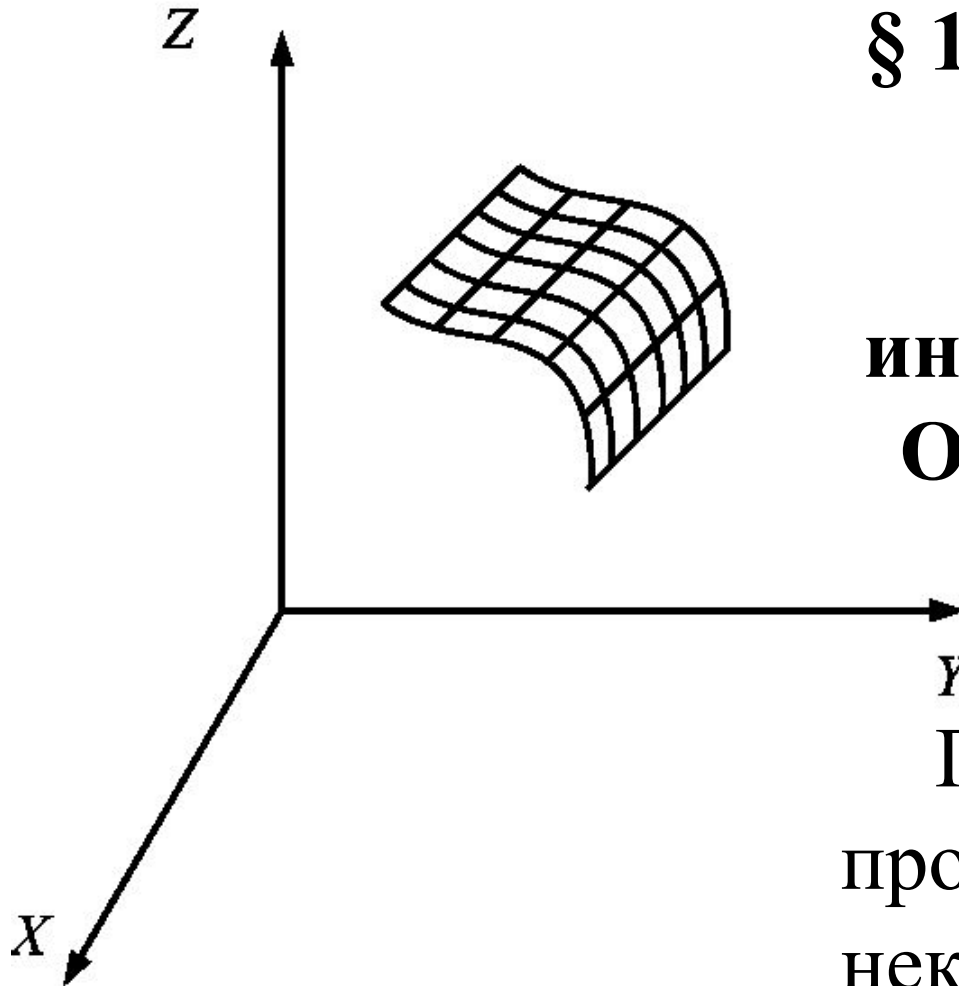


Лекция 29. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода, их свойства и вычисление. Связь между поверхностными интегралами 1 и 2 рода.

Поверхностные интегралы первого рода.



**§ 1. Задача, приводящая
к понятию
поверхностного
интеграла первого рода.
Определение. Теорема
существования.
Свойства.**

Пусть в трехмерном
пространстве XYZ задана
некоторая поверхность S .

На поверхности определена функция $f(x,y,z)$ – поверхностной плотности заряда.

Задача: найти заряд Q , который может находиться на поверхности S .

Для этого поверхность S разобьем на мелкие части $S_1, S_2, \dots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ и диаметрами разбиения $d_1, d_2, \dots, d_n$. В каждом из кусочков S_i возьмем точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ соответственно.

Найдем значение поверхностной плотности в этих точках: $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$.

Полный заряд, находящийся на поверхности

$$Q \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$$

Сам заряд – физическая величина и не зависит от способности от способа разбиения и выбора точек P_i , а зависит от размеров поверхности и от функции плотности заряда. Поэтому вводят понятие поверхностного интеграла 1-го рода.

Определение (поверхностного интеграла 1-го рода). Число I такое, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что из неравенствах $d_i < \delta_\varepsilon$ независимо от способа разбиения поверхности S и выбора точек $P_i \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \right| < \varepsilon$ называется поверхностным интегралом 1-го рода.

При этом само число I обозначается:

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$$

Поверхностный интеграл равен заряду на поверхности S .

$$Q = \iint_S f(x, y, z) dS$$

Теорема (существования). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в каждой точке поверхности S , то существует $\iint_S f(x, y, z) dS$

При этом говорят, что функция $f(x, y, z)$ интегрируема.

Свойства поверхностных интегралов 1-го рода.

Будем считать, что интегралы стоящие в правых частях записанных ниже выражений существуют. Тогда выполняются следующие свойства.

1. Однородность.

$$c = \text{const.} \quad \iint_S c \cdot f(x, y, z) dS = c \cdot \iint_S f(x, y, z) dS$$

2. Аддитивность относительно функции.

$$\begin{aligned} \iint_S [f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z)] dS &= \\ &= \iint_S f_1(x, y, z) dS \pm \iint_S f_2(x, y, z) dS \end{aligned}$$

3. Аддитивность относительно поверхностей.

$$\begin{aligned} \iint_{S_1 + S_2} f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{S_1} f(x, y, z) dS \pm \iint_{S_2} f(x, y, z) dS \end{aligned}$$

4. Если функция $f(x, y, z) \geq 0$ и интегрируема на поверхности S , то:

$$\iint_S f(x, y, z) dS \geq 0$$

5. Если функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то

$$\iint_S 1 dS = S_{\text{поверхности}}$$

6. Теорема о среднем. Если $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S , то существует такая точка $\tilde{P} \in S$, что:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = f(\tilde{P}) \cdot S_{\text{поверхности}}$$

§ 2. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Теорема (о вычисление криволинейного интеграла первого рода). Пусть $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S , которая:

1. Задана уравнением $z = z(x, y)$ и однозначно проектируется в $D \in XOY$.

2. Имеет непрерывные частные производные

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в области D . Тогда:

$$\iint_S f(x, y, z) dS =$$

$$= \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Доказательство.

Самостоятельно.

Замечание. В том случае, когда S однозначно проектируется в область D на плоскости XOZ и может быть выражена уравнением $y = y(x, z)$.
Формула для вычисления интеграла имеет вид:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_D f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz \end{aligned}$$

Если S однозначно проектируется в область D на плоскости YOZ и может быть выражена уравнением $x = x(y, z)$. Формула для вычисления интеграла имеет вид:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz \end{aligned}$$

Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода сводится к вычислению двойных интегралов по области D в которую проектируется поверхность S .

§ 3. Применение поверхностных интегралов первого рода.

1. Для вычисления площади поверхности

$$\iint_S dS = S_{\text{поверхности}}$$

2. Масса поверхности

$$m = \iint_S \mu(x, y, z) dS, \text{ где: } \mu(x, y, z) -$$

поверхностная плотность массы

3. Заряд на поверхности

$$Q = \iint_S q(x, y, z) dS, \text{ где: } q(x, y, z) -$$

поверхностная плотность заряда

4. Момент инерции поверхности относительно оси l .

$$J_l = \iint_S \mu(x, y, z) r^2(x, y, z) dS$$

где: $\mu(x, y, z)$ – поверхностная плотность массы,
 $r(x, y, z)$ – расстояние от оси l .

5. Координаты центра тяжести поверхности.

$$X_C = \frac{\iint_S \mu(x, y, z) x dS}{m} \quad Y_C = \frac{\iint_S \mu(x, y, z) y dS}{m}$$
$$Z_C = \frac{\iint_S \mu(x, y, z) z dS}{m}$$

где: m – масса поверхности.

§ 4. Ориентация поверхности. Ориентируемые поверхности.

Пусть в декартовой системе координат задана ограниченная поверхность S , такая что:

- 1) В каждой точке её существует касательная плоскость.
- 2) Она может быть задана функцией $z = z(x, y)$.
- 3) Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны.

Поверхности, обладающие свойством (3) называются гладкими поверхностями.

В силу задания поверхности каждой точкой $P_i \in S$, уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z_i = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_i (y - y_i)$$

Нормаль к касательной плоскости является и нормалью к поверхности S в точке P_i . При этом единичная нормаль к поверхности может быть записана:

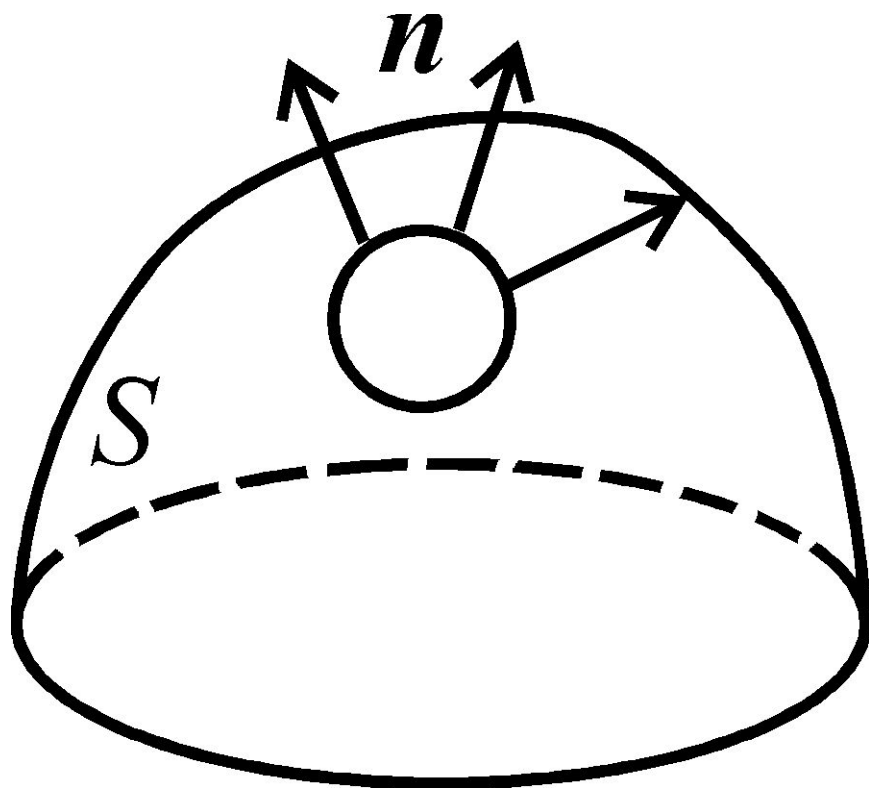
$$n = \frac{z'_x i + z'_y j - k}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Определение (ориентируемой поверхности).

Поверхность S , удовлетворяющая вышеуказанным свойствам, называется

ориентируемой, если обход по произвольному замкнутому контуру, лежащему на поверхности не меняет направление нормали.

При этом нормаль называют ориентацией поверхности.



- поверхность
ориентируемая

Ориентируемые поверхности называются двусторонними поверхностями.

Нормальными к поверхности являются нормали, находящиеся по формуле:

$$n_{\pm} = \pm \frac{z'_x i + z'_y j - k}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Знак «+» отвечает одной ориентации, «-» противоположной ориентации.

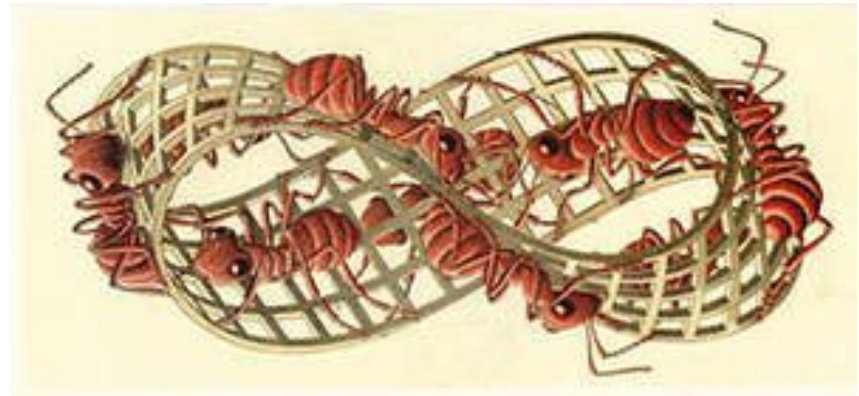
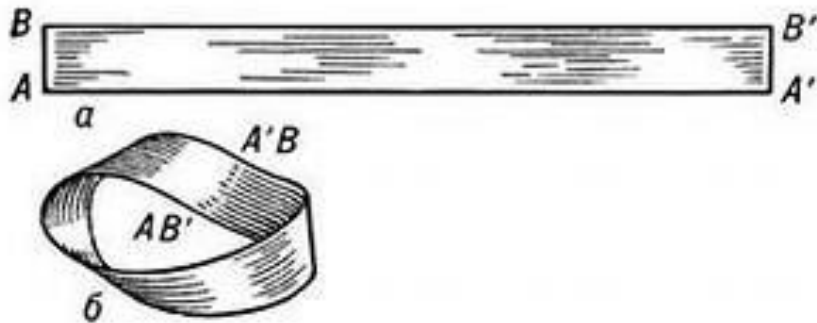
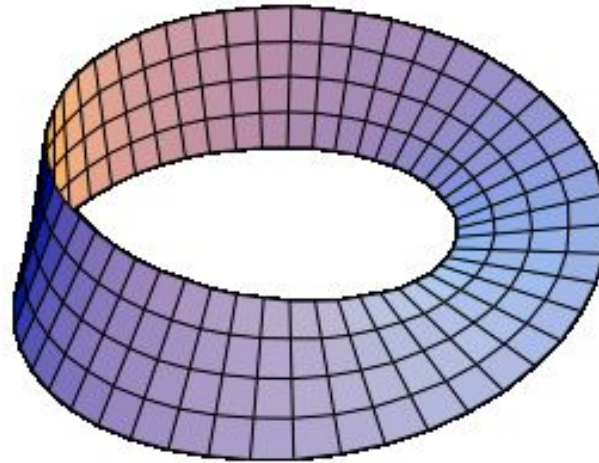
Замечая, что $|n| = 1$; $(n \cdot i) = |n||i| \cos \alpha$ легко видеть, что:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \pm \frac{z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \\ \cos \beta = \pm \frac{z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \\ \cos \gamma = \pm \frac{z'_z}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \end{array} \right.$$

где: α, β, γ - углы, которые составляет вектор нормали с осями координат x, y, z .

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы нормали.

Неориентируемые поверхности являются односторонними, например лист Мёбиуса. Эта поверхность не является ориентированной. Такого типа поверхности рассматривать не будем.



Лист Мёбиуса (лента Мёбиуса, петля Мёбиуса) — топологический объект, простейшая неориентируемая поверхность с краем, односторонняя при вложении в обычное трёхмерное Евклидово пространство. Попасть из одной точки этой поверхности в любую другую можно, не пересекая края.

Лента Мёбиуса была открыта независимо немецкими математиками Августом Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Бенедиктом Листингом в 1858 году. Модель ленты Мёбиуса может легко быть сделана: для этого надо взять достаточно вытянутую бумажную полосу и соединить концы полосы, предварительно перевернув один из них. В Евклидовом пространстве существуют два типа полос Мёбиуса в зависимости от направления закручивания: правые и левые (топологически они, однако, неразличимы).

Уравнения $x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u$, $y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u$, $z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}$, где $0 \leq u < 2\pi$ и $-1 \leq v \leq 1$. Эти формулы задают ленту Мёбиуса ширины 1, чей центральный круг имеет радиус 1, лежит в плоскости $x - y$ с центром в $(0,0,0)$. Параметр u пробегает вдоль ленты, в то время как v задает расстояние от края. В цилиндрических координатах (r, θ, z) , неограниченная версия листа Мёбиуса может быть представлена уравнением:

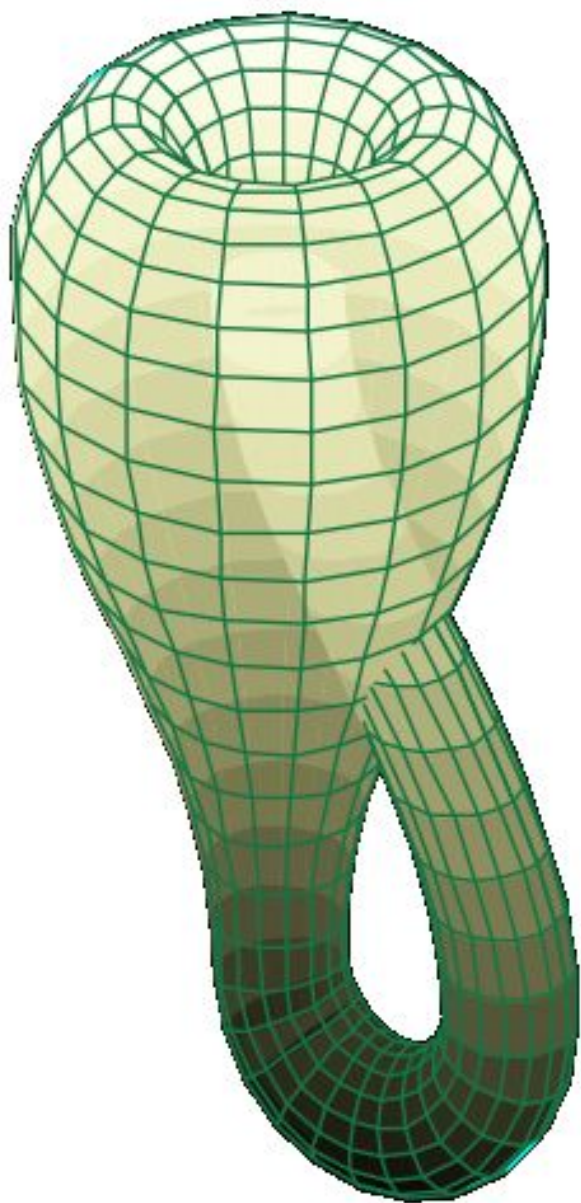
$$\log r \sin(\theta/2) = z \cos(\theta/2),$$

где функция логарифма имеет произвольное основание.

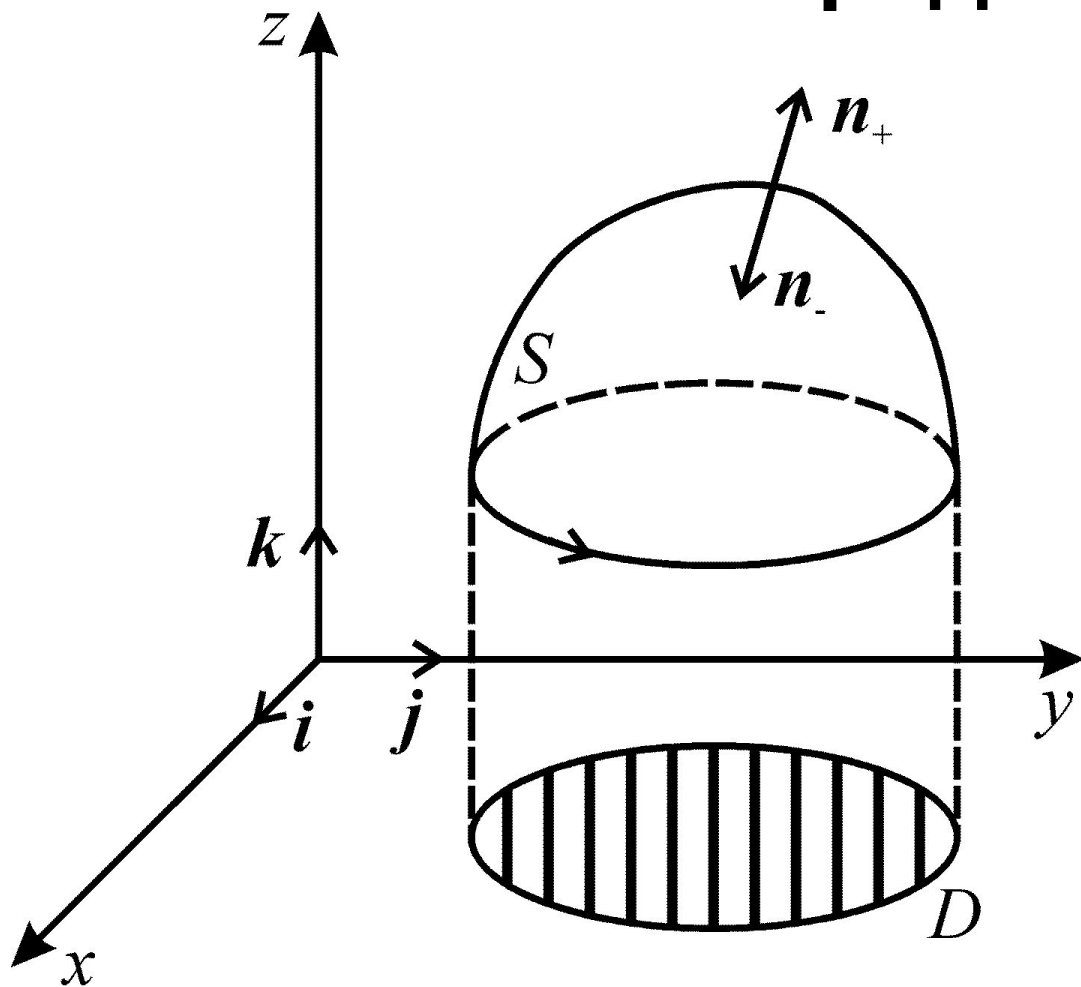
Бутылка Клейна — неориентируемая (односторонняя) поверхность, впервые описанная в 1882 г. немецким математиком Ф. Клейном. Она тесно связана с лентой Мёбиуса и проективной плоскостью. Название, по-видимому, происходит от неправильного перевода немецкого слова Fläche (поверхность), которое в немецком языке близко по написанию к слову Flasche (бутылка); затем это название вернулось в таком виде в немецкий.

Чтобы построить модель бутылки Клейна, понадобится бутылка с двумя дополнительными отверстиями: в доньшке и в стенке. Горлышко бутылки нужно вытянуть, изогнуть вниз, и продев его через отверстие в стенке, присоединить к отверстию на дне бутылки. Для настоящей бутылки Клейна в четырёхмерном пространстве отверстие в стенке не нужно, но без него нельзя обойтись в трёхмерном евклидовом пространстве.

В отличие от обыкновенного стакана, у этого объекта нет «края», где бы поверхность резко заканчивалась. В отличие от воздушного шара можно пройти путь изнутри наружу не пересекая поверхность (то есть на самом деле у этого объекта нет «внутри» и нет «снаружи»).



Поверхностные интегралы второго рода.



§ 5. Определение поверхностного интеграла второго рода.

Пусть в
трехмерном
пространстве в
декартовой
системе
координат XYZ

задана поверхность S , обладающая свойствами:

- 1) ограниченная, гладкая, ориентируемая
- 2) однозначно проектируется в область D на плоскости XOY .
- 3) имеющая уравнение: $z = z(x, y)$.

В силу ориентируемости поверхности S , каждой стороне поверхности можно поставить нормаль

$$\vec{n}_{\pm} = \pm \frac{-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Сторону поверхности, отвечающую нормали $\vec{n}_+$ обозначают S_+ , $\vec{n}_- \rightarrow S_-$.

Заметим, что нормали $\mathbf{n}_+$ и $\mathbf{n}_-$ составляют с осью z острые и тупые углы соответственно.

Направление нормали $\mathbf{n}$ согласовано с положительным обходом края поверхности S и её проекции D по правилу буравчика.

Определение (поверхностных интегралов второго рода). Символы

$$\iint_{S_+} f(x, y, z) dx dy \quad \& \quad \iint_{S_-} f(x, y, z) dx dy$$

называются поверхностными интегралами второго рода и задаются формулами:

$$\iint_{S_+} f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos \left(\hat{\mathbf{n}, \mathbf{k}} \right) dS$$

$$\iint_{S_-} f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos \left(-\overset{\Delta}{n}, \overset{\Delta}{k} \right) dS$$

где: $\overset{\Delta}{n}, \overset{\Delta}{k}$ и $-\overset{\Delta}{n}, \overset{\Delta}{k}$ - углы между направлением нормали $\overset{\Delta}{n}$ и единичным вектором $\overset{\Delta}{k}$, нормали $-\overset{\Delta}{n}$ и единичным вектором $\overset{\Delta}{k}$.

Таким образом, поверхностные интегралы второго рода определяются через поверхностные интегралы первого рода с учетом ориентации поверхности. Учет ориентации поверхности производится направляющими косинусами нормали.

Если поверхность однозначно проектируется на плоскость XOZ или YOZ и удовлетворяет перечисленным свойствам, можно ввести следующие поверхностные интегралы второго рода:

$$XOZ: \iint_S f(x, y, z) dx dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \left(\vec{n}, \vec{j} \right) dS$$

$$YOZ: \iint_S f(x, y, z) dx dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \left(\vec{n}, \vec{j} \right) dS$$

Если поверхность однозначно проектируется на все три плоскости, то имеет место обобщенный интеграл второго рода.

В силу определения поверхностных интегралов для каждой координатной поверхности можно получить, что обобщенный интеграл связан с поверхностным интегралом первого рода формулой:

$$\iint_S P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dz dx =$$

$$= \iint_S \left[P(x, y, z) \cos \left(\vec{n}, \vec{k} \right) + Q(x, y, z) \cos \left(\vec{n}, \vec{i} \right) + \right.$$

$$\left. + R(x, y, z) \cos \left(\vec{n}, \vec{j} \right) \right] dS =$$

$$= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

где: P, Q, R – функции, непрерывные на поверхности S .

§ 6. Свойства поверхностных интегралов второго рода.

Свойства такие же, как и у поверхностных интегралов первого рода. Кроме того, они обладают специфическими свойствами:

1. Пусть функция $f(x, y, z)$ и поверхность S таковы, что поверхностный интеграл второго рода существует. Тогда:

$$\iint_{S_+} f(x, y, z) dx dy = - \iint_{S_-} f(x, y, z) dx dy$$

2. Если поверхность S такова, что её образующая параллельна оси z , то:

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = 0$$

§ 7. Вычисление поверхностных интегралов второго рода.

Пусть поверхность S удовлетворяет сформулированным выше свойствам:

- 1) ограниченная, гладкая, ориентируемая
- 2) однозначно проектируется в область D на плоскости XOY .
- 3) имеющая уравнение: $z = z(x, y)$.

Считаем, что на S определена непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тогда поверхностный интеграл второго рода вычисляется так:

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

Знак «+» берется, если S — положительно ориентированная поверхность (нормаль составляет острый угол с осью z).

Знак «-» берется, если S — отрицательно ориентированная поверхность (нормаль составляет тупой угол с осью z).

Доказательство.

Самостоятельно.

Аналогично формулы могут быть записаны для поверхностных интегралов 2-го рода для координатных плоскостей YOZ и XOZ .