(\nabla \vec{E}) - (\nabla \nabla) \vec{E} \right] = \frac{1}{\mu\mu_0} \nabla^2 \vec{E}\end{aligned}$$

- Мы воспользовались формулой
- $[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$, и тем что $\nabla \vec{E} = 0$. Аналогичные преобразования можно проделать и для вектора $\vec{H}$. В результате получаем два волновых уравнения:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Если $\varepsilon=1$ и $\mu=1$ (в вакууме), то коэффициент $\varepsilon_0 \mu_0$ в уравнении есть величина связанная со скоростью распространения электромагнитной волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad \text{Тогда скорость в среде равна:} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Плоская электромагнитная волна

Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям плоской волны. При этом E и H не будут зависеть от y и z, и соответствующие производные будут равны нулю. Тогда уравнения Максвелла :

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \left(\hat{x} \hat{x} H_x e_x + \hat{y} \hat{y} H_y e_y + \hat{z} \hat{z} H_z e_z \right)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_x & E_y & E_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} = \varepsilon\varepsilon_0 \left(\hat{x} \hat{x} E_x e_x + \hat{y} \hat{y} E_y e_y + \hat{z} \hat{z} E_z e_z \right)$$

$$\begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

примут вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 H_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 H_z,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 E_y,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 E_z,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

Отсюда следует, что E_x и H_x не зависят ни от x , ни от t . Это значит, что отличные от нуля E_x и H_x могут быть только однородными постоянными полями, накладывающимися на поле волны. А в самой волне они равны нулю. Это значит, что электромагнитная волна является поперечной.

Кроме того, векторы **E** и **H** в электромагнитной волне взаимно ортогональны. Возьмём пару уравнений

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Из них видно, что изменение во времени магнитного поля, направленного вдоль оси Z, порождает электрическое поле E_y вдоль оси Y. И наоборот. Ни поля E_z , ни поля H_y при этом не появляется, а это и значит, что **E** $\perp$ **H**.

СВЯЗЬ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ E И H

Когда плоская волна распространяется вдоль положительного направления оси X, то в общем случае можно записать

$$E_y = E_y(t - x/v), \quad H_z = H_z(t - x/v).$$

Введя обозначение $\varphi = t - x/v$, найдём производные:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{v} \right), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot 1.$$

Подставив эти выражения в уравнение $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$ получим

$$\frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial \phi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Rightarrow \sqrt{\epsilon\epsilon_0} \frac{\partial E_y}{\partial \phi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Rightarrow \sqrt{\epsilon\epsilon_0} \frac{\partial E_y}{\partial \phi} = \sqrt{\mu\mu_0} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

Проинтегрировав, получим $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu\mu_0} H_z + const$

где константа обусловлена наличием постоянного электрического и магнитного полей. Нас интересует только переменное поле, поэтому константу положим равной нулю:

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu\mu_0} H_z$$

Последнее означает: E и H взаимно ортогональны, изменяются синфазно – одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль. Они составляют правовинтовую систему с направлением распространения волны.

Если бы волна распространялась в отрицательном направлении, то E и H изменялись бы в противофазе:

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_y = -\sqrt{\mu\mu_0} H_z$$

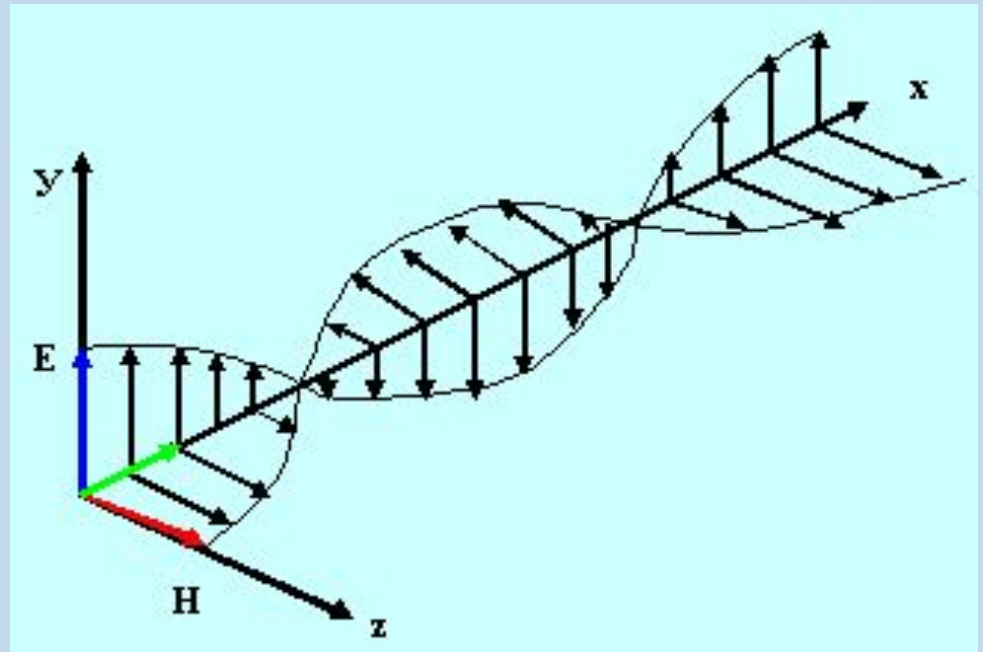
хотя сами вектора и составляли бы по-прежнему правовинтовую систему.

Все рассуждения не зависят от выбора направления распространения, поэтому в дальнейшем будем опускать индексы y и z перед проекциями векторов.

Уравнение плоской гармонической электромагнитной волны будет иметь вид:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx),$$

$$H = H_m \cos(\omega t - kx)$$



Энергия электромагнитной волны

В обычной изотропной среде плотность энергии электромагнитного поля равна сумме плотностей энергий:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{EH}{v}$$

Умножив на скорость волны, получим плотность потока энергии: $S = wv = EH$

Векторы E и H взаимно ортогональны. Направление вектора $[EH]$ совпадает с направлением переноса энергии, поэтому можно определить вектор плотности потока энергии так

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] \quad \text{его надо называть **вектором Пойнтинга**.}$$

Интенсивность I бегущей волны равна, по определению, среднему значению плотности потока энергии $\langle S \rangle$:

$$I = \langle S \rangle = \langle wv \rangle = \langle v\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2$$

Импульс электромагнитной волны

Перенос энергии волной сопровождается и переносом импульса. Из теории относительности известно, что импульс объекта с нулевой массой покоя движущегося со скоростью света (фотона): $p = \frac{W}{c}$, где W - энергия фотона электромагнитной волны.

Связь для плотности импульса и плотности энергии (величин отнесённых к единице объёма) будет та же самая:

$$p = \frac{w}{c} = \frac{S/v}{c} = \frac{[EH]}{c^2} \quad \text{т.к. } (v=c)$$

Если падающая нормально на поверхность волна полностью поглощается, то единице площади поверхности за dt сообщается импульс, заключённый в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой cdt , т.е.

$$dp = \frac{w}{c} c dt = w dt$$

Но импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению p^* на поверхность тела. В случае гармонической волны эта величина пульсирует с большой частотой, и практический интерес представляет только её среднее значение по времени:

$$p^* = \langle w \rangle$$

Рассмотрим механизм передачи импульса телу, т.е. как возникает давление. Электрическое поле волны возбуждает в теле ток плотности $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, а магнитное поле волны будет действовать на него по закону Ампера – с силой, объёмная плотность которой равна

$$F_{ed} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] = \sigma [\mathbf{E} \mathbf{B}]$$

Отсюда следует, что сила действует в направлении распространения волны.