

***ТЕМА ЛЕКЦИИ:* ВВЕДЕНИЕ В КУРС МЕДИЦИНСКОЙ ФИЗИКИ И
МАТЕМАТИКИ. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

**ЛЕКТОР: доцент кафедры медицинской информатики
и физики МАЙОРОВ ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ**

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

- 1.1 Определение производной, правила дифференцирования.
- 1.2 Механический и геометрический смысл производной.
- 1.3 Дифференциал функции, полный дифференциал.

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ

- 2.1 Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства.
- 2.2 Методы интегрирования.
- 2.3 Определенный интеграл, основные свойства.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- 3.1 Определение дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с частными производными.

1.1 Определение производной, правила дифференцирования.

Производная – это предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, характеризует скорость изменения функции.

Производной функции $f(x)$ в точке x называется
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция, которая имеет конечную производную, называется дифференцируемой функцией. Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**.

Из определения производной функции следуют **основные правила дифференцирования**.

$$\mathbf{1. (const)'=0}$$

Производная любого постоянного числа равна нулю.

Примеры:

$$(29)'=0, (-1973)'=0.$$

$$\mathbf{2. (x)'=1}$$

Производная аргумента функции равна единице.

$$3. (c u)' = c u'$$

Постоянное число можно выносить за знак производной.

Пример:

$$(7x)' = 7x' = 7 \cdot 1 = 7.$$

$$4. (u + v - w + \dots + s)' = u' + v' - w' + \dots + s'.$$

Производная алгебраической суммы любого числа слагаемых равна этой же алгебраической сумме производных слагаемых.

Пример:

$$(4x^2 + 8x - 11x + 17)' = (4x^2)' + (8x)' - (11x)' + (17)' = 8x + 8 - 11 + 0 = 8x - 3.$$

$$5. (u^n)' = nu^{n-1}, \text{ где } u - \text{любая функция.}$$

Производная степени функции u^n равна произведению показателя степени на функцию, в степени на единицу меньше, на производную самой функции.

Примеры:

$$(x^3)' = 3x^2, (x^{-7})' = -7x^{-8}.$$

$$6. (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Примеры:

$$(\sqrt{x})' = \frac{x'}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{2x^5} + \sqrt{4x})' = \frac{(2x^5 + 4x)'}{2\sqrt{2x^5 + 4x}} = \frac{10x^4 + 4}{2\sqrt{2x^5 + 4x}}$$

7. $(\sin u)' = u' \cos u$.

Производная синуса сложной функции равна произведению производной этой сложной функции на косинус этой функции.

Если $u = x$, то $(\sin x)' = \cos x$.

Примеры:

$$(5\sin x - 6x^2)' = 5\cos x - 12x, [\sin(2x^3 + 3x)]' = (2x^3 + 3x)' \cdot \cos(2x^3 + 3x) = (6x^2 + 3) \cdot \cos(2x^3 + 3x).$$

8. $(\cos u)' = -u' \sin u$.

Производная косинуса сложной функции равна минус произведению производной этой сложной функции на синус этой функции.

Если $u = x$, то $(\cos x)' = -\sin x$.

Примеры:

$$(2\sin x - 4\cos x)' = (2\sin x)' - (4\cos x)' = 2\cos x + 4\sin x, [\cos(-x^3 + 8)]' = -(-x^3 + 8)' \cdot \sin(-x^3 + 8) = 3x^2 \cdot \sin(-x^3 + 8)$$

9. $(u v)' = u' v + v' u$.

Производная произведения равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый.

Примеры:

$$(3x^2 * \sin x)' = (3x^2)' * \sin x + 3x^2 * (\sin x)' = 6x * \sin x + 3x^2 * \cos x,$$

$$(\sin 5x * \cos 2x)' = (\sin 5x)' * \cos 2x + \sin 5x * (\cos 2x)' = 5 \cos 5x * \cos 2x - 2 \sin 2x \sin 5x.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $y=f(g(x))=F(x)$ – сложная функция аргумента x . Считаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые по своим аргументам, тогда производная этой функции находится по следующей формуле:

$$y' = f'(g(x)) * g'(x).$$

Примеры:

Найдите производную функции: $y=(3x^2-1)^5$.

Решение: $y' = ((3x^2-1)^5)' = 5(3x^2-1)^4 * 6x$

Найдите производную функции: $y=(x^2+3x+1)^5$.

Решение: $y' = ((x^2+3x+1)^5)' = 5(x^2+3x+1)^4 * (2x+3).$

ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(U + V)' = U' + V'$ 2. $(U * V)' = U' * V + U * V'$
3. $(U / V)' = U' * V - U * V' / V^2$ 4. $(C)' = 0$ 5. $(X^{1/2})' = 1/2 * X^{-1/2}$
6. $(1/X)' = -1/X^2$ 7. $(X^n)' = n * X^{n-1}$ 8. $(e^x)' = e^x$ 9. $(a^x)' = a^x * \ln a$
10. $(\ln x)' = 1/x$ 11. $(\log_a x)' = 1/x * \ln a$ 12. $(\sin x)' = \cos x$
13. $(\cos x)' = -\sin x$ 14. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$ 15. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$
16. $(\arcsin x)' = 1/(1-x^2)^{1/2}$ 17. $(\arccos x)' = -1/(1-x^2)^{1/2}$
18. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$ 19. $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$

1.2 Механический и геометрический смысл производной

Механический смысл производной – это когда производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0 , то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y=f(x)$.

И. Ньютон впервые сформулировал, что с позиции механики мгновенная скорость прямолинейно движущейся точки есть первая производная от пути во времени, а её мгновенное ускорение есть первая производная от скорости по времени или вторая производная от пути по времени.

Пример:

Найти скорость спринтера через 2 сек. после старта, если его путь изменяется по формуле: $S(t) = t^2/2 * (9/4 - t/3)$.

Решение

Воспользуемся следующей формулой: $(U * V)' = U' * V + U * V'$

$$V = dS/dt = t * (9/4 - t/3) + t^2/2 * (-1/3) = -t^2/3 + 9/4 * t - t^2/6 = -t^2/2 + 9/4 * t = t/4(9 - 2t).$$

$$V(2) = 2/4(9 - 2 * 2) = 2,5 \text{ (м/с)},$$

Таким образом, на 2-ой секунде бега спринтер имеет скорость 2,5 м/с.

Пример:

Теперь найдем ускорение спринтера в начале бега при $t=0$.

Решение

Воспользуемся следующей формулой: $(U + V)' = U' + V'$

$$A = dV/dt = (-t^2/2 + 9/4 * t)' = -t + 9/4, \quad a(0) = -0 + 9/4 = 2,25 \text{ (м/с)},$$

Таким образом, в начале бега спринтер имел ускорение 2,25 м/с.

В медицине и биологии, используя производную, можно определить скорость изменения различных параметров системы или процесса в живом организме.

Пример:

При воздействии внешней среды давление на поверхность тела с течением времени меняется по закону: $p = (3t^2 - t + 2)$ мм. рт.ст. Определить с какой скоростью изменяется давление на 10-ой секунде.

Решение

$$p' = dp/dt = (3t^2 - t + 2)' = (6t - 1) \text{ мм. рт.ст./с}$$

$$p(10) = 6 \cdot 10 - 1 = 59 \text{ мм. рт.ст./с}$$

Итак, в момент времени $t=10$ с. давление изменяется со скоростью 59 мм. рт.ст. в секунду.

Геометрический смысл производной – это производная функции y в заданной её точке есть **тангенс угла наклона касательной**, проведенной в этой точке с положительным направлением оси OX . Как правило, при решении задач весь геометрический смысл производной сводится в составлении уравнения нормали и касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

Пример:

Задача: Составить уравнение нормали и касательной к данным кривым в точке с абсциссой x_0 . $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$; $y = (x^2 - 3x + 3)/3$, $x_0 = 3$.

Решение

Уравнение нормали имеет вид: $y - y_0 = -1/y'_0 \cdot (x - x_0)$

$$\text{Имеем: } y_0 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$y' = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$$

$$y'_0 = 4 \cdot 1 - 3 = 1$$

Получаем уравнение нормали: $y = -(x - 1)$ или $y = -x + 1$.

Уравнение касательной имеет вид: $y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0)$

$$\text{Имеем: } y_0 = (3^2 - 3 \cdot 3 + 3)/3 = 1$$

$$y' = ((x^2 - 3x + 3)/3)' = (2x - 3)/3$$

$$y'_0 = (2 \cdot 3 - 3)/3 = 1$$

Получаем уравнение касательной: $y - 1 = (x - 3)$ или $y = x - 2$.

1.3 Дифференциал функции, полный дифференциал.

Если приращение функции $y = f(x)$: $dy = f(x+dx) - f(x)$, то соответствующее приращению аргумента dx , может быть представлено в виде $dy = f(x+dx) - f(x) =$

$A dx + q(dx)$, где A не зависит от dx , но зависит от x , то функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x . Таким образом, $q(dx)$ – бесконечно малая величина, а $A = df(x)/dx$ – главная линейная часть приращения дифференцируемой функции и называется **дифференциалом**.

Дифференциал $df(x)$ является функцией двух аргументов – x и dx . Рассмотрим функцию $y=x$, убедимся, что дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. Лейбниц предложил обозначить $dy/dx=y'$ $dy/dx=y'$ и назвать это **дифференциалом функции**.

Пример:

Найти дифференциал функции: $y=2x + \sin x$.

Решение:

Подставив в формулу $dy/dx=y'$ получим: $dy=(2 + \cos x)dx$.

Итак, формулами для нахождения дифференциала будут формулы для нахождения производной, где вместо знака производной перед функцией будет стоять символ d .

Полный дифференциал функции – это дифференциал функции с несколькими независимыми переменными.

Имеет следующий вид: **$df=df/dx \cdot dx + df/dy \cdot dy + df/dz \cdot dz$**

Пример:

Найти полный дифференциал следующей функции: $U(x,y,z)=\ln(x^3+y^2+z^2)$.

Решение

$$dU(x,y,z)= 3x^2/(x^3+y^2+z^2)*dx+ 2y/(x^3+y^2+z^2)*dy+ 2z/(x^3+y^2+z^2)*dz$$

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства.

Интегральное исчисление – раздел математики, в котором изучаются свойства и способы вычисления интегралов и их приложения к решению различных математических, физических и других задач. В систематической форме интегральное исчисление было предложено в 17 веке И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для данной функции $f(x)$, если для любого x из области определения $f(x)$ выполняется равенство: $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

Множество $F(x) + C$ всех первообразных функций для данной функции $f(x)$, где C принимает все возможные числовые значения, называется **неопределённым интегралом от функции $f(x)$** и обозначается символом:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, по определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

C – произвольная постоянная;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Неопределённый интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, производная равна подынтегральной функции.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d / dx(\int f(x)dx) = f(x).$$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от производной функции отличается от самой функции только на постоянную величину:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

5. Неопределённый интеграл от суммы функции равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

6. Неопределенный интеграл от разности функции равен разности интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

Основные формулы неопределённых интегралов

$$1. \int k dx = kx + C \qquad 2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad 4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C \qquad 6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C \qquad 8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad 10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \qquad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

Пример:

Непосредственное интегрирование

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int (7 \cos x - 3 \sin x) dx = 7 \sin x + 3 \cos x + C$$

Пример:

Интегрирование разложением

$$\int \frac{3x^2 + 5x^3 - 4x^5}{x^3} dx = \int \left(\frac{3}{x} + 5 - 4x^2 \right) dx = 3 \ln x + 5x - 4 \frac{x^3}{3} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int \frac{(x^4 - 1) + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \int \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1-x^2) dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

2.2 Методы интегрирования.

Рассмотрим два метода интегрирования: МЕТОД ПОДСТАНОВКИ, МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ.

Метод подстановки

Наиболее общим приёмом интегрирования функций является *метод подстановки*, который применяется тогда, когда искомый интеграл не является табличным, но путем ряда элементарных преобразований он может быть сведен к табличному.

Метод подстановки основан на применении следующей формулы:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

где $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция от t , производная которой $\varphi'(t)$ сохраняет знак для рассматриваемых значений переменных.

Сущность применения этой формулы состоит в том, что в данном интеграле переменную x заменяют переменной t .

Пример:

Найти интеграл

$$\int \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx$$

Применим подстановку: $u=\arctg(x)$, тогда $du=dx/(1+x^2)$

Подставляя полученные значения в искомый интеграл получим:

$$\int \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx = \int u du = \frac{u^2}{2}$$

Теперь подставив значение u в полученное выражение получим решение искомого интеграла:

$$\int \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx = \frac{\arctg^2(x)}{2} + C$$

Метод интегрирования по частям

Из дифференциального исчисления известно, что если u и v – дифференцируемые функции от x , то $d(uv) = u dv + v du$. Отсюда $u dv = d(uv) - v du$.

Интегрируя обе части этого равенства, имеем

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$

Интегрированием по частям называется интегрирование с помощью полученной формулы.

Основные случаи, когда применяется данный способ интегрирования:

1. Подынтегральная функция содержит произведение многочлена от x на показательную функцию от x или произведение многочлена от x на $\sin(x)$ или $\cos(x)$, или произведение многочлена от x на $\ln(x)$.
2. Подынтегральная функция представляет собой одну из обратных тригонометрических функций $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ и тд.
3. Подынтегральная функция есть произведение показательной функции на $\sin(x)$ или $\cos(x)$.

Пример:
Найти интеграл

$$\int x \sin(x) dx$$

Положим $u = x$, $dv = \sin(x)dx$, тогда $du = dx$, $v = -\cos(x)$. Отсюда

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

2.3 Определенный интеграл, основные свойства

Приращение первообразных функций $F(x)+C$ при переходе аргумента x от значения $x=a$ к значению $x=b$, равное разности $F(b)-F(a)$, называется определенным интегралом и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Данное равенство называется формулой Ньютона – Лейбница.

Предполагается при этом, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна при всех значениях x , удовлетворяющих условиям $a < x < b$.

Основные свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = \int_b^a f(x) dx$$

$$2. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Пример:

Найти определённый интеграл

$$\int_2^4 x dx$$

Решение

$$\int_2^4 x dx = \frac{x^2}{2} = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6$$

3.1 Определение дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с частными производными.

Дифференциальным уравнением – называют уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные любых порядков $y, y', y'', y''', \dots, y^n$ или дифференциалы, т.е. уравнение вида: $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n)=0$

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Если функция $U=f(x,y,z,\dots,t)$ зависит от двух и большего числа независимых переменных, то уравнение будет содержать частные производные и называется **дифференциальным уравнением с частными производными**.

В дифференциальное уравнение могут входить производные разных порядков, в зависимости от этого различают уравнения 1-го, 2-го и т.д. порядков. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциальных уравнений называется любая функция $y = f(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является разыскание всех решений данного уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла. Поэтому решение дифференциального уравнения называют также его интегралом, а процесс поиска всех решений – интегрированием дифференциального уравнения.

Запишем дифференциальное уравнение вида: $f(x)dx + g(y)dy = 0$

где $g(y)$ – функция только одной переменной y ,

$f(x)$ - функция только одной переменной x .

Чтобы решить данное уравнение необходимо проинтегрировать обе части равенства: $f(x)dx = -g(y)dy$

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Пример:

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

$$\int y dy = -\int dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x + c$$

$$y = \sqrt{2(c - x)}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = x^2 + \sin x$$

$$dy = (x^2 + \sin x)dx$$

$$y = \int (x^2 + \sin x)dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$$