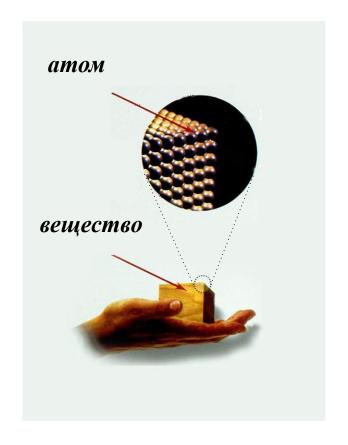
Молекулярная физика и термодинамика — разделы физики, в которых изучаются макроскопические процессы в телах, связанные с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул.

Объект исследования: макроскопические системы - объекты, состоящие из очень большого числа частиц (молекул, атомов).



ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основы классической статистики заложены Д.К. Максвеллом (Англия), Л.Больцманом (Германия), В.У. Гиббсом (США) во второй половине XIX столетия.

Задачи статистики

- 1. Нахождение средних и наиболее вероятных значений физических характеристик частиц, образующих макроскопическую систему.
- 2. Выяснение связи между характеристиками отдельных частиц системы и параметрами всей системы.

В средине XIX века была сформулирована молекулярно-кинетическая теория, но тогда не было никаких доказательств существования самих молекул. Вся теория базировалась на предположении о движении молекул, но как измерить скорость их движения, если они невидимы.

$$\frac{m_0 \upsilon_{\text{\tiny KB}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \qquad \qquad \upsilon_{\text{\tiny KB}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kNT}{m_0N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \qquad P = \frac{m}{V\mu} RT \qquad P = RT \frac{\rho}{\mu} \qquad \left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{RT}{\mu}$$

 $\upsilon_{_{\mathrm{KB}}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$ При плотности азота, равной 1.25 кг/м³, при t=0°С и P=1 атм., υ =500м/с. Для водорода: υ =2000м/с.

Закономерности, обусловленные большим числом сталкивающихся атомов и молекул, и не свойственные отдельным атомам и молекулам, называются вероятностными или статистическими.

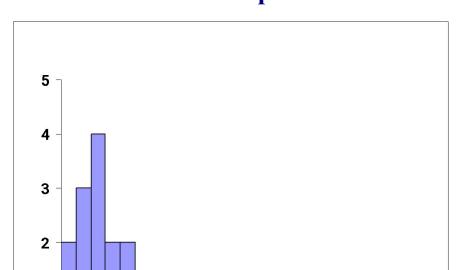
По определению: Вероятность P можно представить как отношение числа благоприятных случаев к числу возможных случаев.

Отсюда следует, что P может принимать значения от нуля до единицы.

Распределение вероятностей — это закон, описывающий область значений переменной и вероятность появления переменной в конкретных областях значений.

Статистический анализ, для построения рядов распределения, проводится во многих областях науки с целью выделения характерных свойств и закономерностей изучаемой совокупности.

Сколько времени вы проводите за компьютером?

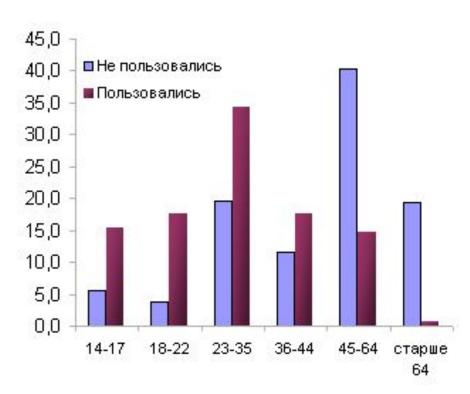


11

16

6

Распределение пользователей интернета по возрасту, в %



Для корректного построения распределения нужно большое количество людей в выборке исследования.

t, часы

1. Распределение Максвелла

(для описания распределения молекул по скоростям)

Обозначим:

dN – число молекул со скоростями от v до v+dv.

N- общее число молекул газа в данном объеме.

 $\frac{dN}{N}$ — относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до v+dv (вероятность того, что скорость данной молекулы лежит в данном интервале).

 $\frac{dN}{Nd\upsilon}$ — относительное число молекул в единичном интервале скоростей.

 $f(\upsilon) = \frac{dN}{Nd\upsilon}$ – плотность вероятности того, что молекула обладает скоростью υ (функция распределения Максвелла).

$$f(\upsilon) = \frac{dN}{N \cdot d\upsilon} \qquad \frac{dN}{N} = f(\upsilon) \cdot d\upsilon$$

$$\int_{0}^{\infty} f(\upsilon) \cdot d\upsilon = \int_{0}^{N} \frac{dN}{N} = \frac{1}{N} \int_{0}^{N} dN = \frac{N}{N} = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} f(\upsilon) d\upsilon = 1$$
 — условие нормировки функции распределения

Интеграл определяет вероятность того, что скорость молекулы попадает в интервал скоростей от 0 до ∞ .

Явный вид функции f(v) был получен теоретически Максвеллом в 1859 г.

$$f(V) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 \upsilon^2}{2kT}} \cdot \upsilon^2$$



Джеймс Клерк Максвелл (1831- 1879)

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{K}$$
 — постоянная Больцмана;

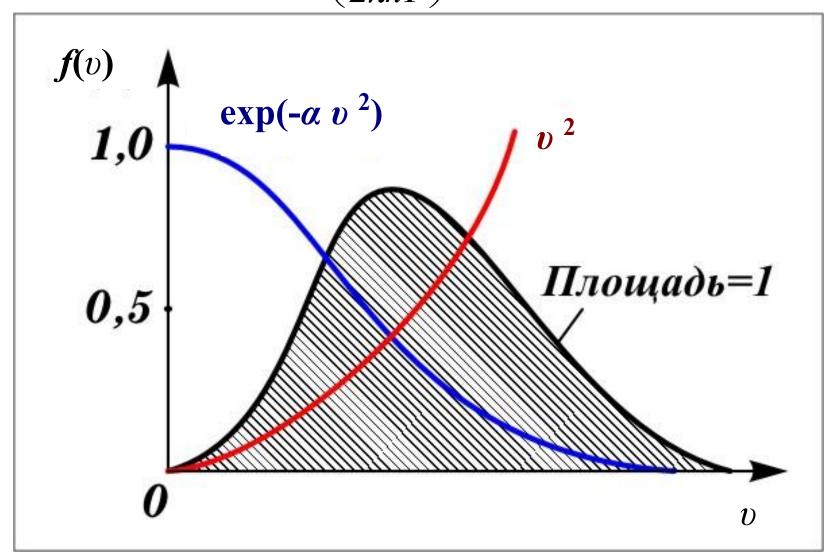
 m_0 — масса молекулы,

T – абсолютная температура газа,

v – заданная скорость (аргумент функции).

Распределение Максвелла справедливо для газов и жидкостей.

$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 \upsilon^2}{2kT}} \cdot \upsilon^2$$



$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}} \cdot \upsilon^2$$

Основные свойства функции распределения

- 1. При v=0 и $v=\infty$ f(v)=0 очень большие и маленькие скорости маловероятны
- 2. Существует $v_{\substack{\text{вер}\\\text{которой}}}$ наиболее вероятная скорость, с которой движется большинство молекул. Ей соответствует максимум функции распределения Максвелла.

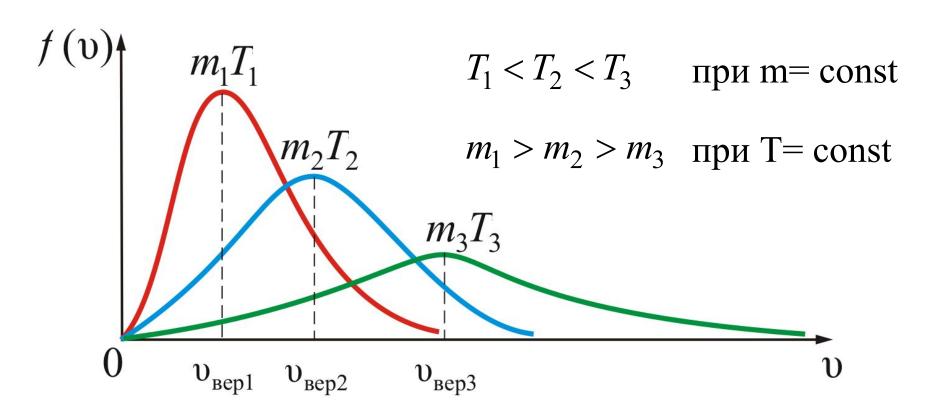
$$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon} = 0$$



$$\upsilon_{sep} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

$$\upsilon_{eep} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

- 3. При увеличении температуры $v_{\it sep}$ увеличивается
- 4. При увеличении массы молекул $\bar{v}_{\it eep}$ уменьшается

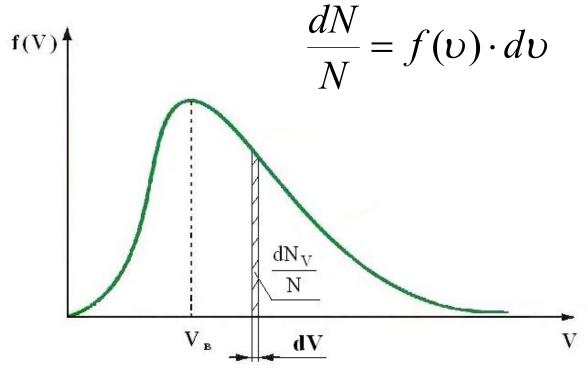


ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1. Нахождение относительного числа молекул со скоростями от v_1 до v_2

Обозначим:

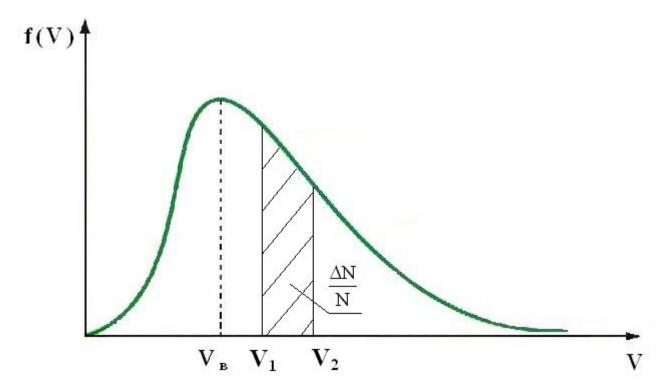
dN— число молекул со скоростями от v до v+dv N — общее число молекул газа в данном объеме



- вероятность того, что скорость данной молекулы лежит в интервале скоростей от v до v + dv.

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot dv$$
 — относительное число молекул со скоростями от v_1 до v_2 .

На графике f(v) ему соответствует площадь заштрихованной фигуры.



2. Нахождение средней скоросты молекул υ ср

По определению:
$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\sum \upsilon_i}{N}$$

Разобьем весь интервал возможных скоростей (от нуля до бесконечности) на элементарные интервалы dv.

dN — число молекул, скорости которых лежат в пределах одного из таких интервалов.

Так как dv - элементарный интервал, то можно считать, что все скорости, принадлежащие этому интервалу, одинаковы и равны v.

$$f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv} \qquad \longrightarrow \qquad dN = Nf(v)dv$$

$$dN = N \cdot f(\upsilon) \cdot d\upsilon$$

 υdN - сумма скоростей молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + \Delta \upsilon$.

Тогда сумма скоростей всех молекул:

$$\sum_{i=1}^{N} \upsilon_{i} = \int_{0}^{N} \upsilon \cdot dN = \int_{0}^{\infty} \upsilon \cdot f(\upsilon) \cdot N \cdot d\upsilon$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\int_{0}^{\infty} \upsilon \cdot f(\upsilon) N d\upsilon}{N} = 4\pi \left(\frac{m_{0}}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \int_{0}^{\infty} \upsilon^{3} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m_{0}\upsilon^{2}}{kT}\right) d\upsilon$$

$$\langle \upsilon \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{3k^2T^2}{m_0^2}\right) \qquad \langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

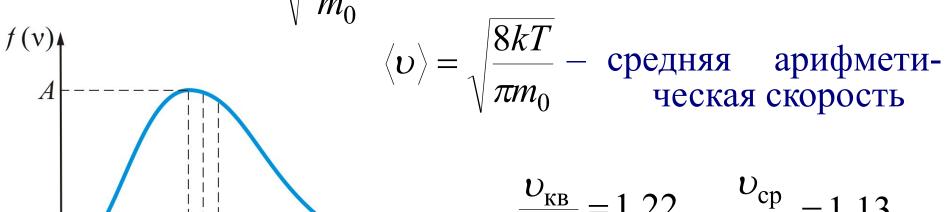
3. Нахождение средней кинетической энергии молекул

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{N} \int_{0}^{\infty} E \cdot dN = \int_{0}^{\infty} E \cdot f(\upsilon) d\upsilon = \frac{3}{2} kT$$
 $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT$

$$\upsilon_{sep} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$
 — наиболее вероятная скорость

 $v_{\rm Bep} v_{\rm cp} v_{\rm kb}$

$$\upsilon_{_{\mathrm{KB}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$
 — средняя квадратичная скорость



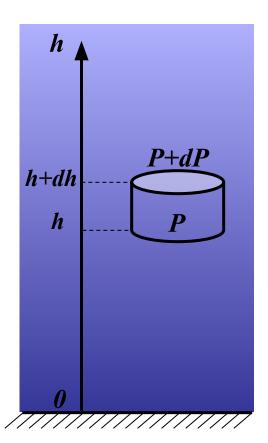
$$\frac{\upsilon_{\text{KB}}}{\upsilon_{\text{Bep}}} = 1.22 \qquad \frac{\upsilon_{\text{cp}}}{\upsilon_{\text{Bep}}} = 1.13$$

2. Распределение Больцмана

(для описания распределения молекул по высоте в гравитационном поле Земли)

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Барометрическая формула выражает зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря.



Атмосферное давление на высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа.

P - давление на высоте h

$$(\mathbf{P} + \mathrm{d}\mathbf{P})$$
 - давление на высоте $(\mathbf{h} + \mathrm{d}\mathbf{h})$ $\mathrm{d}\mathbf{h} > 0$ $\mathrm{d}\mathbf{P} < 0$

(на большей высоте давление меньше)

$$dP = -\rho g dh$$
 — изменение давления с увеличением высоты

 ρ — плотность газа

g — ускорение свободного падения

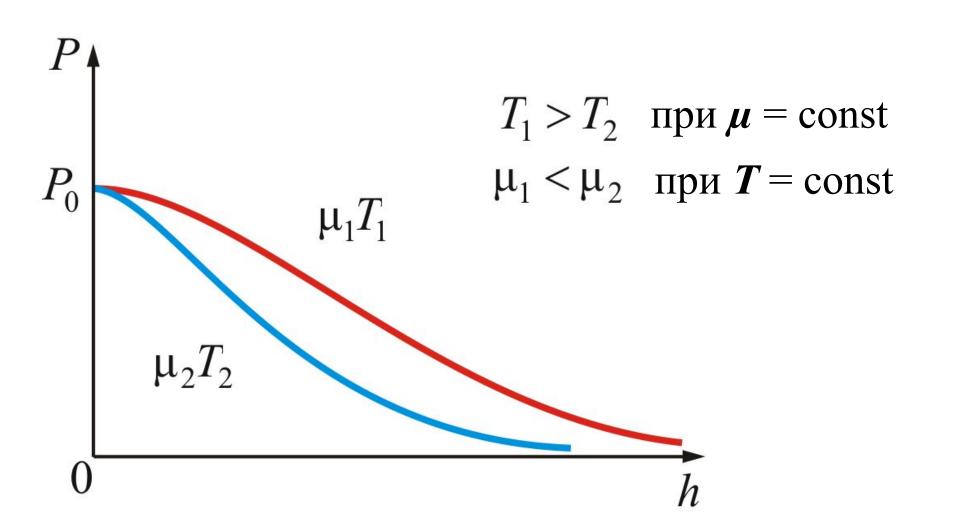
$$PV = \frac{m}{\mu}RT \longrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT} \\ dP = -\rho g dh \end{cases} \longrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g dh}{RT}$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} \int_{0}^{h} dh$$
 \longrightarrow $\ln(P) - \ln(P_0) = -\frac{\mu g h}{RT}$ $\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g}{RT} h$

$$P=P_0 \exp \left(-rac{\mu g h}{RT}
ight)$$
 — барометрическая формула

$$P = P_0 \exp \left(- rac{\mu gh}{RT}
ight)$$
 Чем **тяжелее** газ (> μ) и ниже температура, тем быстрее убывает давле

Чем *тяжелее* газ (> µ) и чем быстрее убывает давление



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Распределение Больцмана определяет распределение частиц в силовом поле в условиях теплового равновесия.

$$P = (nkT)$$

$$P_0 = (n_0 kT)$$



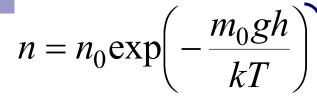
Людвиг Больцман (1844–1906)

 P_0 и n_0 — давление и концентрация газа на нулевой высоте, P и n — на высоте h

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) \qquad nkT = n_0 kT \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$$

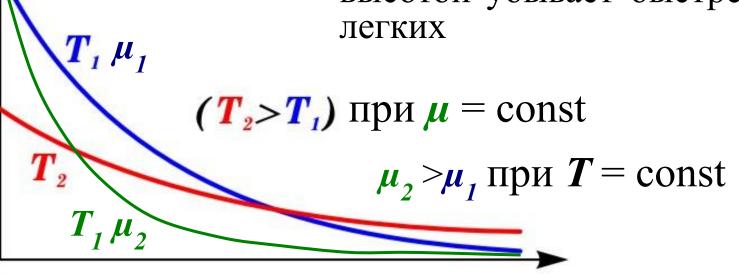
$$\begin{array}{c} \mu = m_0 N_A \\ R = N_A k \end{array} \qquad n = n_0 \exp \left(-\frac{m_0 N_A gh}{k N_A T} \right) \qquad n = n_0 \exp \left(-\frac{m_0 gh}{k T} \right)$$

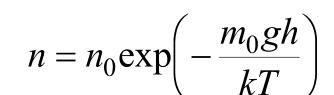
распределение Больцмана в поле силы тяжести



$$n = \frac{P}{kT}$$

- с уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля, убывает
- при высоких температурах молекулы оказываются распределёнными по высоте почти рав-номерно
- число более тяжелых молекул с высотой убывает быстрее, чем легких





 $E_n = m_0 gh$ — потенциальная энергия одной молекулы в поле тяготения на высоте h от уровня моря, тогда n_0 — концентрация частиц в том месте, где $E_n = 0$

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{E_n}{kT} \right)$$
 — распределение Больцмана характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии

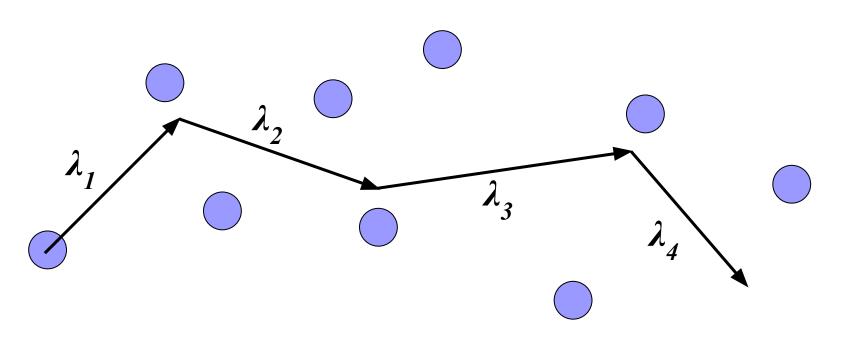
Распределение справедливо в любом потенциальном поле сил для совокупности любых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Оно устанавливается в результате совместного действия потенциального поля и теплового движения.

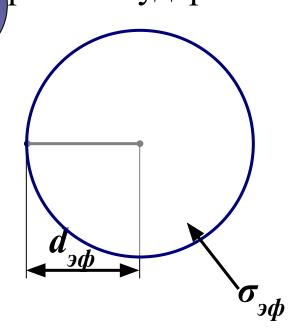
ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА в неравновесных системах

1. СРЕДНЯЯ ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ И СРЕДНЕЕ ЧИСЛО СТОЛКНОВЕНИЙ

Средняя длина свободного пробега молекул <*λ>* – это среднее расстояние, которое молекула проходит между двумя последовательными соударениями.



Эффективный диаметр молекулы $d_{9\phi}$ — минимальное расстояние, на которое сближаются центры молекулири их соударении.



- определяется природой самого газа (увеличивается при увеличе-нии размеров молекул)
- зависит от скорости сталкивающихся молекул, т.е. от температуры (уменьшается при увеличении температуры)

Эффективное сечение молекул $\sigma_{g\phi}$ — площадь круга с радиусом, равным эффективному диаметру (площадь в которую не может проникнуть центр любой другой молекулы).

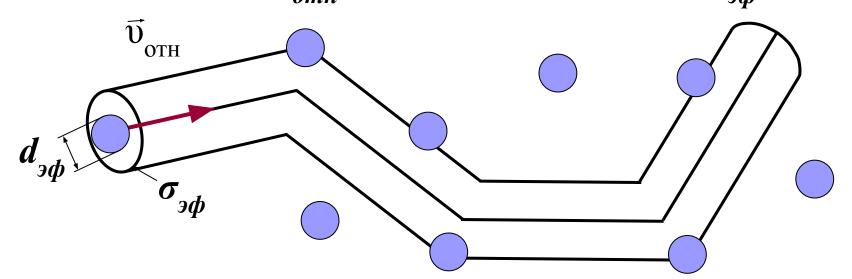
 $\sigma_{9\phi} = \pi d_{9\phi}^2$

Найдем **<Z> – среднее число соударений** одной молекулы с другими в единицу времени.

Сделаем предположение что

- ullet молекулы упругие шарики диаметром $d_{\imath \phi}$
- •все молекулы неподвижны, а одна движется между ними, обладая средней относительной скоростью $< v_{omn} >$

За 1 секунду летящая молекула столкнется со всеми молекулами, центры которых окажутся в пределах объема ломаного цилиндра длиной образующей $\langle v_{omh} \rangle$ и площадью сечения $\sigma_{g\phi}$.



$$V = \sigma_{9\phi} \cdot \langle \upsilon_{omh} \rangle$$
 — объем цилиндра

$$<\!Z\!> = n \cdot \sigma_{\ni \phi} \cdot <\! \upsilon_{omh} > -$$
 среднее число соударений одной молекулы с другими

<v>- средняя скорость молекулы, или путь, пройденный ею за 1 с.

$$<\lambda> = \frac{<\upsilon>}{< Z>} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot d_{\vartheta\phi}^2 \cdot n}$$
 — средняя длина свободного пробега молекулы:

$$<\lambda>=\frac{<\upsilon>}{}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot d_{\ni d}^2\cdot n}}$$

$$n = \frac{P}{kT} \qquad \qquad <\lambda > = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d_{\vartheta\phi}^2 \cdot P}$$

При нормальных условиях (T = 300~K и $P = 10^5~\Pi a$) для газа с $d_{adb} = 3 \cdot 10^{-10}$ м (азот):

$$<\lambda> = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 10^5} = 10^{-7} M$$

$$<\lambda> = \frac{kT}{\sqrt{2\pi \cdot d_{9\phi}^2 \cdot P}}$$

- 1.V = const => P/T= const, но диаметр слабо уменьшается с ростом температуры и $<\lambda>$ увеличивается.
- 2. P=const. С ростом температуры <λ> увеличивается практически пропорционально температуре.
- 3. T=const. С увеличением давления <λ> уменьшается.

Если $< \lambda >$ сравнима или больше размеров сосуда L в котором находится газ, то такое состояние газа называется вакуумом.



2. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Явления переноса — круг явлений в термодинамически неравновесных системах, в процессе которых происходит выравнивание параметров макроскопической системы, при этом система стремится к состоянию равновесия.

Процессы выравнивания сопровождаются направленным переносом ряда физических величин (массы, энергии, импульса и т.д.) и поэтому называются явлениями переноса.

К явлениям переноса в газах относятся

- А) диффузия,
- Б) внутреннее трение (вязкость),
- В) теплопроводность.

А) Диффузия – процесс переноса массы вещества молекулами за счет их хаотического движения при наличии градиента плотности (или концентрации молекул).

Диффузия имеет место в газах, жидкостях и твердых телах









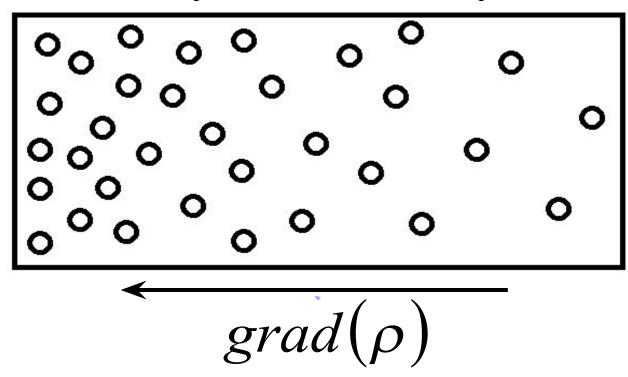
При диффузии масса переносится из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией, что приводит к ее равномерному распределению по занимаемому объему.

Математически диффузия описывается законом Фика

$$dm = -D\frac{d\rho}{dr}dS_{\perp} \cdot dt$$

Масса вещества dm, переносимая молекулами за время dt через площадку dS_{\perp} , расположенную перпендикулярно направлению переноса (оси r), прямо пропорциональна проекции градиента $\frac{d\rho}{dr}$ на направление быстрейшего возрастания плотности.

Молекулы газа в сосуде



перенос массы

Градиент (от лат. gradiens, род. падеж gradientis — шагающий) –вектор который указывает направление

шагающий) —вектор который указывает направление наискорейшего роста этой функции, и чей модуль равен скорости ее изменения в этом направлении.

А(х,у,z) – скалярная функция

$$grad(A) = \frac{\partial A}{\partial x} \stackrel{\boxtimes}{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \stackrel{\boxtimes}{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \stackrel{\boxtimes}{k}$$

$$dm = -D \frac{d\rho}{dr} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$A \to \rho$$

$$nepehoc массы \qquad \rho (r)$$

$$dm = -D\frac{d\rho}{dr}dS_{\perp} \cdot dt$$

Знак «—» показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (обратно направлению градиента плотности).

$$J = \frac{dm}{dS_{\perp}dt}$$
 —диффузионный поток через единицу площади в единицу времени (плотность потока массы)

$$J = -D\frac{d\rho}{dr}$$

D — коэффициент диффузии

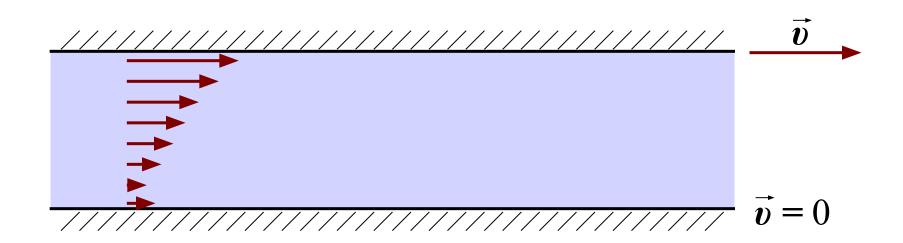
Согласно кинетической теории газов: $D = \frac{1}{3} < \upsilon > < \lambda >$

<υ> – средняя скорость молекул

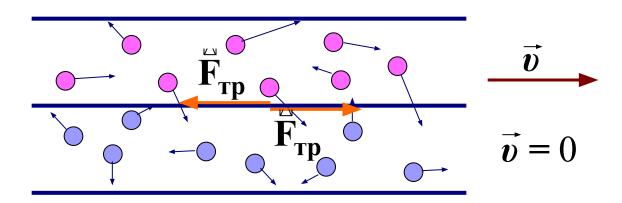
<>> − средняя длина свободного пробега молекул

$$[D] = \frac{M^2}{C}$$

Б) Внутреннее трение (вязкость) — возникновение силы внутреннего трения при взаимодействии между слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями.



Механизм возникновения внутреннего трения



- 1. При течении слоёв газа или жидкости с различными скоростями из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями.
- 2. Быстрый слой стремится ускорить более медленный и наоборот.
- 3. В результате возникают силы внутреннего трения, тормозящие движение быстрых слоев и ускоряющие движение медленных.

Вязкое трение в газе (жидкости) — это результат переноса импульса направленного движения слоев газа за счет хаотического движения при наличии в газе (жидкости) градиента скорости направленного движения.

Внутреннее трение подчиняется закону Ньютона:

$$dp = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} dS_{\perp} dt$$

Импульс направленного движения слоев газа dp, перенесенный молекулами за время dt через площадку dS_{\perp} , расположенную перпендикулярно направлению переноса (оси r), прямо пропорционален проекции градиента скорости направленного движения $\frac{dv}{dr}$ на направление быстрейшего возрастания скорости.

$$dp = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} dS_{\perp} dt$$

Знак «—» означает, что направление переноса импульса и направление возрастания скорости противоположны.

$$\stackrel{\mathbb{N}}{F} = \frac{dp}{dt} \longrightarrow F_{mp} = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} dS_{\perp}$$
 — сила терния действующая на площадку dS_{\perp} на границе раздела параллельно движу-щихся

$$\eta = \frac{1}{3} < \upsilon > < \lambda > \rho$$
 — динамическая вязкость (коэффициент вязкости)

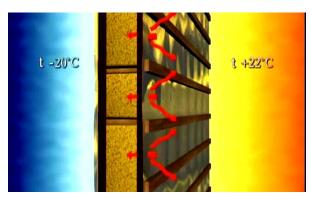
 ρ — плотность газа

$$[\eta] = \frac{\kappa z}{M \cdot c} = \Pi a \cdot c$$

В) Теплопроводность — процесс выравнивания температуры, сопровождающийся направленным переносом тепловой энергии из более нагретых слоев в менее нагретые за счет хаотического движения молекул.

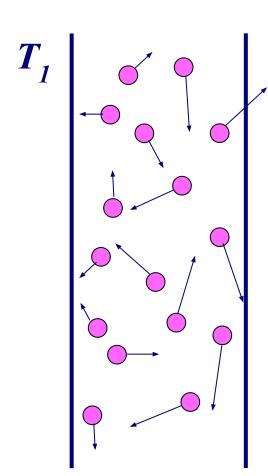


Рис. 1. Потери тепла через кладочные швы, выполненные на традиционном растворе





Механизм возникновения теплопроводности



 $T_2 > T_1$

- 1. Хаотично двигаясь, молекулы будут переходить из одного слоя газа (жидкости) в другой, перенося с собой энергию.
- 2. Это движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различную кинетическую энергию.
- 3. В результате кинетическая энергия быстрых слоев уменьшается, а медленных увеличивается.

При теплопроводности энергия в виде тепла переносится из мест с большей температурой в места с меньшей температурой, что приводит к ее вырвниванию.

Процесс теплопроводности описывается законом Фурье:

$$\delta Q = -\chi \frac{dT}{dr} dS_{\perp} \cdot dt$$

Элементарное количество тепла δQ , переносимое в стационарном процессе теплопроводности за время dt через площадку dS_{\perp} , перпендикулярную направлению переноса, прямо пропорционально $\frac{d\dot{O}}{dr}$ проекции градиента температуры \overline{dr} на направление быстрейшего возрастания температуры.

$$\delta Q = -\chi \frac{dT}{dr} dS_{\perp} \cdot dt$$

Знак «—» показывает, что при теплопроводности энергия переносится в сторону убывания температуры.

$$q = \frac{\delta Q}{dS_{\perp}dt}$$
 — тепло переносимое через единицу площади в единицу времени (тепловой поток)

$$q = -\chi \frac{dT}{dr}$$
 χ — коэффициент теплопроводности

Согласно кинетической теории газов:
$$\chi = \frac{1}{3}c_V \rho < V > < \lambda >$$

 $\boldsymbol{c}_{\scriptscriptstyle V}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$\left[\chi\right] = \frac{\kappa z \cdot M}{c^3 \cdot K} = \frac{Bm}{M \cdot K}$$

$$q = -\chi \frac{dT}{dr}$$

$$\chi = \frac{1}{3}c_V \rho < V > < \lambda >$$

В состоянии высокого вакуума:

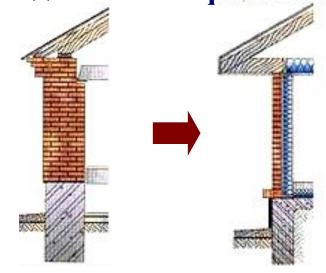
$$\chi \sim \rho$$



- **1** вакуум
- 2 стеклянная или металлическая колба

Коэффициенты теплопроводности материалов

Материал	Теплопроводность, Вт/(м·K)
Золото	320
Алюминий	202-236
Железо	92
Сталь	47
Стекло	1
Кирпич строительный	0.2-0.7
Газобетон	0.1-0.3
Дерево	0.15
Шерсть	0.05
Минеральная вата	0.045
Пенополистирол	0.04
Воздух (300 K, 100 кПа)	0.026
Аргон	0.0177
Вакуум (абсолютный)	0 (строго)



Панель толщиной в 12 *см* заменяет стену из кирпича в 2.1 *м*



Связь коэффициентов переноса с величинами, характеризующими движение молекул газа

$$D = \frac{1}{3} < \upsilon > < \lambda > \qquad \eta = \frac{1}{3} < \upsilon > < \lambda > \rho \qquad \chi = \frac{1}{3} c_V \rho < \upsilon > < \lambda > \rho$$

$$\eta = D \cdot \rho$$

$$\chi = D \cdot c_V \rho$$

$$\chi = c_V \cdot \eta$$

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \qquad \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d_{\vartheta \phi}^2 P} \qquad \rho = \frac{P \mu}{RT} \qquad c_V = \frac{iR}{2\mu}$$

$$D \sim rac{T\sqrt{T}}{P}$$

$$\chi \sim \sqrt{T}$$

$$\eta \sim \sqrt{T}$$