



ГЕОМЕТРИЯ.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕТРАДЬ.

8 класс

□ Четырёхугольники

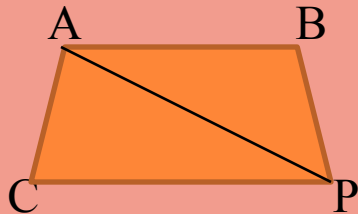


МНОГОУГОЛЬНИКИ

О: Многоугольником называется простая замкнутая ломаная



О: Выпуклым многоугольником называется многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, проведённой через две его соседние вершины.



О: Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника

AP - диагональ

Теорема о сумме углов выпуклого n - угольника

Т: Сумма углов выпуклого многоугольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$

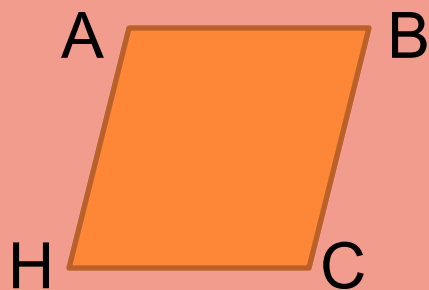
$$n=3 \quad 180^\circ$$

$$n=4 \quad 360^\circ$$



ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

О: параллелограммом называется четырёхугольник, стороны которого попарно параллельны.

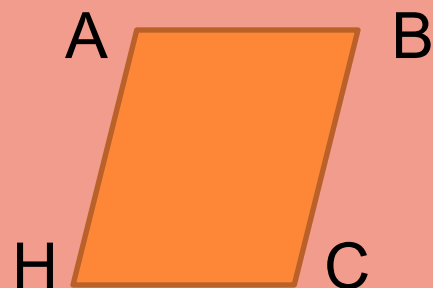


$AB \parallel CH$
 $BC \parallel HA$



СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1. Т: В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны



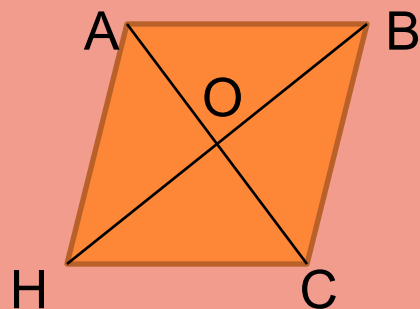
$$AB = CH$$

$$BC = HA$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\angle B = \angle H$$

2. Т: В параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам



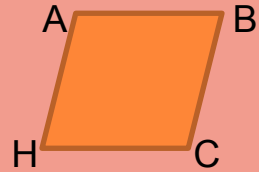
$$AO = CO$$

$$BO = HO$$



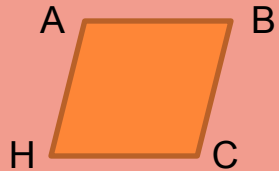
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1.Т:Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то он является параллелограммом



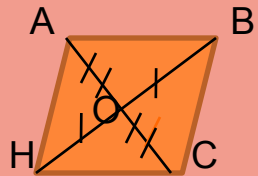
$$\begin{array}{l} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{array} \Rightarrow ABCD - \text{парал-м}$$

2.Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то он является параллелограммом



$$\begin{array}{l} AB=CD \\ AD=BC \end{array} \Rightarrow ABCD - \text{парал-м}$$

2.Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом

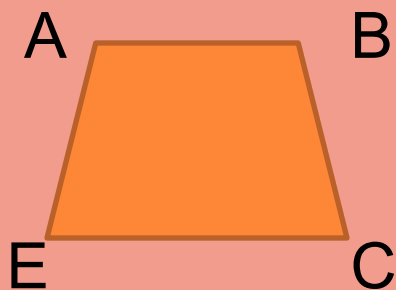


$$\begin{array}{l} AO=OC \\ BO=OD \end{array} \Rightarrow ABCD - \text{парал-м}$$



ТРАПЕЦИЯ

О: Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.



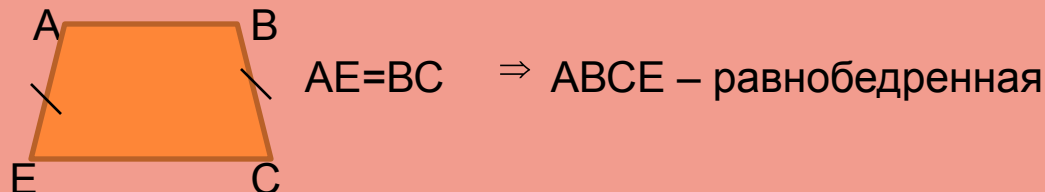
$AB \parallel CE$ - основания

$BC \nparallel EA$ - боковые стороны



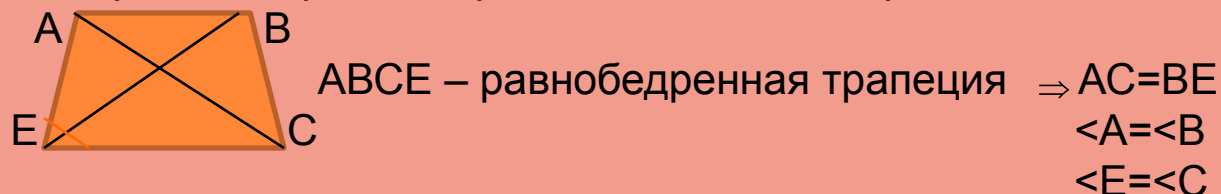
Виды трапеций

О: Равнобедренной трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны.

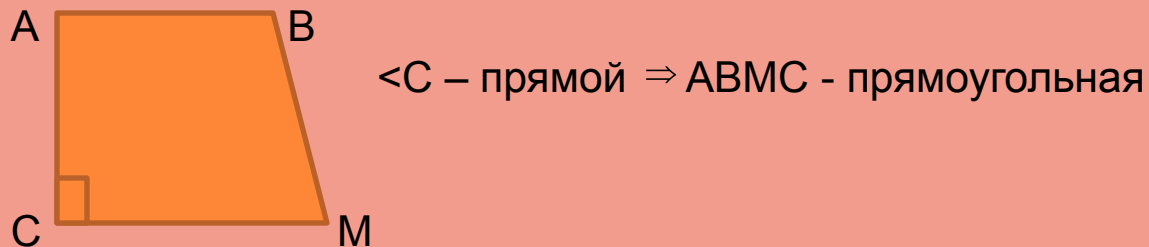


Свойства равнобедренной трапеции:

1. Т:В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны
2. Т:В равнобедренной трапеции диагонали равны

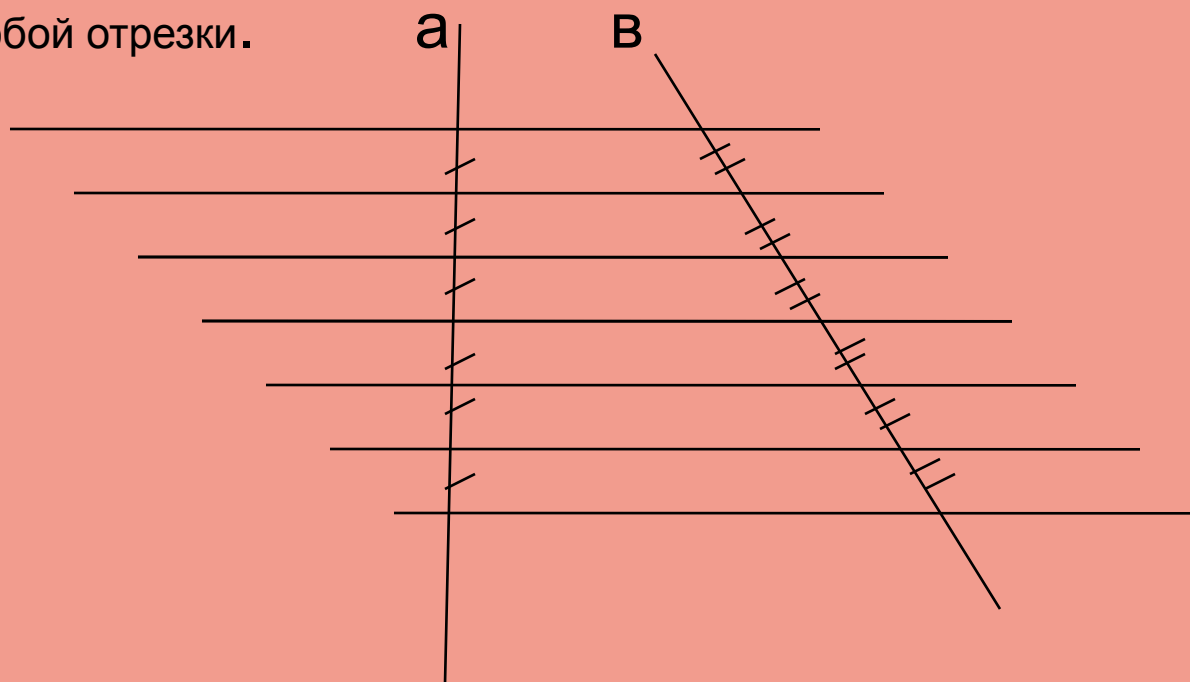


О: Прямоугольной трапецией называется трапеция, у которой один из углов прямой.



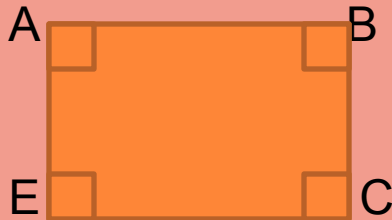
ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Т: Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



ПРЯМОУГОЛЬНИК

О: прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

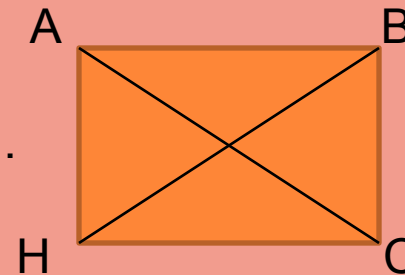


Обладает всеми свойствами пар-ма

Особое свойство прямоугольника:

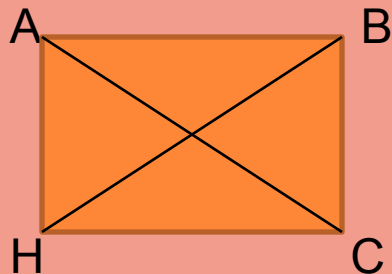
Т: в прямоугольнике диагонали равны.

$$AC=BN$$



Признак прямоугольника:

Т: Если в параллелограмме диагонали равны, то он является прямоугольником.

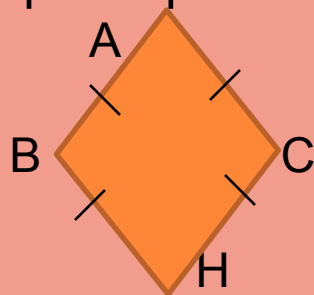


$$AC=BN \Rightarrow ABCH - \text{прямоугольник}$$



Ромб

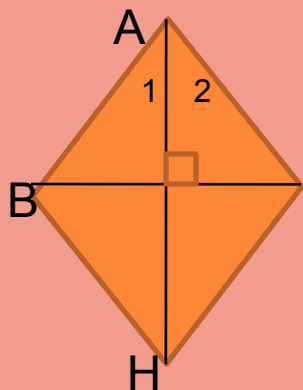
О: ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.



Обладает всеми свойствами пар-ма

Особое свойство ромба:

Т: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

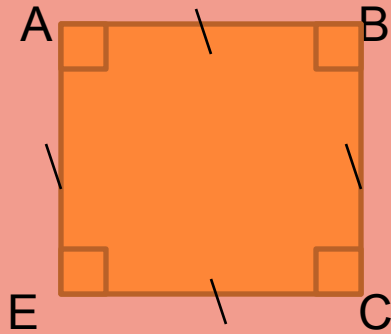


ABHC – ромб $\Rightarrow$ $AN \perp BC$, $\angle 1 = \angle 2$ и т. д.



КВАДРАТ

О: Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

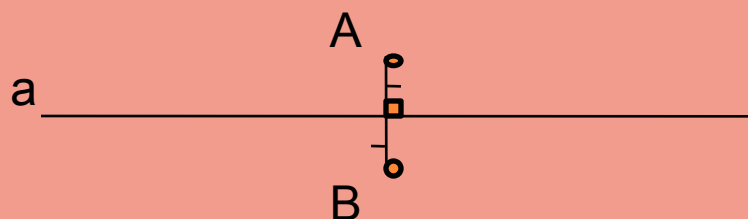


Обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.



ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

О: Две точки A и B называются симметричными относительно прямой a , если эта прямая проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему

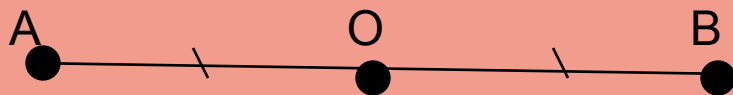


Прямая a - ось симметрии.



ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

О: Две точки А и В называются симметричными относительно точки О, если О – середина отрезка АВ



Точка О- центр симметрии.



□ Площадь



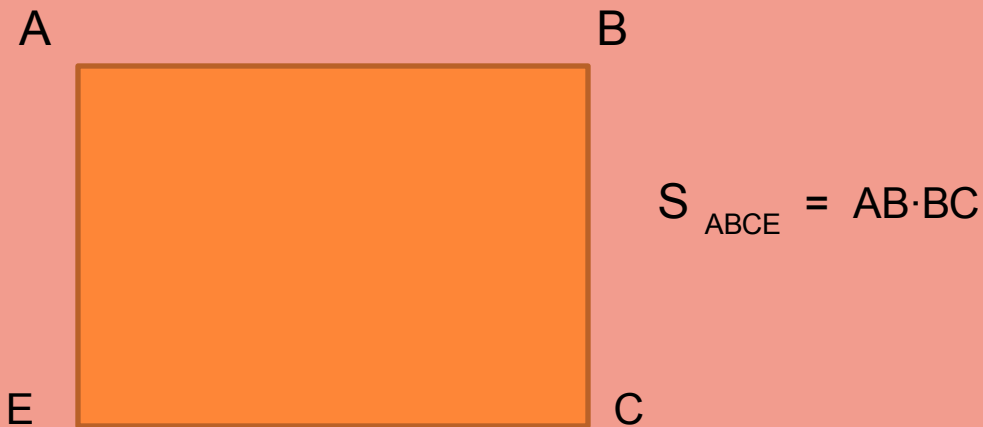
СВОЙСТВА ПЛОЩАДЕЙ

1. Т: Равные многоугольники имеют равные площади
- 2.Т: Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
- 3.Т: Площадь квадрата равна квадрату его стороны.



Площадь прямоугольника

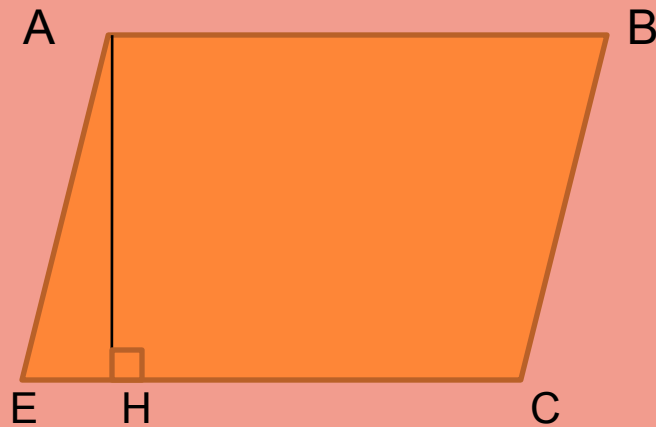
Т: Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.



ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

О: Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведённый из любой точки стороны к прямой, содержащей противоположную сторону.

Т: Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

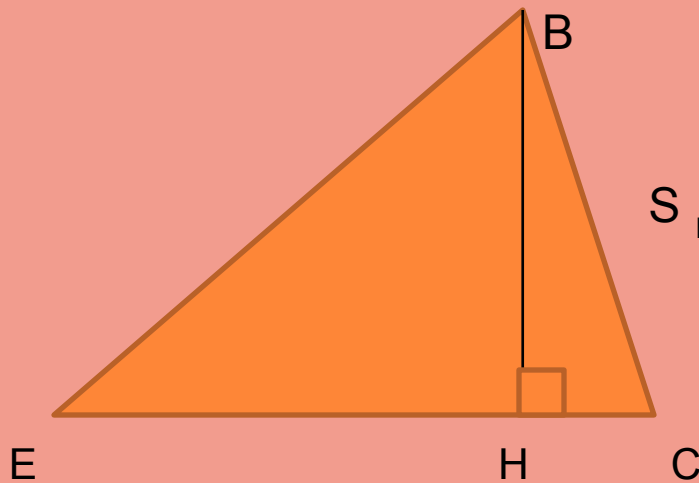


$$S_{ABCE} = AH \cdot EC$$



ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Т: Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

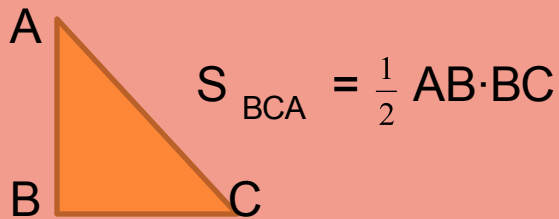


$$S_{\text{BCE}} = \frac{1}{2} \text{HB} \cdot \text{EC}$$

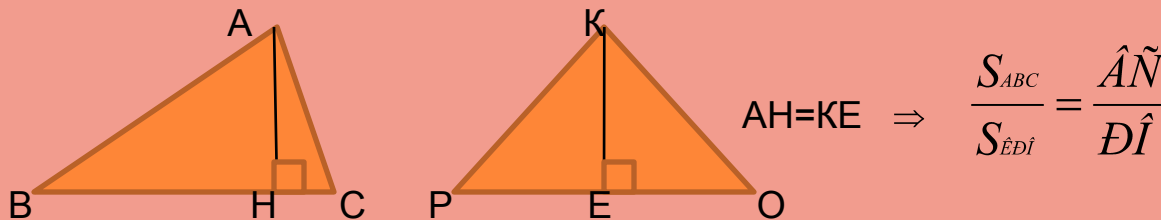


СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

1.Т: Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.



2. Т:Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.



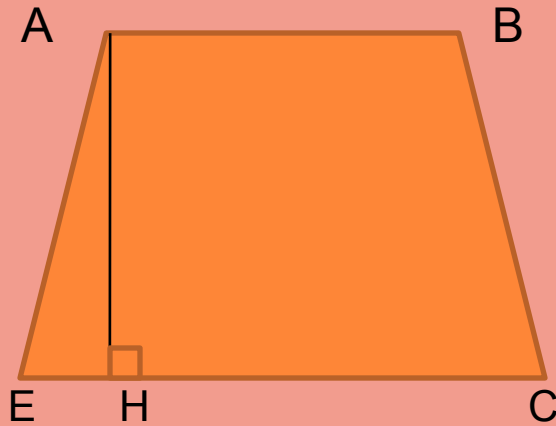
3. Т: Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

См. предыд. рис. Если $\angle A = \angle K$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{\hat{E}\hat{D}\hat{I}}} = \frac{\hat{A}\hat{A} \cdot \hat{A}\hat{N}}{\hat{D}\hat{E} \cdot \hat{E}\hat{I}}$



ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Т: Площадь трапеции равна половине произведения суммы её оснований на высоту.

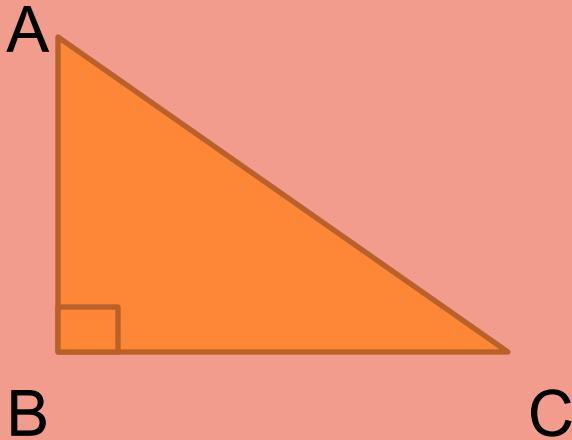


$$S_{ABCE} = \frac{1}{2} (AB + EC) \cdot AH$$



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

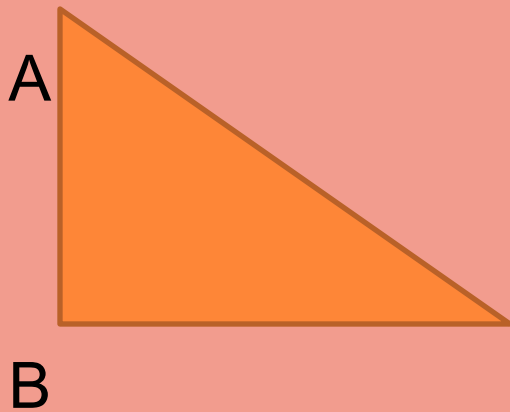


$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



ТЕОРЕМА , ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЕ ПИФАГОРА

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный



$$\text{Если } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

то треугольник ABC – прямоугольный.



□ Подобные треугольники



ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

О: Отношением отрезков АВ и НЕ называется

отношение их длин. $\frac{\overline{AB}}{\overline{NE}}$

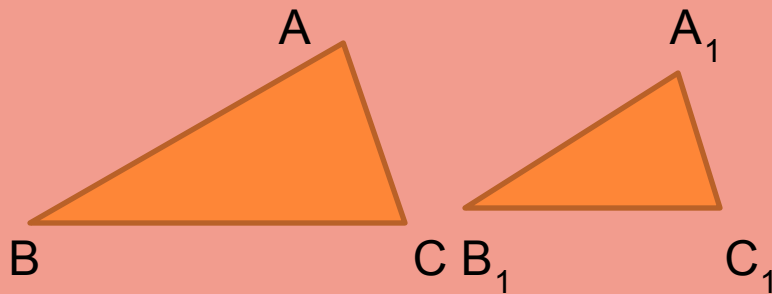
О: Отрезки АВ и НЕ называются пропорциональными

отрезкам ОК и ХУ , если $\frac{\overline{AB}}{\overline{NE}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{HU}}$



ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

О: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A_1 \\ \angle B &= \angle B_1 \\ \angle C &= \angle C_1 \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$

К- коэффициент подобия



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

1.Т: Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$$

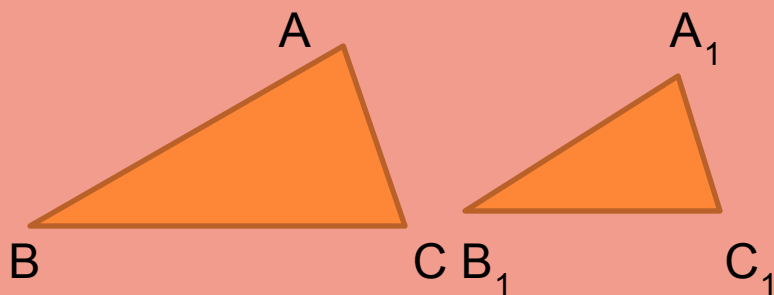
2. Т: Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$$



Первый признак подобия треугольников.

Т: если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.



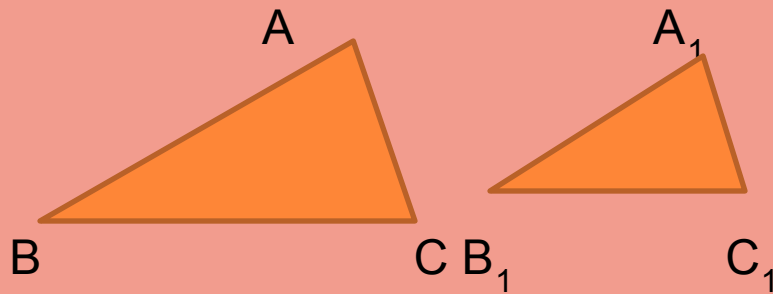
$$\begin{aligned} \angle B &= \angle B_1 \\ \angle C &= \angle C_1 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



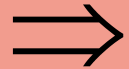
ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Т:если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники являются подобными.



$$\angle B = \angle B_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

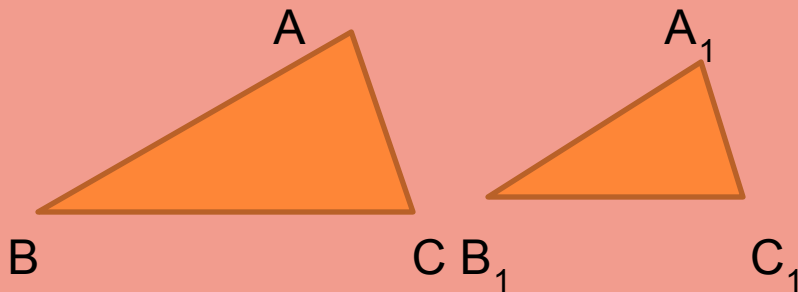


$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Т:если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow$$

$\sim$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

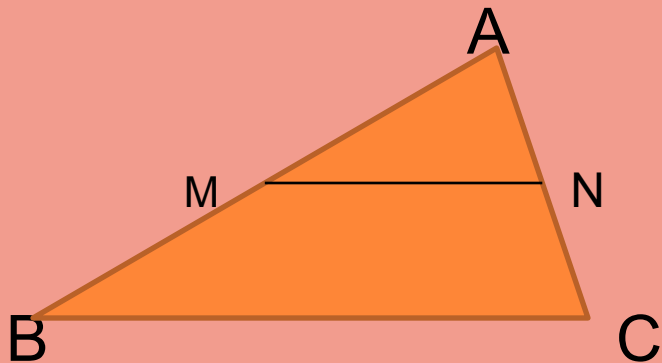


СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

О: Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон

Свойство средней линии

Т: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны



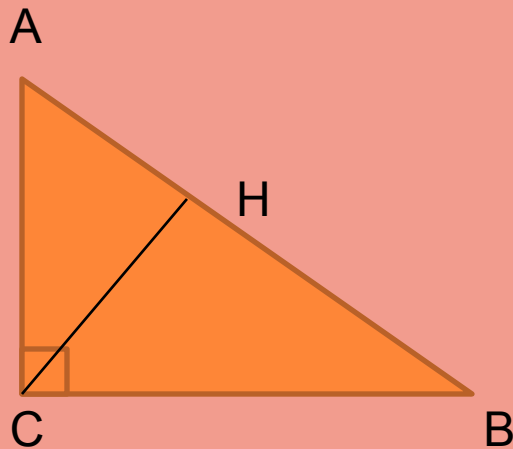
MN – средняя линия Δ

$MN \parallel BC$

$MN = 0,5 BC$



ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



1. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой

$$\tilde{CH} = \sqrt{AH \cdot HB}$$

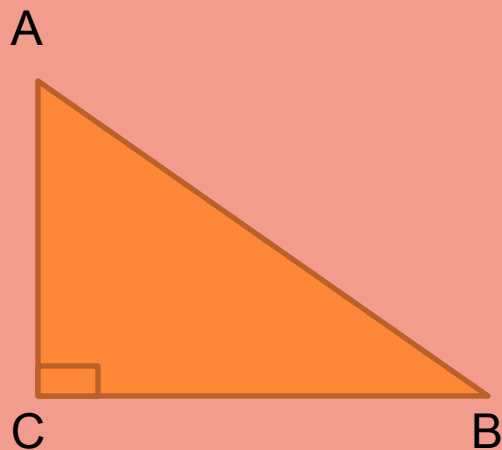
2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла

$$\tilde{AC} = \sqrt{AH \cdot AB}$$

$$\tilde{BC} = \sqrt{HB \cdot AB}$$



СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



О: синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \cos B$$

О: косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \sin B$$

О: тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$



СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

3. Если сумма двух углов равна 90° , то синус одного равен косинусу другого, а их тангенсы обратны.
(например, у двух острых углов одного прямоугол. треугольника)

4. Если сумма двух углов равна 180° , то их синусы равны, а тангенсы и косинусы противоположны
(например, у двух смежных углов)



СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Чтобы найти катет прямоугольного треугольника, можно:

1. Гипотенузу умножить на синус угла, противолежащего катету
2. Гипотенузу умножить на косинус угла, прилежащего катету
3. Другой катет умножить на тангенс угла, противолежащего искомому катету

Чтобы найти гипотенузу прямоугольного треугольника, можно:

1. Катет разделить на синус угла, противолежащего катету
2. Катет разделить на косинус угла, прилежащего катету



Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



□ Окружность



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Пусть есть окружность с центром O и радиусом R и прямая p . Проведём перпендикуляр из точки O к прямой p и обозначим его d .

1. Если $d > R$ то прямая и окружность не имеют общих точек.

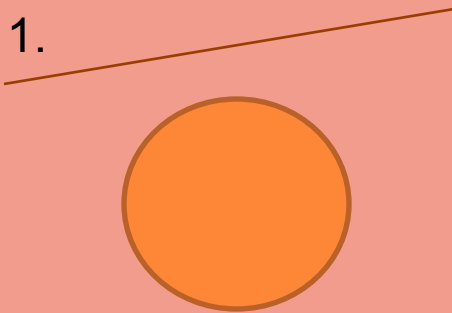
2. Если $d < R$ то прямая и окружность имеют две общие точки.

О: Прямая, имеющая с окружностью две общие точки называется секущей по отношению к окружности.

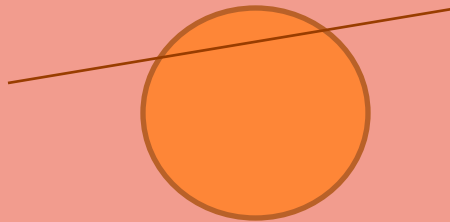
3. Если $d = R$ то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

О: Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку называется касательной к окружности.

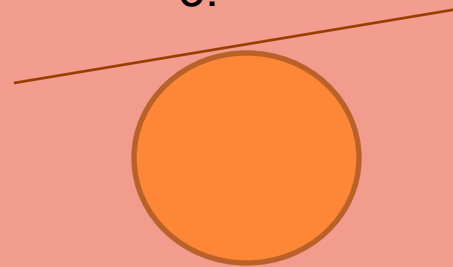
1.



2.



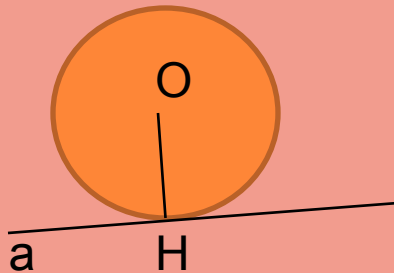
3.



КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

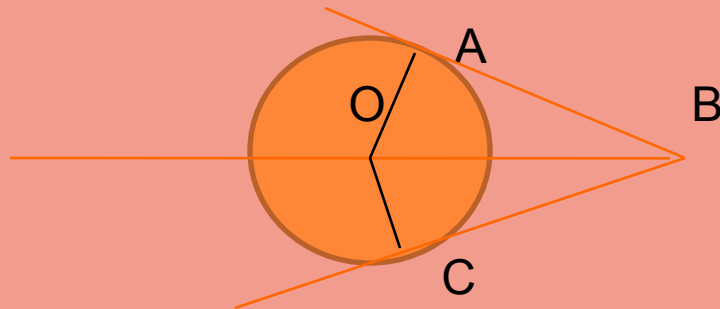
Свойства касательной:

1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.



$OH \perp a$
 a – касательная, H – точка касания

2. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



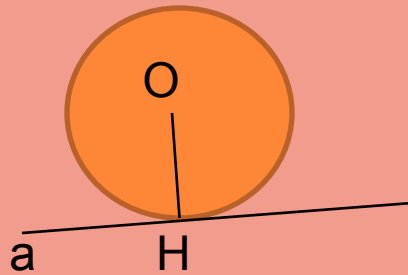
$AB = BC, \angle ABO = \angle CBO$



КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Признак касательной:

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.



если $OH \perp a$, то a – касательная к окружности



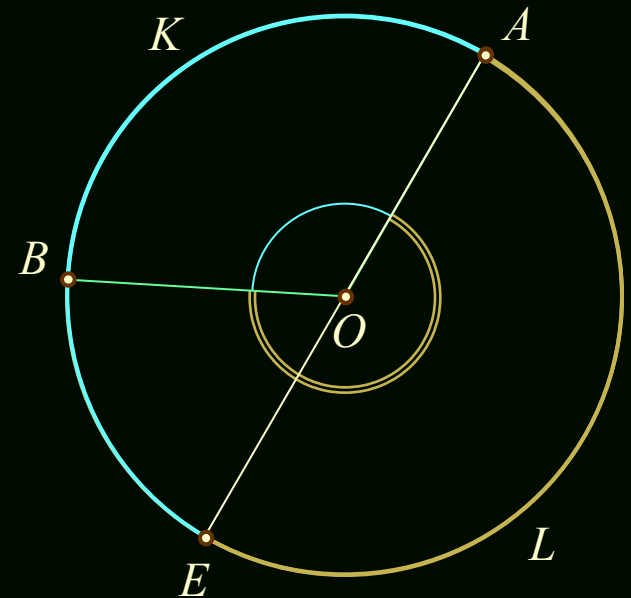
Градусная мера дуги окружности

О: Дугой называется часть окружности, ограниченная двумя точками.

Две точки A и B окружности разбивают ее на две дуги: $\cup AKB$, $\cup ALB$; краткое обозначение: $\cup AB$.

О: Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности

Дуга AE – полуокружность



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ

О: Центральным углом называется угол, вершина которого находится в центре окружности

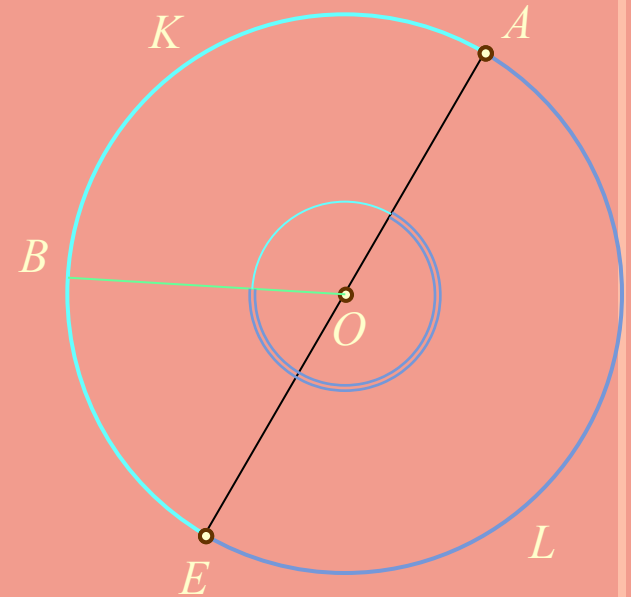
$\angle AOB$ - центральный

Градусная мера дуги, меньшей полуокружности, равна градусной мере соответствующего центрального угла.

$\cup AKB = \angle AOB$

Градусная мера дуги, большей полуокружности, равна 360° минус градусная мера соответствующего центрального угла.

$\cup ALB = 360^\circ - \angle AOB$



Вписанный угол

О: Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности

$\angle EAB$ – вписанный угол

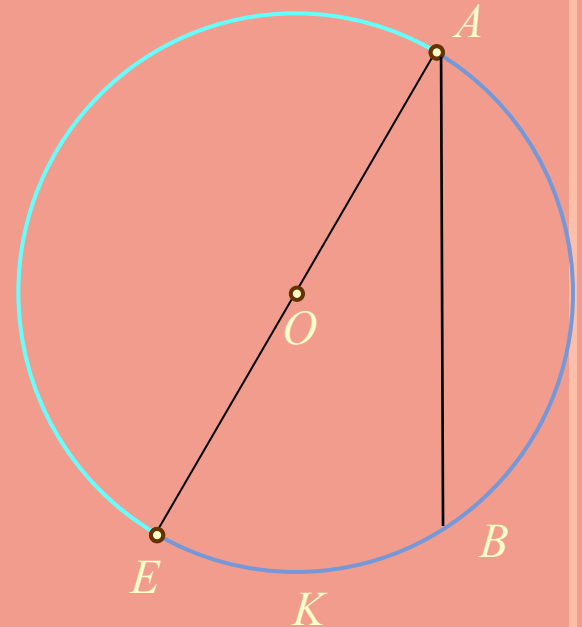
Свойство вписанного угла

Т: Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается

$$\angle EAB = 0,5 \cup EKB$$

Следствия:

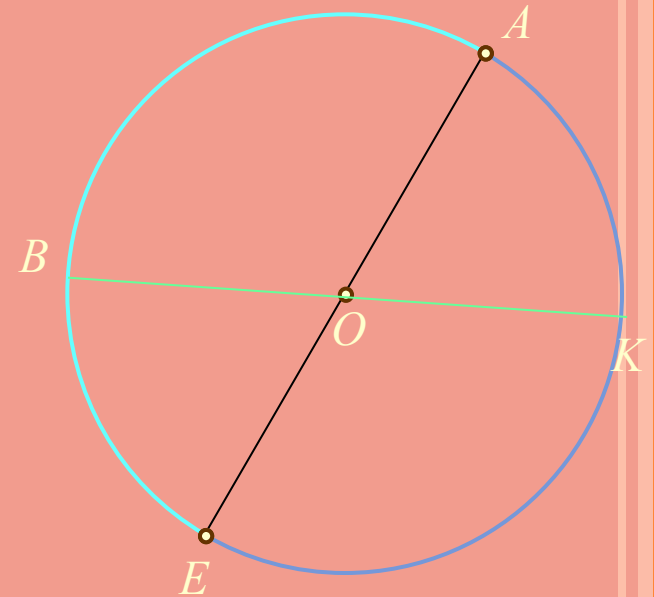
1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.
2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой



СВОЙСТВО ХОРД

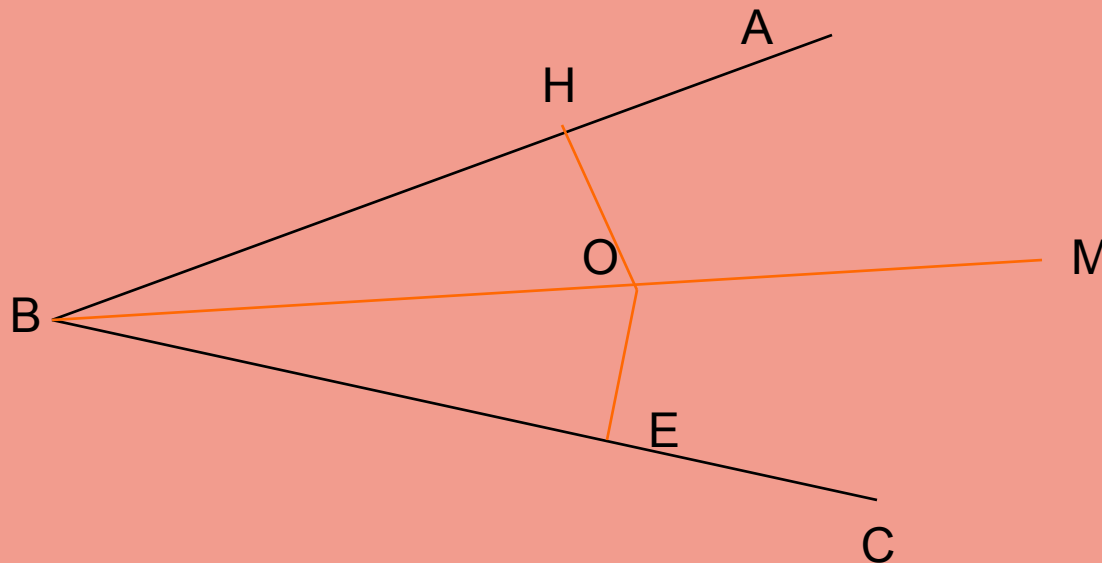
Т: если две хорды окружности
пересекаются, то произведение отрезков
одной хорды равно произведению
отрезков другой хорды

$$BO \cdot OK = AO \cdot OE$$



СВОЙСТВО БИСSEKTRИСЫ УГЛА

Т: Каждая точка биссектрисы
неразвёрнутого угла равноудалена от
его сторон. Каждая точка, лежащая
внутри угла и равноудалённая от
сторон угла, лежит на его биссектрисе



BM – биссектриса
 $\angle ABC$
 $OH = OE$

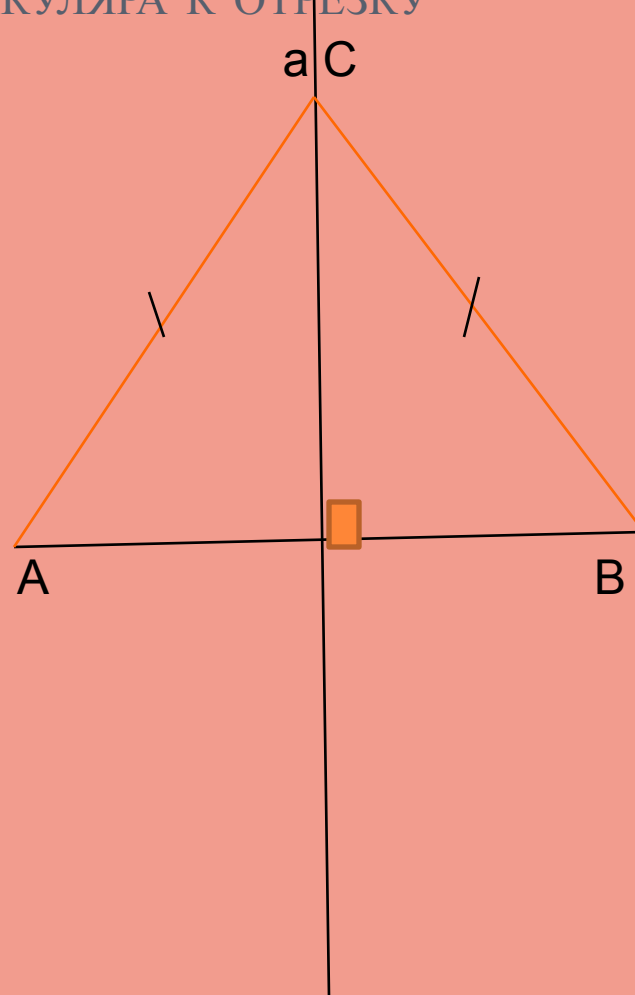


СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ

О:Серединным перпендикуляром отрезка называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему

Т:Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов отрезка. Каждая точка равноудалённая от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре.

а – серединный перпендикуляр
к отрезку АВ
 $AC=CB$



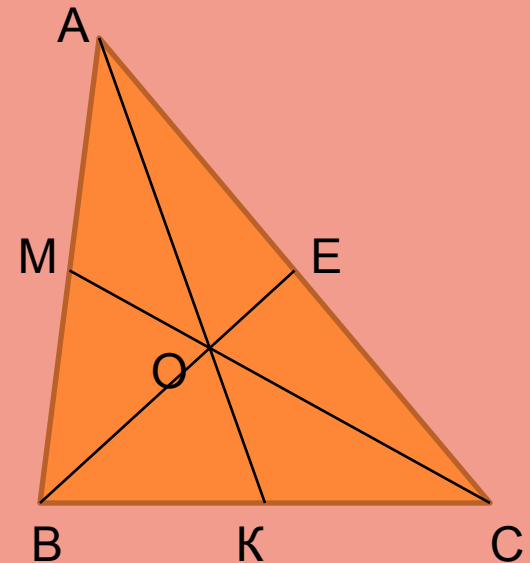
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Свойство медиан треугольника:

Т: Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1 считая от вершины треугольника

AK, CM, BE – медианы

$AO:OK=BO:OE=CO:OM=2:1$

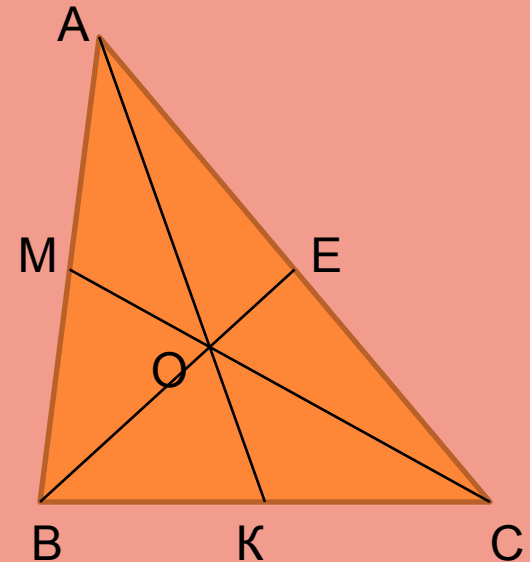


ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Свойство биссектрис треугольника:

Т: Биссектрисы треугольника
пересекаются в одной точке и эта
точка равноудалена от всех сторон
треугольника

AK, CM, BE – биссектрисы
O равноудалена от AB, BC, AC



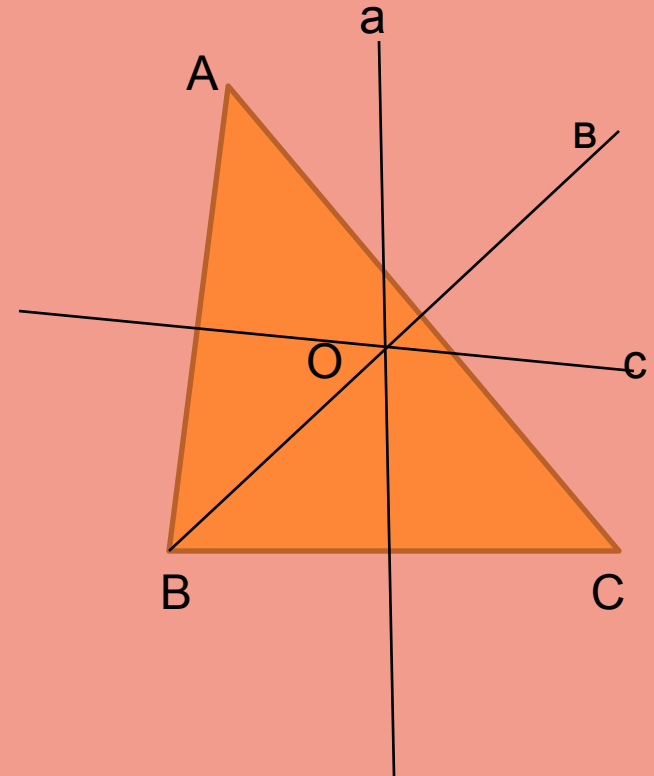
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Свойство серединных перпендикуляров к
сторонам треугольника:

Т:Серединные перпендикуляры к
сторонам треугольника пересекаются
в одной точке и эта точка
равноудалена от всех вершин
треугольника

a, b, c – серединные перпендикуляры

$$OA = OB = OC$$

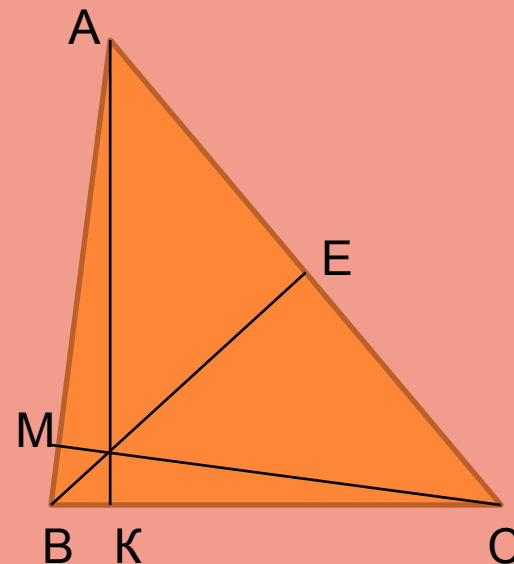


ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Свойство высот треугольника:

Т: Высоты треугольника пересекаются в одной точке

АК, СМ, ВЕ – высоты



ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

О: Окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности, если все стороны многоугольника касаются окружности.

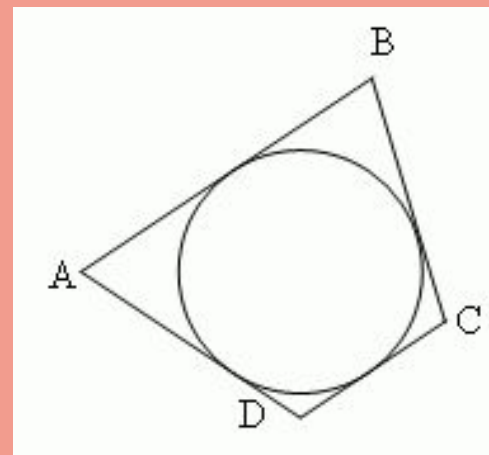
Теорема об окружности, вписанной в треугольник

Т: В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну

Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения биссектрис треугольника.

Теорема об окружности, вписанной в четырехугольник

Т: В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны



ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

О: Окружность называется описанной вокруг многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность, если все вершины многоугольника лежат на окружности.

Теорема об окружности, описанной около треугольника

Т: около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну

Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема об окружности, описанной около четырехугольника

Т: В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°

