Физика конденсированного состояния

Литература

Основная

1. **Крюков А.П.** Элементы физической кинетики: учебное пособие. М.: МЭИ, 1995.
2. **Крюков А.П.** Элементы гидродинамики и теплопереноса в гелии II: учебное пособие. М.: МЭИ, 2004.
3. **Дмитриев А.С.** Основы криофизики конденсированных систем: учебное пособие. М.: МЭИ, 2006.

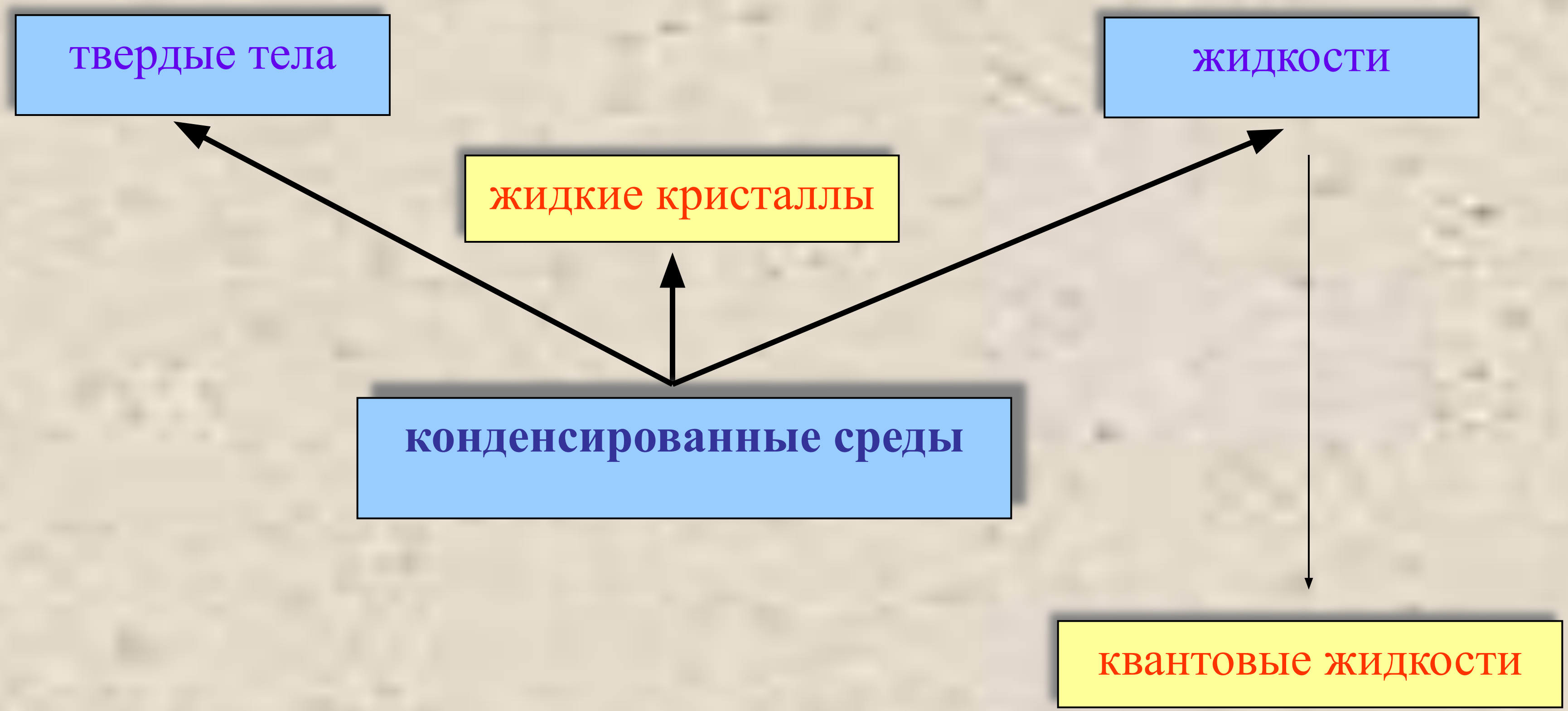
Физика конденсированного состояния

Литература

Дополнительная

1. **Коган М.Н.** Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
2. **Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** Физическая кинетика. Сер. Теоретическая физика. Т.10. М.: Наука, 1979
3. **Аристов В. В. , Черемисин Ф.Г.** Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: ВЦ РАН, 1992.
4. **Крюков А.П., Левашов В.Ю., Шишкова И.Н., Ястребов А.К.** Численное решение кинетического уравнения Больцмана в инженерной практике: учебное пособие. М.: МЭИ, 2005.
5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.** Сер. Теоретическая физика. Т.6. М.: Наука, 1988 (глава XVI, стр.706-730).
6. **Халатников И.М.** Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
7. **Паттерман С.** Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978.
8. **Киттель Ч.** Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
9. **Займан Дж.** Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.

Физика конденсированного состояния



Физика конденсированного состояния (ФКС)

Занимается фундаментальным изучением различных конденсатов.

Предмет ФКС – свойства конденсированных сред и процессы в них.

Лауреаты Нобелевской премии в области физики низких температур

Имя	Год открытия	Год награждения
Ландау Л.Д.	1941	1962
Капица П.Л.	1938 (39)	1978
Ли Д., Ошерофф Д., Ричардсон Р.	1972	1996
Беднорц Г., Мюллер А.	1986	1987
Корнелл Э., Вайман К., Кеттерли В.	1995	2001
Абрикосов А.А., Гинзбург В.Л., Леггетт А.Дж.	1957	2003

Физика конденсированного состояния

Конденсированная среда – система частиц, сильно взаимодействующих друг с другом.

Физика конденсированного состояния

Состояния вещества

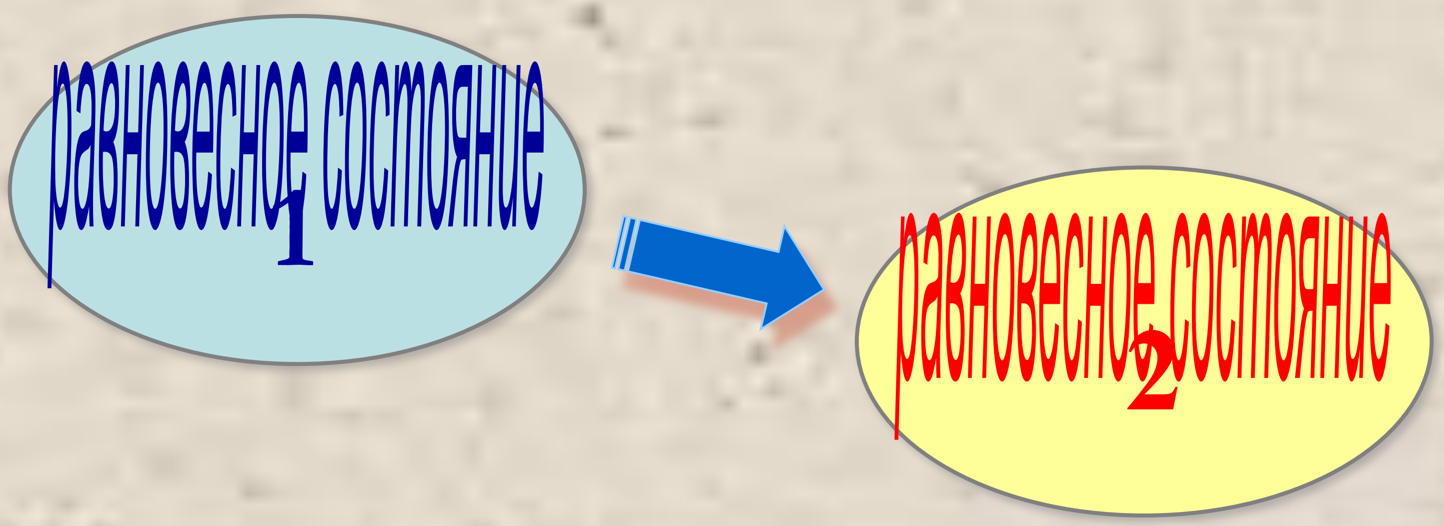
	Газ	Жидкость	Твердое тело
Порядок	Хаос	Ближний	Ближний и дальний
Время	$\tau_{ст} \sim 10^{-13}$с $\tau_{мс} \sim 10^{-9}$с	10^{-8}с	10^{-13}с
Энергия	$U_{ср} << E_{ср}$	$U_{ср} \sim E_{ср}$	$U_{ср} > E_{ср}$

Физика конденсированного состояния

Часть 1

Элементы физической кинетики

задача физической кинетики

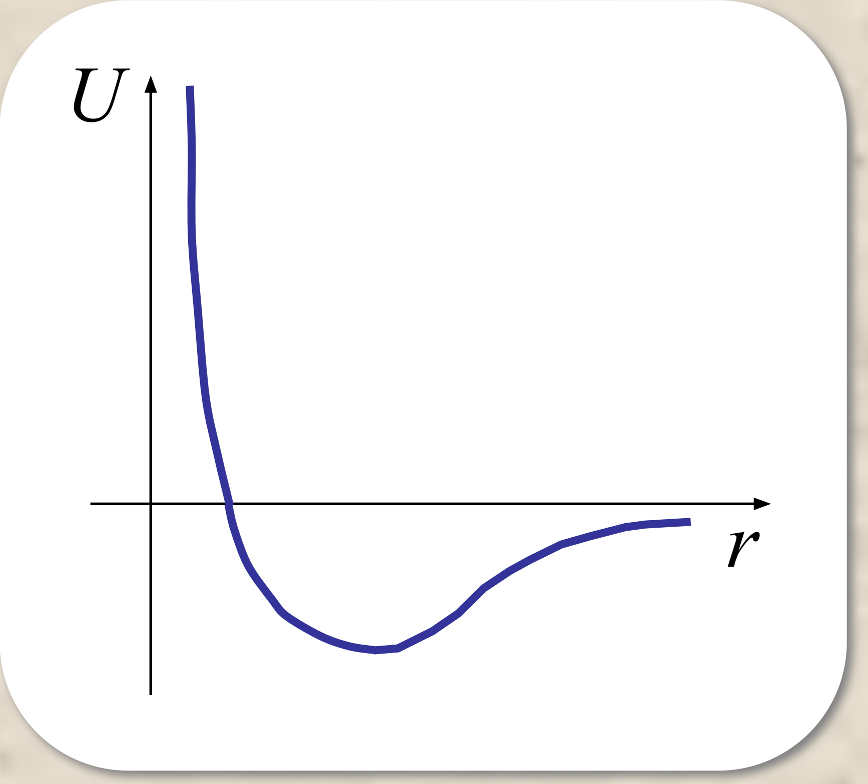


ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА:

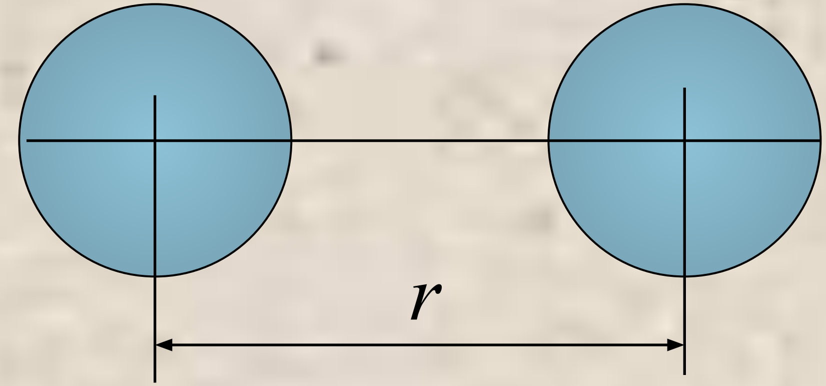
массы; импульса; энергии

физическая кинетика -

микроскопическая теория процессов в статистически неравновесных системах



$$U = f(r)$$



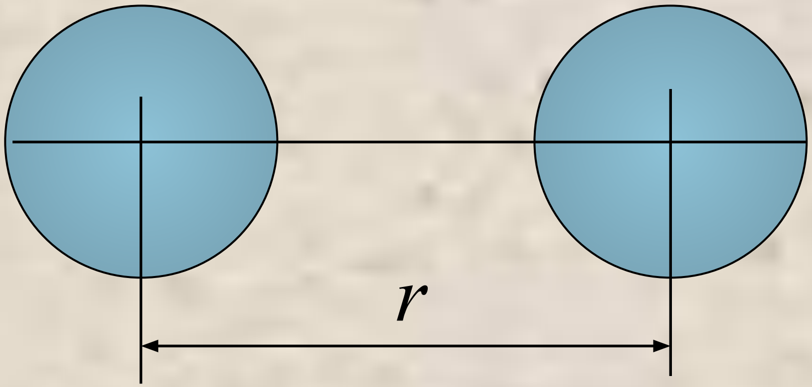
Основные понятия и определения

физическая кинетика

МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА:

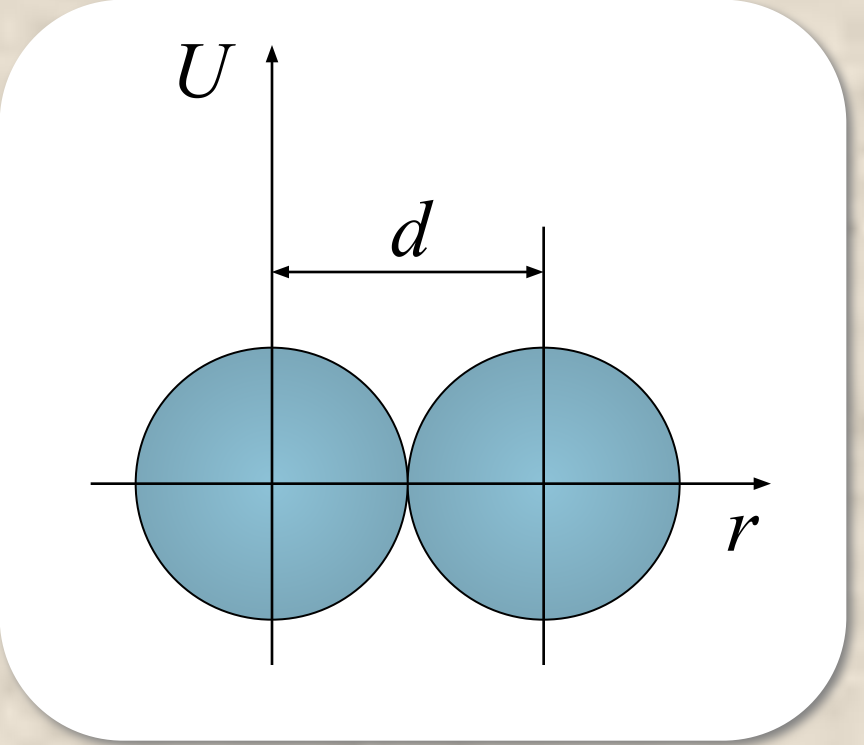
$$\bar{U}_{потенц.} << \bar{E}_{кинетич.}$$

$$U = f(r)$$



Потенциалы взаимодействия молекул

ТВЕРДЫЕ УПРУГИЕ ШАРЫ

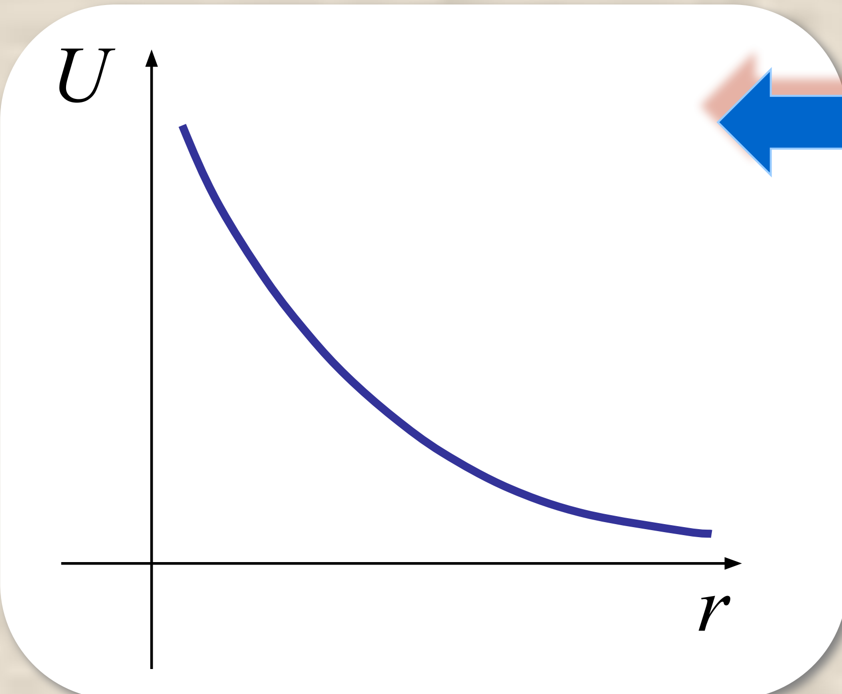


$$U = f(r)$$

$$\begin{matrix} U \to \infty \ \ \text{при} \ \ r = d \\ U = 0 \ \ \text{при} \ \ r > d \end{matrix} \qquad (1)$$

Потенциалы взаимодействия молекул

ЦЕНТРЫ ОТТАЛКИВАНИЯ



$$U = \frac{K}{r^{s-1}} \qquad (2)$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{K(s-1)}{r^{s}}$$

K, s – постоянные

Максвелловские молекулы **s = 5**

$$F = \frac{4K}{r^{5}} = \frac{K_1}{r^{5}} \qquad (2a)$$

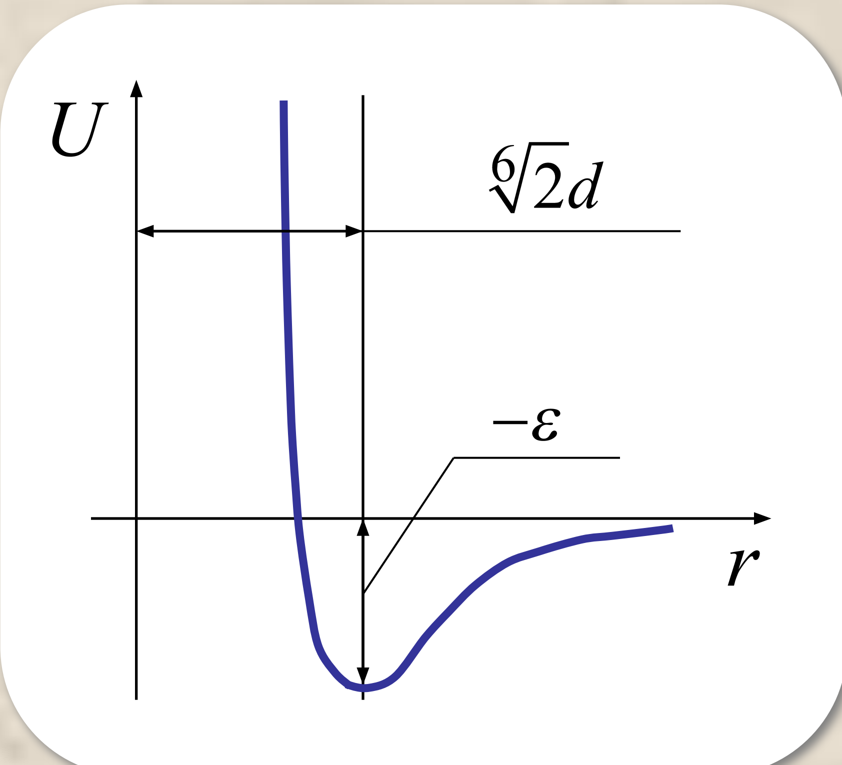
Потенциалы взаимодействия молекул

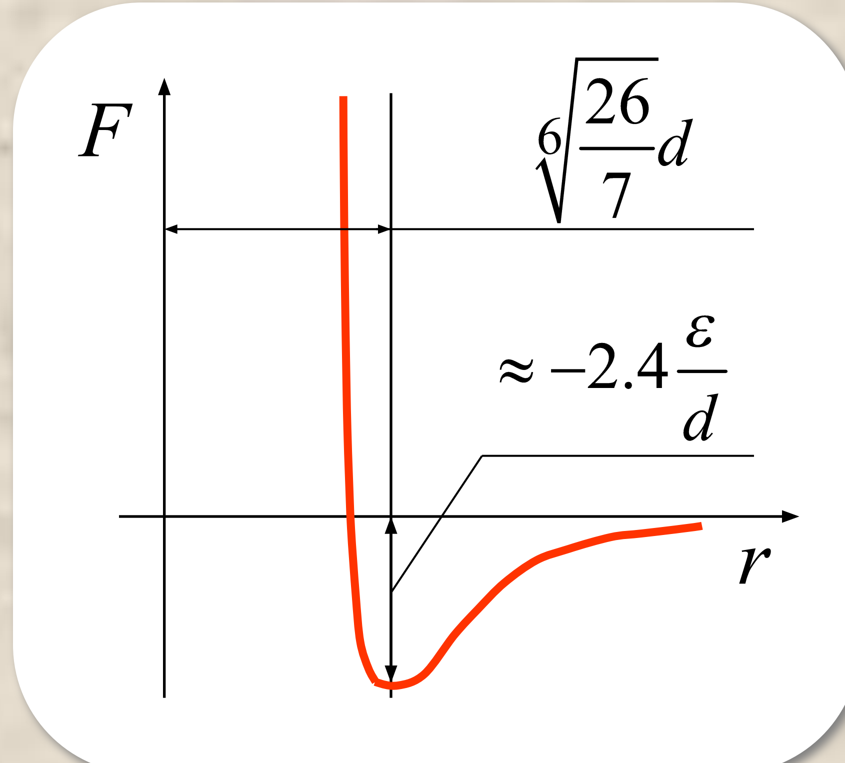
ЛЕННАРД-ДЖОНСА

$(d/r)^6$ притяжение

$(d/r)^{12}$ отталкивание

$$(3)\ U = 4\varepsilon\left\{(d/r)^{12} - (d/r)^6\right\}$$

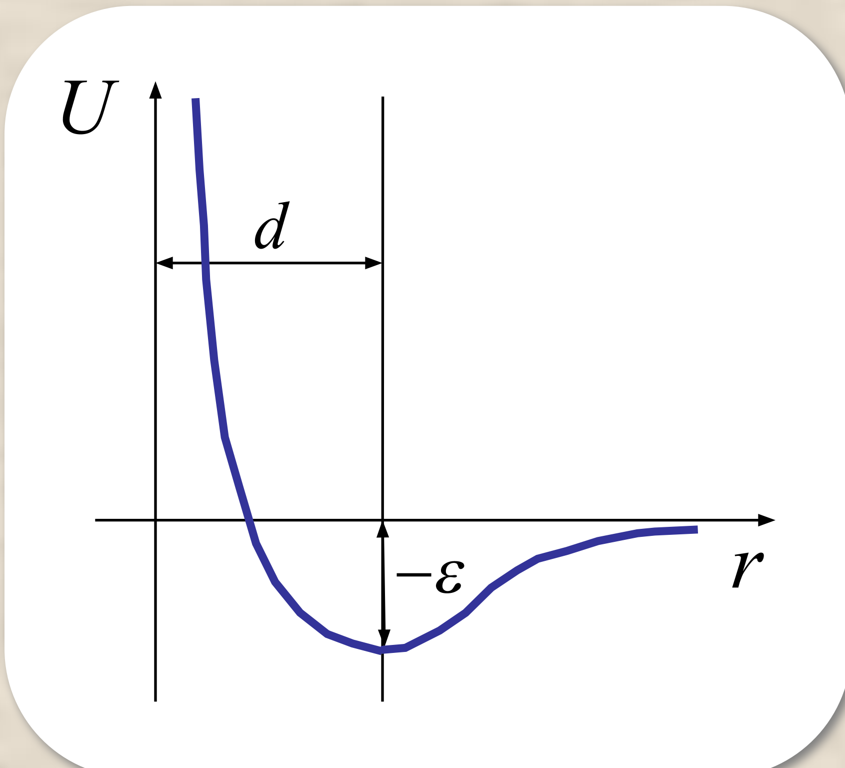




Потенциалы взаимодействия молекул

МОРЗЕ

$$U = \varepsilon\left\{\boxed{e^{-2a(r-d)}} - \boxed{2e^{-a(r-d)}}\right\} \qquad (4)$$



ε, d, a — постоянные

$$a \cdot d \cong 6$$

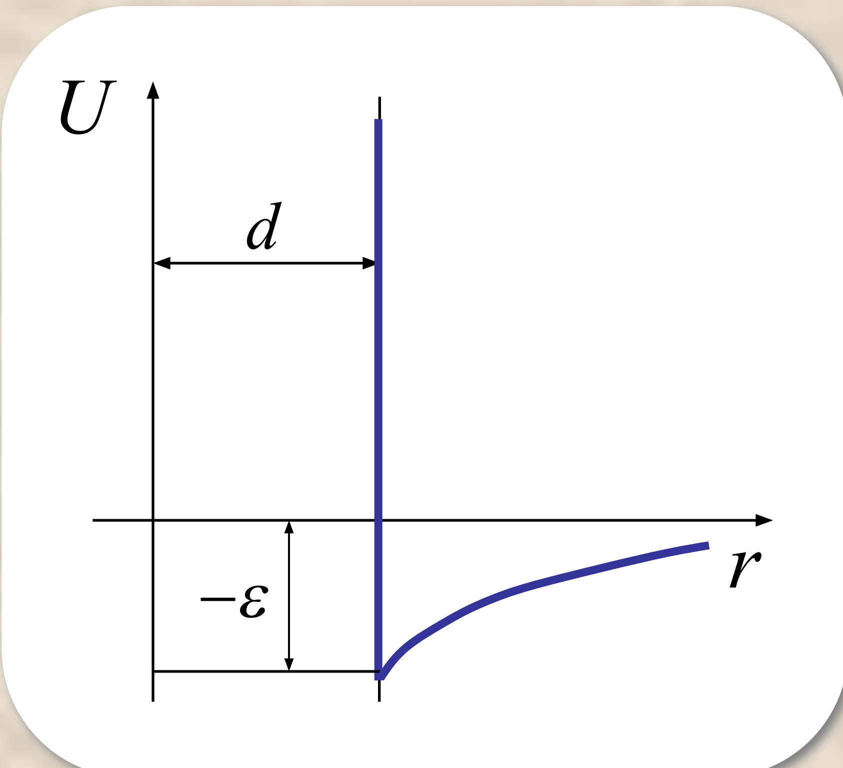
$\boxed{2e^{-a(r-d)}}$ — притяжение

$\boxed{e^{-2a(r-d)}}$ — отталкивание

Потенциалы взаимодействия молекул

СЕЗЕРЛЕНДА

$$U = f(r)$$



$U \to \infty$ при r d $=$

$$U = -\varepsilon\left(d/r\right)^m \qquad (5)$$

при $r > d$

ε, d, m – постоянные

функция распределения

(6) $f\left(\vec{x},\vec{\xi},t\right)d\vec{x}d\vec{\xi}$ – **есть ожидаемое число молекул в объеме $d\vec{x}d\vec{\xi}$, координаты которых находятся в интервале от $\vec{x}$ до $\vec{x}+d\vec{x}$, а скорости в интервале от $\vec{\xi}$ до $\vec{\xi}+d\vec{\xi}$.**

$f\left(\vec{x},\vec{\xi},t\right)$ – **функция семи переменных:**

$x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z, t.$

функция распределения

РАВНОВЕСНОЕ МАКСВЕЛЛОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$f = n\left(\frac{1}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{\left(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2\right)}{2RT}\right],\ (7)$$

n – числовая плотность ;

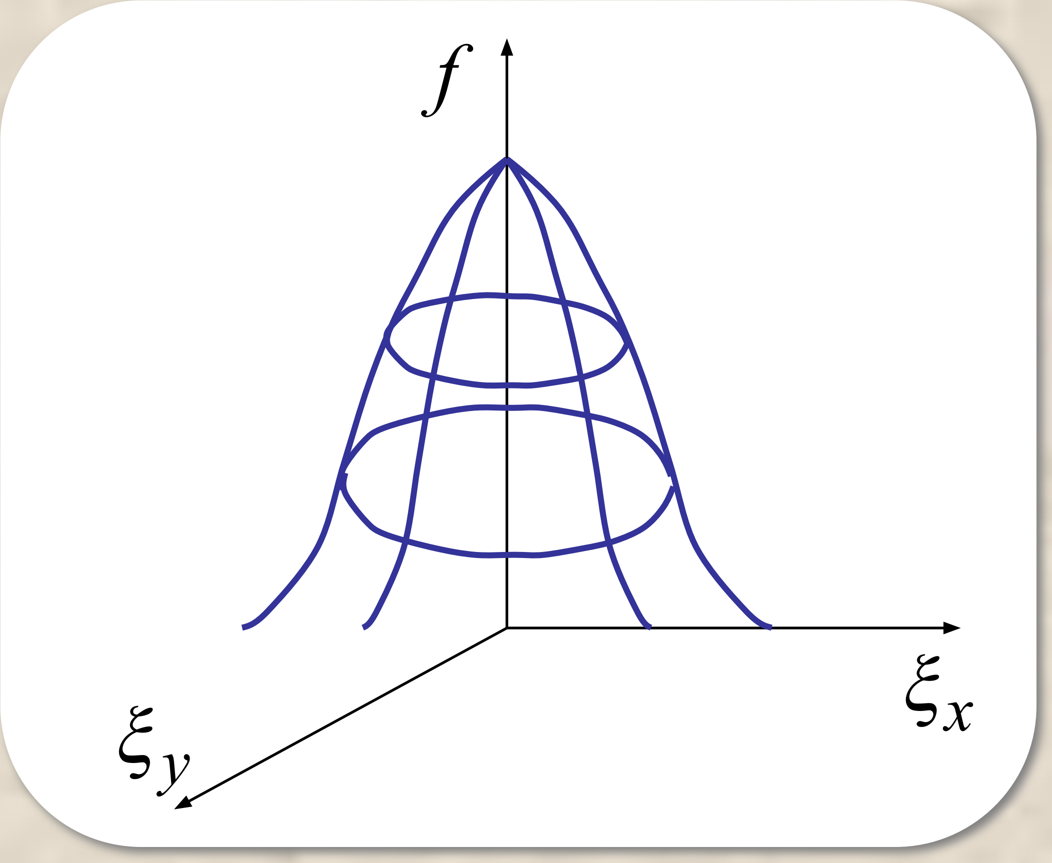
T – температура ;

R – индивидуальная газовая постоянная .

функция распределения

СЕЧЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ

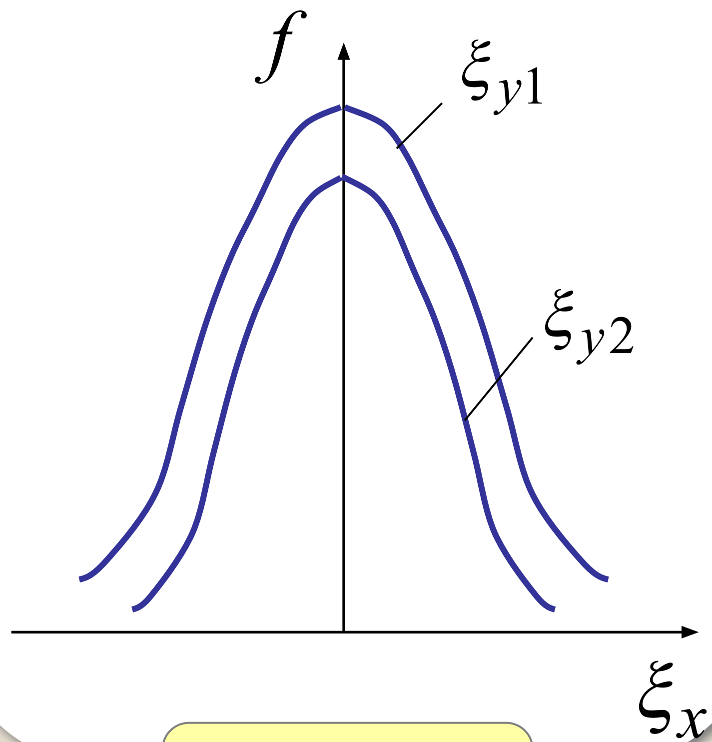
$$\xi_z = 0$$



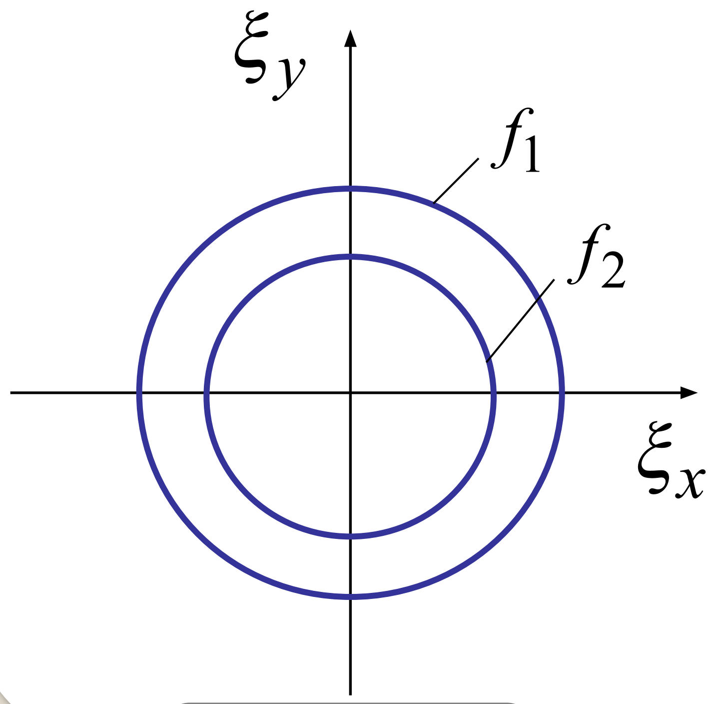
функция распределения

СЕЧЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОСТЯМИ

$\xi_z = 0, \xi_{y1} = const, \xi_{y2} = const:$ $\xi_z = 0, f_1 = const, f_2 = const:$



$\xi_{y2} > \xi_{y1}$



$f_2 > f_1$

Моменты функции распределения

Момент функции распределения –
это интеграл по пространству скоростей
от этой функции, взятый с определенным весом.

$$M(\varphi f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{\xi}) f \, d\vec{\xi} \qquad (8)$$

$\varphi(\vec{\xi})$ – *некоторая функция* $\vec{\xi}$

Моменты функции распределения

ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\rho = m \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \, d\xi \, ; \qquad (9)$$

ρ – *плотность газа*; m – *масса молекулы*

$$j_x = \rho u_x = m \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \xi_x \, d\xi \qquad (10)$$

j_x – *проекция плотности потока массы*;

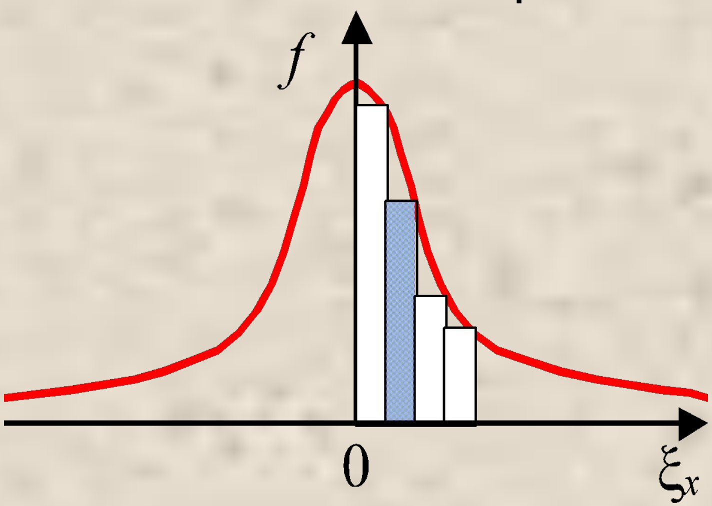
u_x – *проекция скорости потока газа*;

Моменты функции распределения

$$f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}\right)d\vec{x}\,d\vec{\xi}$$

ожидаемое число молекул в элементе объема физического пространства $d\vec{x}$ около точки $\vec{x}$, обладающих скоростями в элементе пространства скоростей $d\vec{\xi}$ около точки $\vec{\xi}$

$$f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}\right)d\vec{\xi}$$ – для единичного объема



$$\rho = m\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f d\vec{\xi}$$

$$\rho = m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}\right)\, d\xi_x\, d\xi_y\, d\xi_z$$

Другие моменты

$$\rho u_x = m\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f\xi_x d\vec{\xi}; \qquad T = \frac{m}{3R\rho}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\left(\vec{\xi}-\vec{u}\right)^2 f d\vec{\xi}$$

Моменты функции распределения

ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\Pi_{kl} = m\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_k \xi_l f\, d\vec{\xi}\,; \qquad (11)$$

$$E_x = \frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\, \vec{\xi}^{\,2} \xi_x\, d\vec{\xi} \qquad (12)$$

$$\vec{\xi}^{\,2} = \xi_x^{\,2} + \xi_y^{\,2} + \xi_z^{\,2}$$

Моменты функции распределения

$$P_{xy} = m\int\limits_{-\infty}^{\infty} c_x c_y f\, d\vec{\xi}\,; \qquad (13)$$

$$c_x = \xi_x - u_x, \qquad c_y = \xi_y - u_y$$

u_x – проекция скорости потока газа ;

u_y – проекция скорости потока газа ;

$$q_x = \frac{1}{2} m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{c}^{\,2} c_x f\, d\vec{\xi} \qquad (14)$$

$$\frac{3}{2} kTn = \frac{1}{2} m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{c}^{\,2} f\, d\vec{\xi} \qquad (15)$$

$$\vec{c}^{\,2} = c_x^{\,2} + c_y^{\,2} + c_z^{\,2}$$

Кинетическое уравнение Больцмана

Уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{\xi}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}+\frac{\vec{X}_0}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}}=J,(16)$$

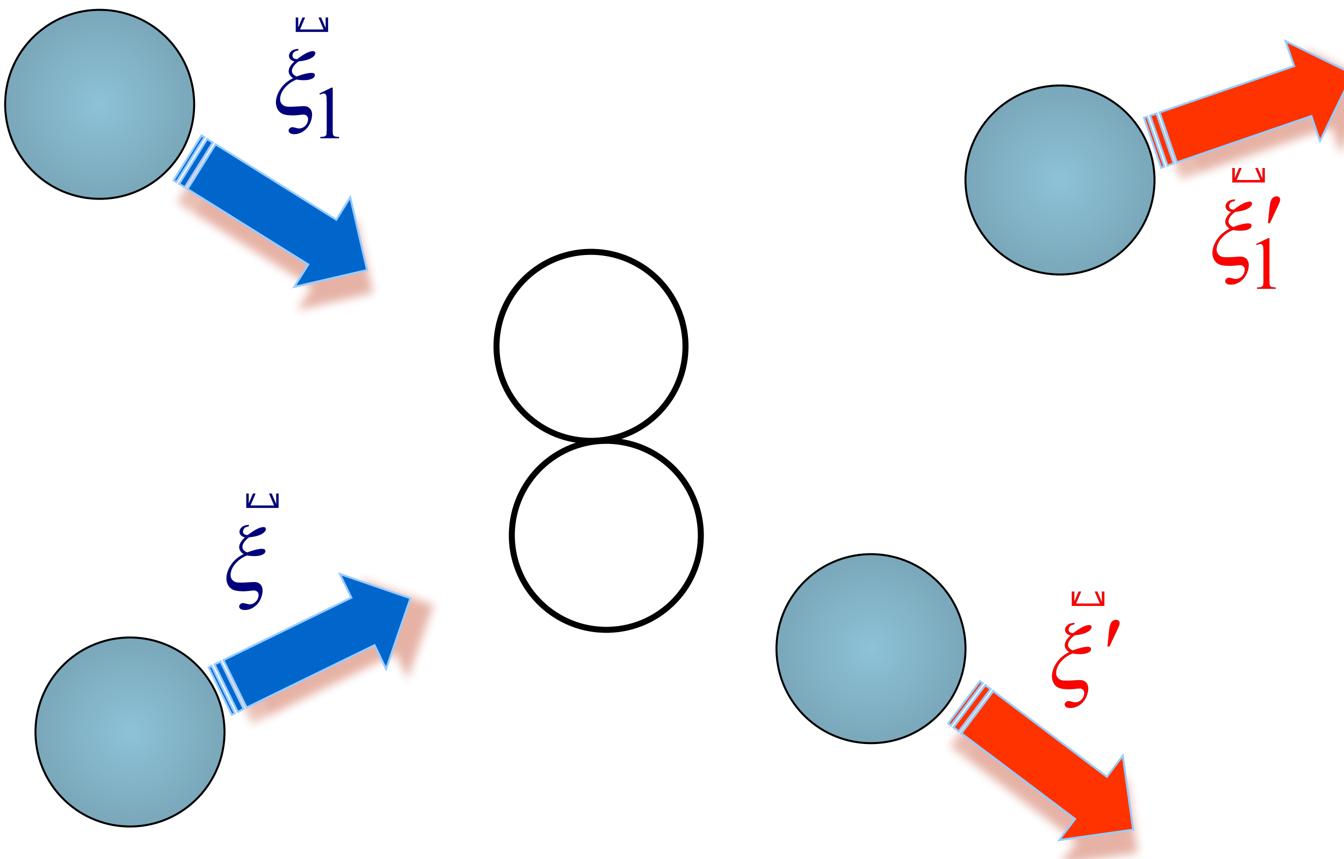
$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi_x\frac{\partial f}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial f}{\partial y}+\xi_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\vec{X}_0}{m}\left\{\frac{\partial f}{\partial \xi_x}+\frac{\partial f}{\partial \xi_y}+\frac{\partial f}{\partial \xi_z}\right\}=J,(16^a)$$

ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ:

$$(17)\quad J=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\left(f'f_1'-ff_1\right)\left|\vec{g}\right|bdbd\varepsilon d\vec{\xi}_1$$

$$f=f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}\right);\ f_1=f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}_1\right);\ f'=f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}'\right);\ f_1'=f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}_1'\right)$$

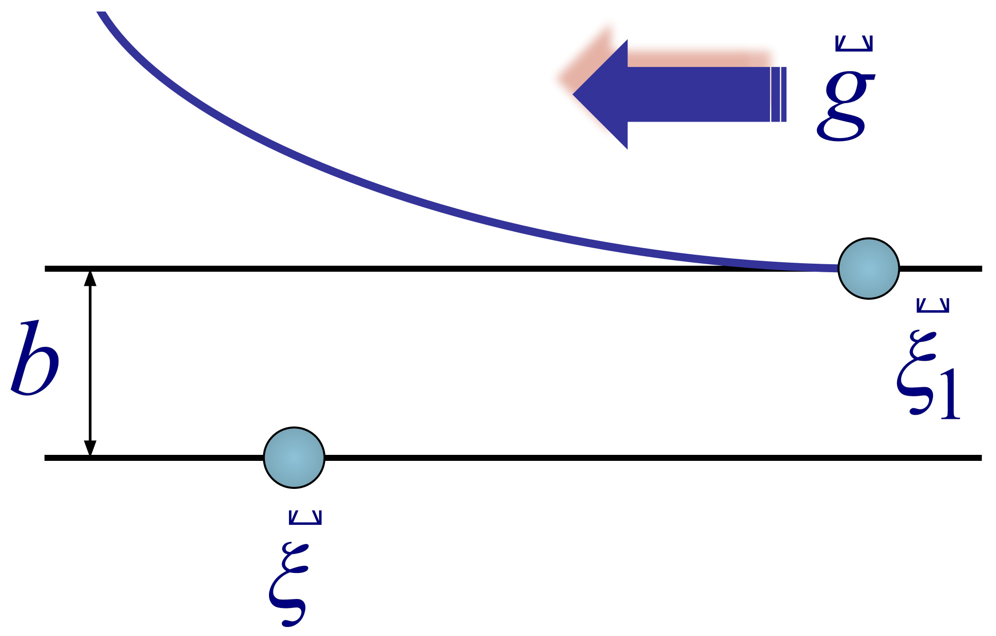
Столкновение двух молекул



Столкновение двух молекул

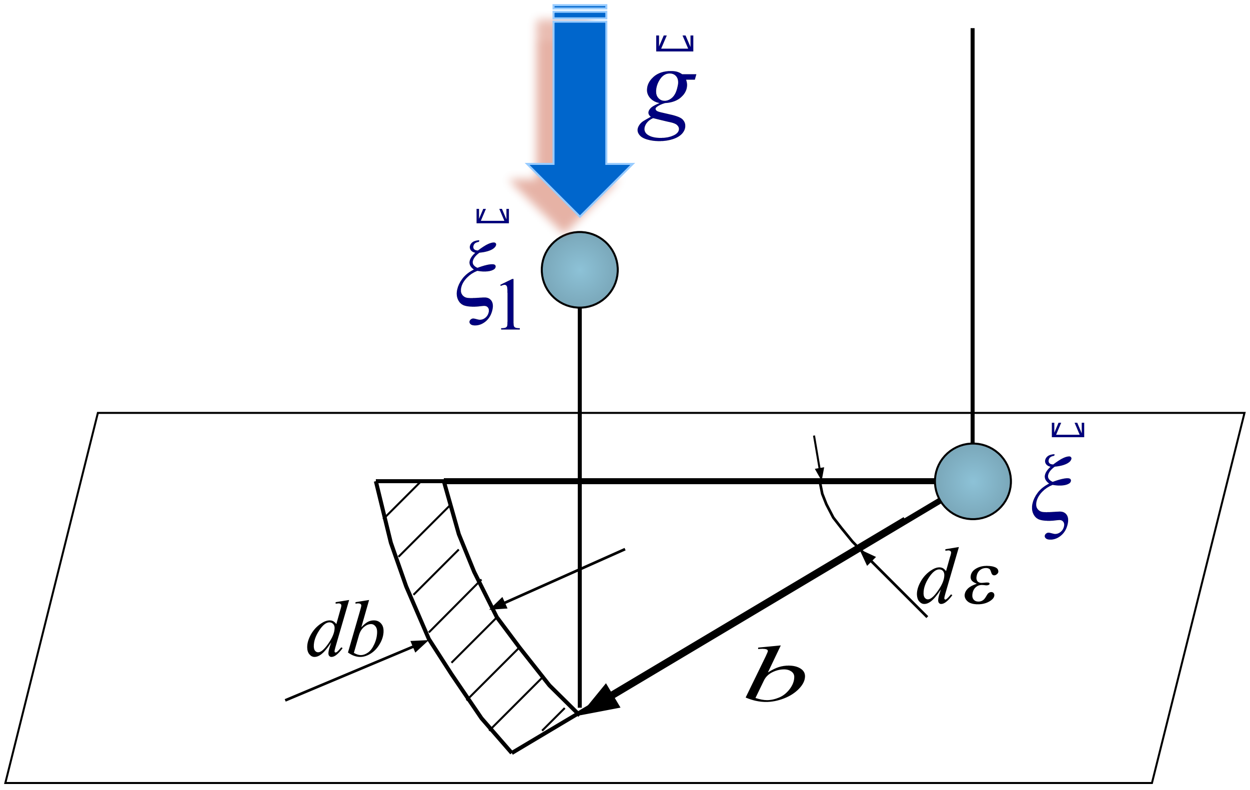
ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЫ

$$\vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}$$



Столкновение двух молекул

РАССМОТРЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ



Моменты интеграла столкновений

$$(18)\quad I(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\vec{\xi}\right)J\,d\xi_x\,d\xi_y\,d\xi_z$$

$$(19^{a})\quad I(\varphi)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi+\varphi_1-\varphi'-\varphi_1'\right)\left(f'f_1'-ff_1\right)\left|\vec{g}\right|b\,db\,d\varepsilon\,d\vec{\xi}_1\,d\vec{\xi}$$

$$(19^{б})\quad I(\varphi)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi'+\varphi_1'-\varphi-\varphi_1\right)ff_1\left|\vec{g}\right|b\,db\,d\varepsilon\,d\vec{\xi}_1\,d\vec{\xi}$$

Некоторые свойства интеграла столкновений

Для сумматорных инвариантов: $\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1' = 0$

Инварианты столкновений:

$$\varphi_0 = m$$

$$\varphi_1 = m\xi_x$$

$$\varphi_2 = m\xi_y$$

$$\varphi_3 = m\xi_z$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{2}m\vec{\xi}^{\,2}$$

Если ϕ - сумматорный инвариант, то

$$\varphi = Am\vec{\xi}^{\,2} + \vec{B}m\vec{\xi} + C$$

Н - функция и Н - теорема

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f \ln f \, d\xi_x d\xi_y d\xi_z \quad (20)$$

$$H_x = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x f \ln f \, d\vec{\xi} \quad (21)$$

$$I(\ln f) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f + \ln f_1 - \ln f' - \ln f_1'\right)\left(f' f_1' - f f_1\right)\left|\vec{g}\right| b\,db\,d\varepsilon\,d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} = I(1 + \ln f)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} \le 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} \le 0 \quad (22^a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} \le 0 \quad (22^б)$$

Н - функция и Н - теорема

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H_x}{\partial x}=0 \qquad I\left(1+\ln f\right)=0$$

$$1+\ln f = Am\vec{\xi}^{\,2}+\vec{B}m\vec{\xi}+C$$

$$n=\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\vec{\xi};\; nu_x=\int_{-\infty}^{\infty} f\xi_x\,d\vec{\xi} \quad nu_y=\int_{-\infty}^{\infty} f\xi_y\,d\vec{\xi} \quad nu_z=\int_{-\infty}^{\infty} f\xi_z\,d\vec{\xi}$$

$$T=\frac{m}{3kn}\int_{-\infty}^{\infty}[(\xi_x-u_x)^2+(\xi_y-u_y)^2+(\xi_z-u_z)^2]f\,d\vec{\xi}$$

$$f=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{m}{2kT}\left((\xi_x-u_x)^2+(\xi_y-u_y)^2+(\xi_z-u_z)^2\right)\right]$$

МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Уравнение Бхатнагара, Гросса, Крука

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \nu\left(f_0 - f\right) \quad (23)$$

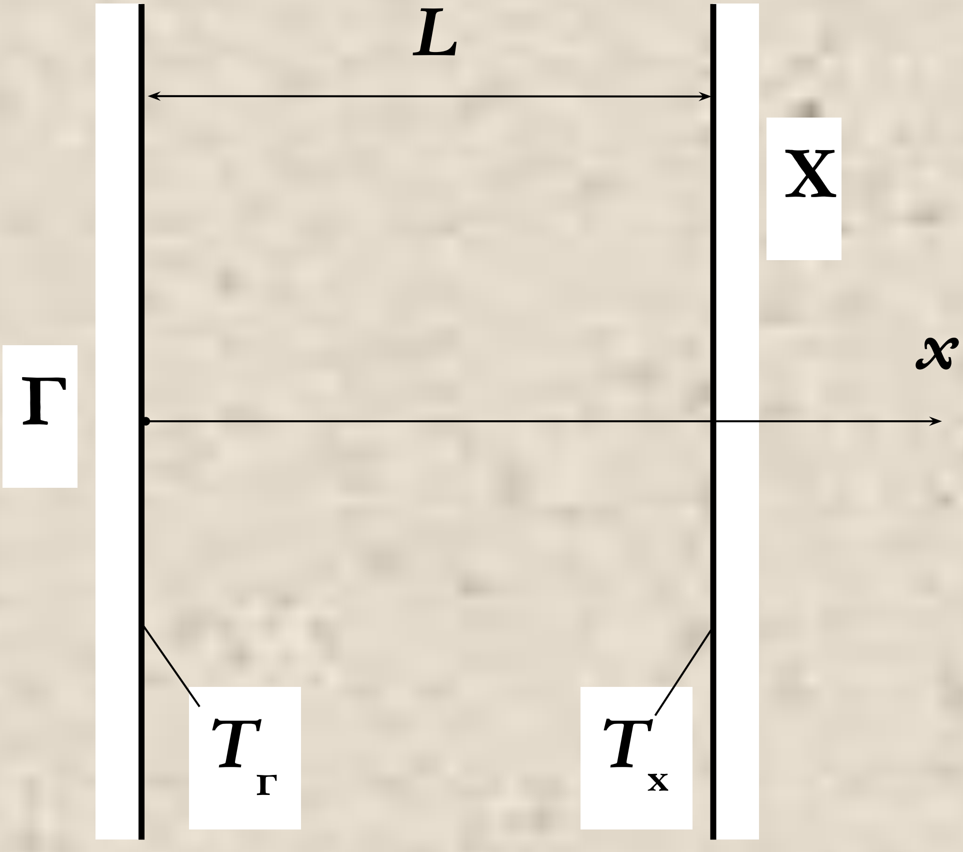
ν — постоянный множитель, частота столкновений;

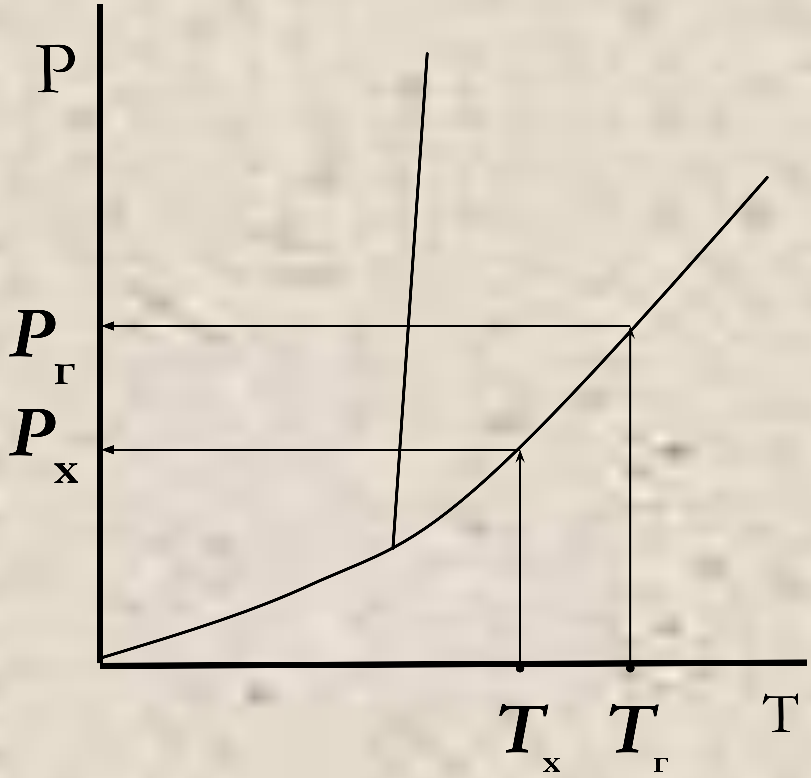
f_0 – равновесная максвелловская функция распределения, с параметрами n_0, u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}, T_0, которые определяются из:

$$\int f_0\, d\vec{\xi} = \int f\, d\vec{\xi}\,; \quad \int f_0 \xi_i\, d\vec{\xi} = \int f\, \xi_i d\vec{\xi} \qquad (i = x, y, z);$$

$$\int f_0 \left(\vec{\xi} - \vec{u}\right)^2 d\vec{\xi} = \int f \left(\vec{\xi} - \vec{u}\right)^2 d\vec{\xi}\,, \text{ где } \quad u_i = \frac{\int f_0\, \xi_i d\vec{\xi}}{\int f_0\, d\vec{\xi}}$$

Постановка задачи переконденсации





$$\xi_x \frac{df}{dx} = J$$

Получение системы моментных уравнений

Принятие аппроксимации функции распределения

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{n_1(x)}{\left[2\pi RT_1(x)\right]^{3/2}} \exp\left[-\dfrac{\vec{\xi}^{\,2}}{2RT_1(x)}\right] & \xi_x > 0 \\ f_2 = \dfrac{n_2(x)}{\left[2\pi RT_2(x)\right]^{3/2}} \exp\left[-\dfrac{\vec{\xi}^{\,2}}{2RT_2(x)}\right] & \xi_x < 0 \end{cases} \qquad (24)$$

Сила взаимодействия молекул $F = K_1 \big/ r^5$

Четырехмоментная аппроксимация

$$\varphi_1 = m; \quad \varphi_2 = m\xi_x; \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} m \vec{\xi}^{\,2}; \quad \varphi_4 = m\xi_x \vec{\xi}^{\,2}$$

Умножение $m\xi_x \dfrac{df}{dx} = mJ,$

Получение системы моментных уравнений

Интегрирование $\int\limits_{-\infty}^{\infty} m\xi_x \frac{df}{dx} \cdot d\vec{\xi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} mJd\vec{\xi}\,,$

$$m\frac{d\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_x f d\vec{\xi}}{dx} = m\frac{d\left\langle \xi_x \right\rangle}{dx}$$

$$\left\langle 1 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f d\vec{\xi}$$

$$\left\langle \xi_x^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_x^2 f d\vec{\xi}$$

и т.п.

Система моментных уравнений

$$m\frac{d\left\langle \xi_x \right\rangle}{dx} = 0$$

$$m\frac{d\left\langle \xi_x^2 \right\rangle}{dx} = 0$$

$$m\frac{d\left\langle \xi_x \vec{\xi}^{\,2} /2 \right\rangle}{dx} = 0$$

$$m\frac{d\left\langle \xi_x^2 \vec{\xi}^{\,2} \right\rangle}{dx} = m \cdot I\left(\xi_x \vec{\xi}^{\,2} \right)$$

Система моментных уравнений

$$\left\langle \xi_x \right\rangle = \frac{j_x}{m} \qquad (25^{а})$$

$$\left\langle \xi_x^2 \right\rangle = \frac{\Pi_x}{m} \qquad (25^{б})$$

$$\left\langle \xi_x \vec{\xi}^{\,2} / 2 \right\rangle = \frac{E_x}{m} \qquad (25^{в})$$

$$m \frac{d \left\langle \xi_x^2 \vec{\xi}^{\,2} \right\rangle}{dx} = m \cdot I\left(\xi_x \vec{\xi}^{\,2} \right) \qquad (25^{г})$$

$$\left\langle \xi_x \right\rangle = \left\langle \xi_x \right\rangle_+ + \left\langle \xi_x \right\rangle_-$$

Интеграл Пуассона

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Система моментных уравнений

$$n_1\sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - n_2\sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = \frac{j_x}{m} \qquad (26^а)$$

$$\frac{1}{2}n_1RT_1 + \frac{1}{2}n_2RT_2 = \frac{\Pi_x}{m} \qquad (26^б)$$

$$2n_1RT_1\sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - 2n_2RT_2\sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = \frac{E_x}{m} \qquad (26^в)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{2}n_1\left(RT_1\right)^2 + \frac{5}{2}n_2\left(RT_2\right)^2\right) = I\left(\xi_x\xi^2\right) \quad (*)$$

Расчет момента интеграла столкновений

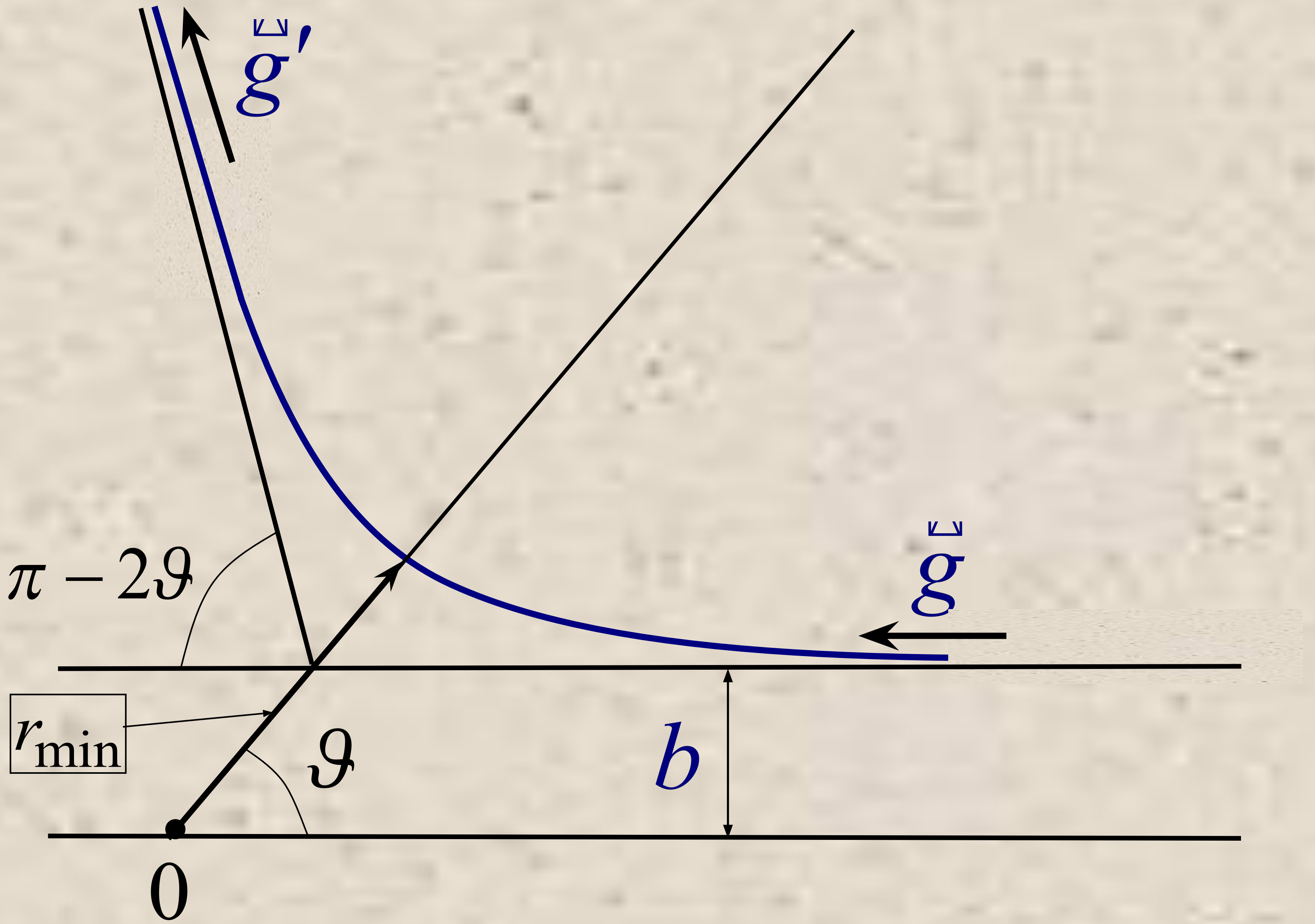
$$I\left(\xi_x \vec{\xi}^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi'_{x_1}\vec{\xi}_1'^{\,2} + \xi'_x \vec{\xi}'^{\,2} - \xi_{x_1}\vec{\xi}_1^{\,2} - \xi_x \vec{\xi}^{\,2}\right) f f_1 \left|\vec{g}\right| b\,db\,d\varepsilon\,d\vec{\xi}_1\,d\vec{\xi}$$

$$b = \left(\frac{2K_1}{m}\right)^{\frac{1}{s-1}} \left|g\right|^{-\frac{2}{s-1}} \alpha \qquad db = \left(\frac{2K_1}{m}\right)^{\frac{1}{s-1}} \left|g\right|^{-\frac{2}{s-1}} d\alpha$$

$$\left|g\right| b\,db = \left(\frac{2K_1}{m}\right)^{\frac{2}{s-1}} \left|g\right|^{1-\frac{4}{s-1}} \alpha\,d\alpha$$

При s=5 $\quad \left|g\right| b\,db = \left(\frac{2K_1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha\,d\alpha$

Расчет момента интеграла столкновений



Расчет момента интеграла столкновений

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\vec{g}\right| b \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \, db \, d\varepsilon = A_2\sqrt{\frac{K_1}{2m}}, \quad \text{где} \quad A_2 \approx 1{,}3682$$

$$I\left(\xi_x \vec{\xi}^{\,2}\right) = -2A_2\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\left[\langle 1\rangle\left\langle \xi_x \vec{\xi}^{\,2}\right\rangle - 2\langle \xi_x\rangle\left\langle \vec{\xi}^{\,2}\right\rangle + \langle \xi_x\rangle\left\langle \xi_x^2\right\rangle\right]$$

$$I\left(\xi_x \vec{\xi}^{\,2}\right) = -4\frac{A_2}{m}\rho\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\left(E_x\frac{\rho}{m} - \frac{5}{2}j_x\frac{\Pi_{xx}}{m}\right), \quad \text{где} \quad \rho = \frac{n_1(x)+n_2(x)}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{2}n_1\left(RT_1\right)^2 + \frac{5}{2}n_2\left(RT_2\right)^2\right) = -\frac{4A_2}{m}\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\left(E_x\frac{\rho}{m} - \frac{5}{2}j_x\frac{\Pi_{xx}}{m}\right), \quad (26^{г})$$

Обезразмеренная система моментных уравнений

$$n_1 T_1^{1/2} - n_2 T_2^{1/2} = j_x \qquad (27^a)$$

$$\Pi n_1 T_1 + n_2 T_2 = \quad {}_x \qquad (27^б)$$

$$E n_1 T_1^{3/2} - n_2 T_2^{3/2} = \quad {}_x \qquad (27^в)$$

$$\frac{d}{dx}\left(n_1 T_1^2 + n_2 T_2^2\right) = -\frac{16}{5\sqrt{2\pi}} A_2 \sqrt{\frac{K_1}{2m}} \frac{n_б}{\sqrt{RT_б}} \left(E_x n - \frac{5}{8} j_x \Pi_{xx}\right) \quad (**)$$

$$l_б = \frac{\sqrt{RT_б}}{2\sqrt{2} \cdot n_б \cdot A_2 \sqrt{K_1/2m}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(n_1T_1^2+n_2T_2^2\right)=-\frac{4}{5\sqrt{\pi}}\frac{1}{l_б}\left(E_xn-\frac{5}{8}j_x\Pi_{xx}\right)$$

$$\frac{d\left(n_1T_1^2+n_2T_2^2\right)}{dx'}=-\frac{0,45}{Kn_б}\left(E_xn-\frac{5}{8}j_x\Pi_{xx}\right),\quad (27^г)$$

где $x'=x/L,\quad Kn_б=l_б/L,\quad 0,45=4\Big/(5\sqrt{\pi})$

Линеаризованная система моментных уравнений

$$n_1 = 1 + N_1 \quad n_2 = 1 + N_2 \quad T_1 = 1 + t_1 \quad T_2 = 1 + t_2$$

$$N_1 + t_1/2 - \left(N_2 + t_2/2\right) = j_x \qquad (28^a)$$

$$2 + N_1 + t_1 + N_2 + t_2 = \quad {}_x \qquad (28^б)$$

$$N_1 + \frac{3}{2}t_1 - \left(N_2 + \frac{3}{2}t_2\right) = \quad {}_x \qquad (28^в)$$

$$\frac{d\left(N_1 + 2t_1 + N_2 + 2t_2\right)}{dx'} = -\frac{0,45}{Kn_б}\left[E_x - \frac{5}{4}j_x\right] \qquad (28^г)$$

$$t_2 = t_1 - E_x + j_x \quad (29) \qquad\qquad N_2 = N_1 - {}^3\!/_2\, j_x + {}^{E_x}\!/_2 \quad (30)$$

$$N_2 = {}^{\Pi_{xx}}\!/_2 - t_1 - {}^5\!/_4\, j_x + {}^3\!/_4\, E_x - 1 \quad (30^a)$$

$$N_1 = {}^{\Pi_{xx}}\!/_2 - t_1 + {}^{E_x}\!/_4 + {}^{j_x}\!/_4 - 1 \quad (31)$$

Элементы гидродинамики и теплопереноса в гелии II

Гелий II - квантовая жидкость

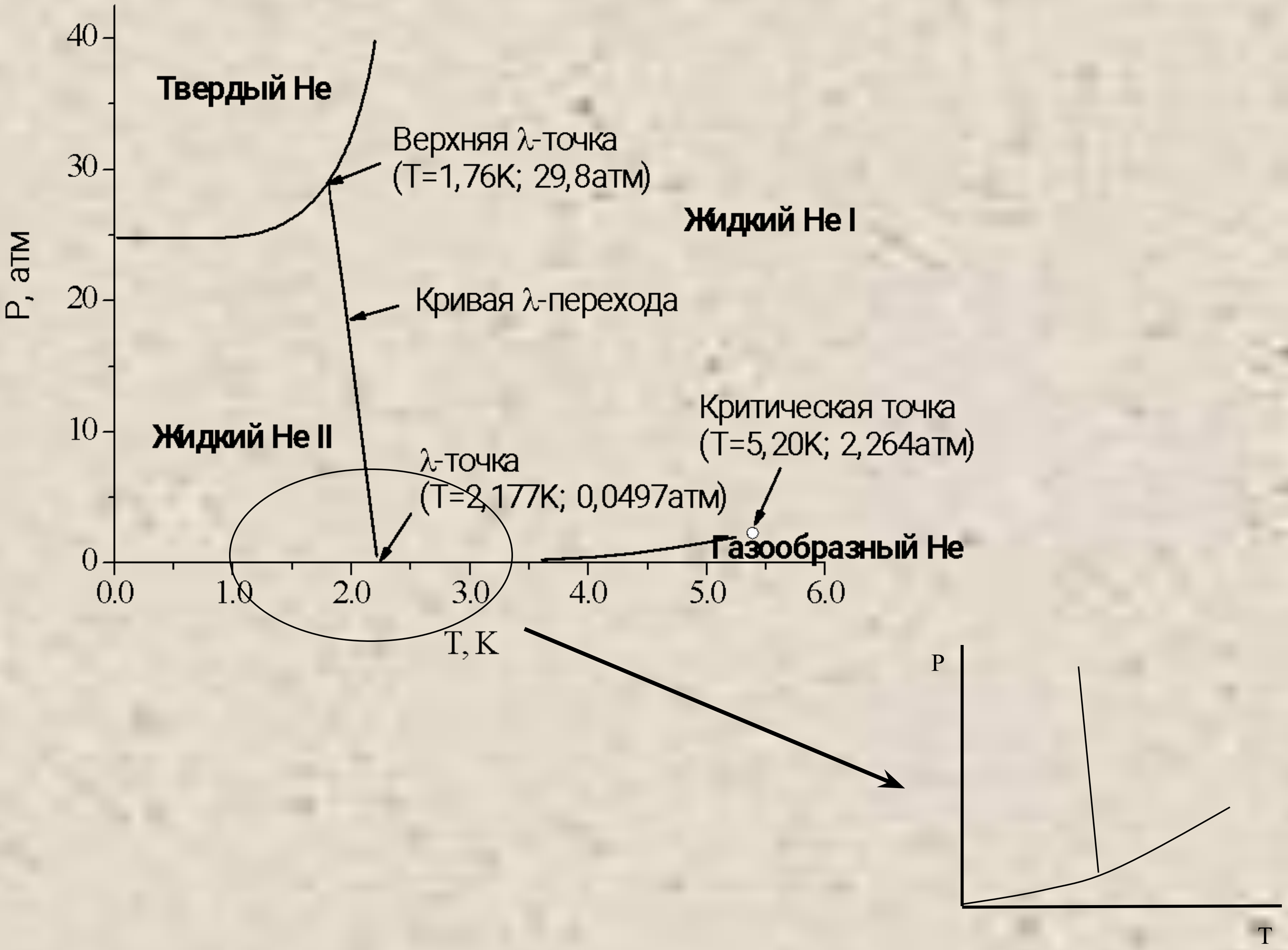
Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (1)$$

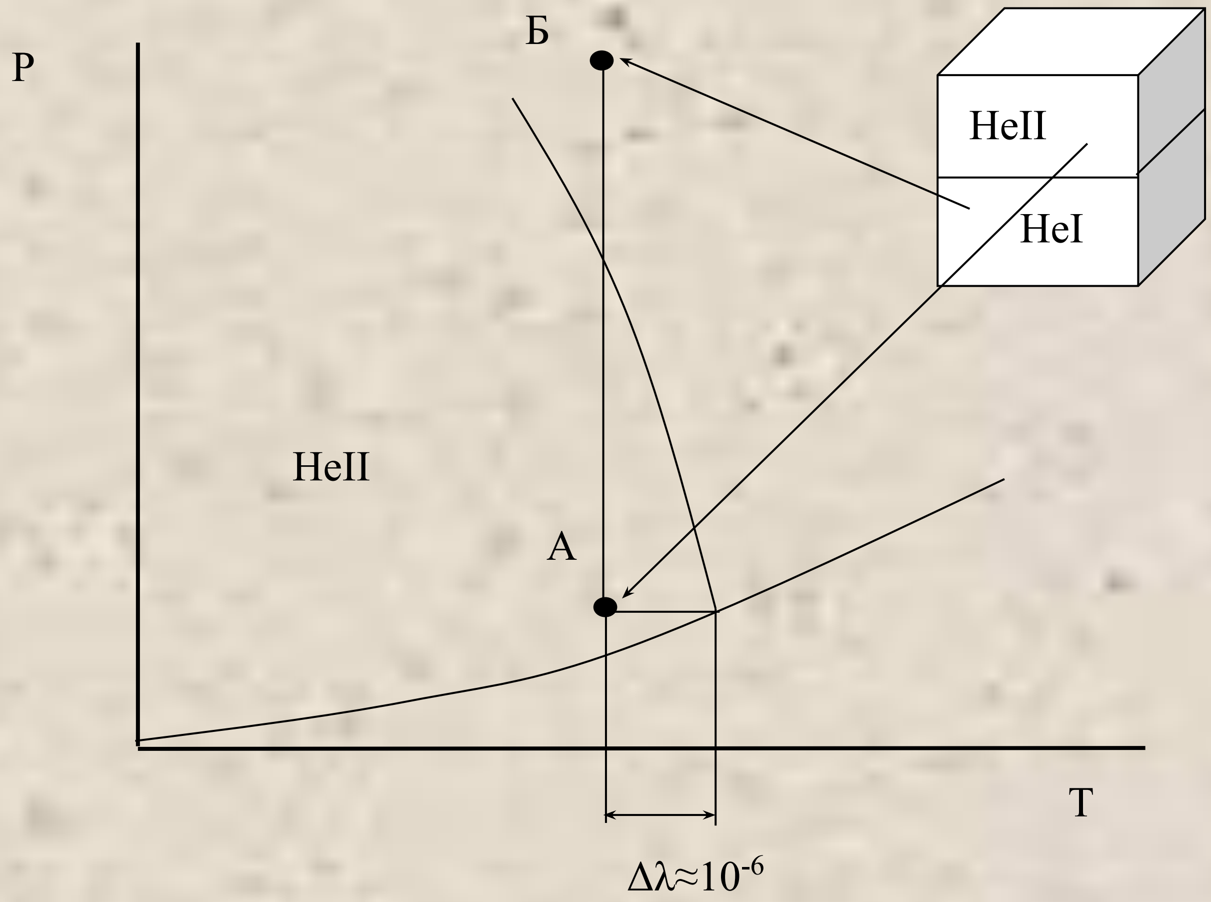
Неопределенность (флуктуации) энергии атома:

$$\Delta E \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \quad (2)$$

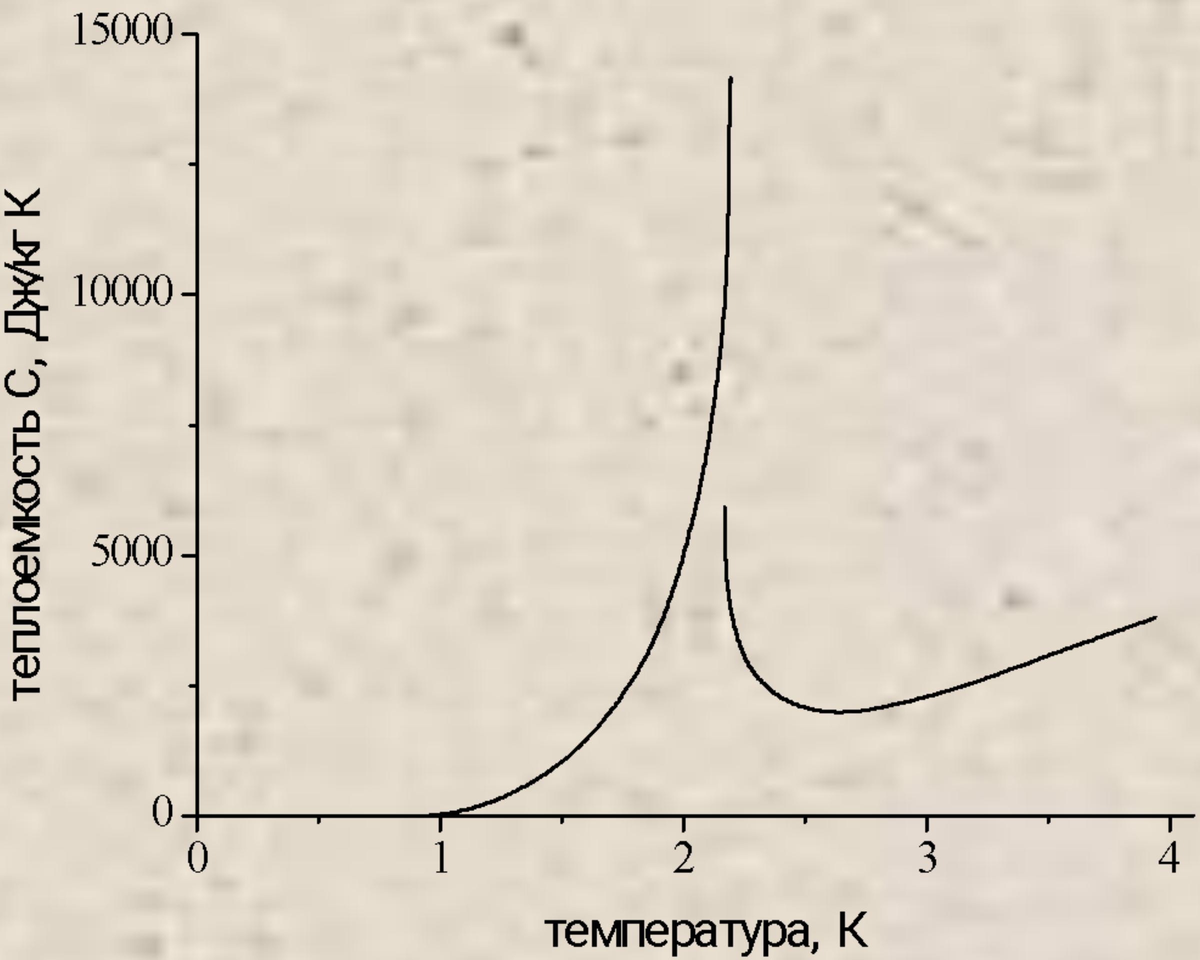
Р–Т диаграмма



P–T диаграмма

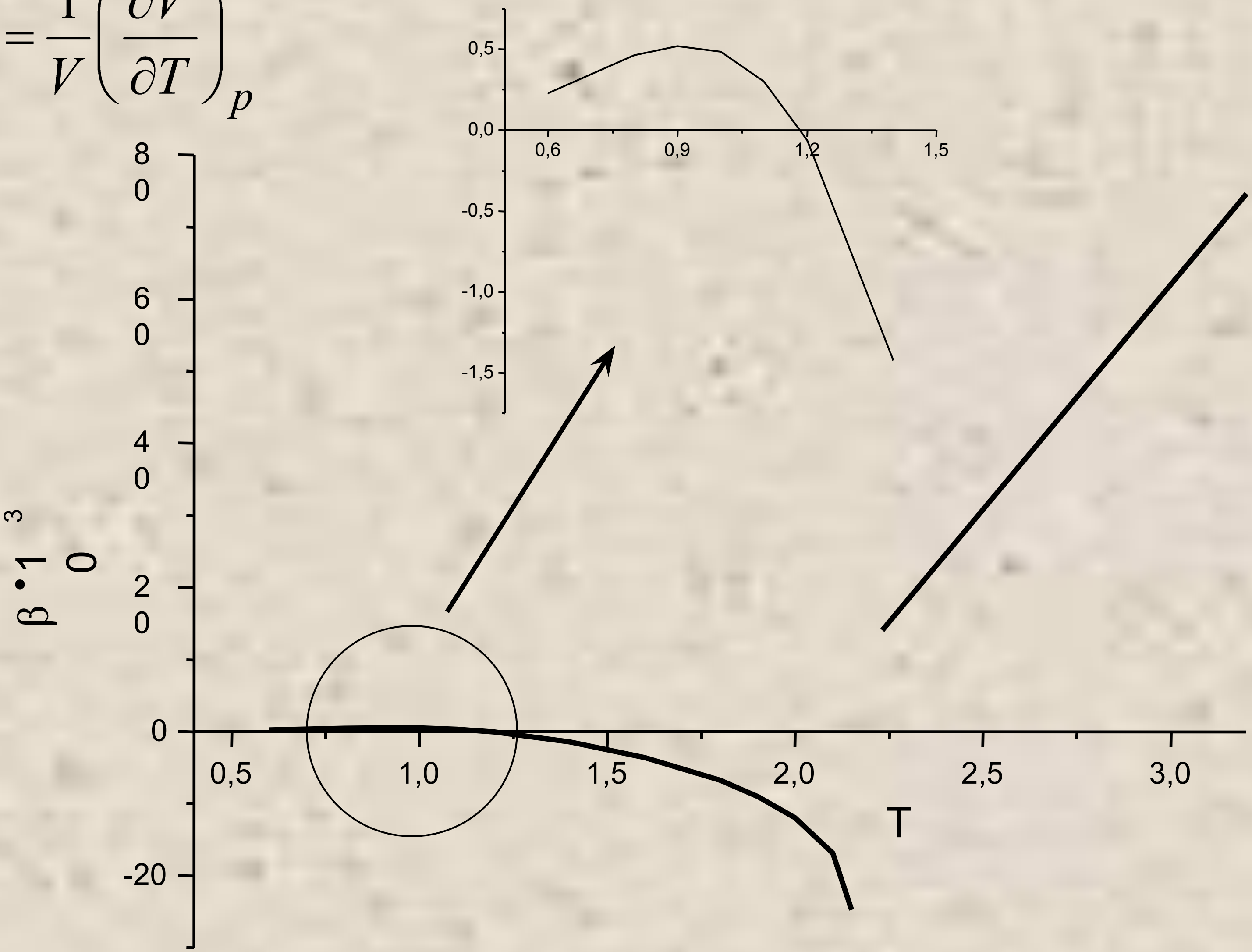


Теплоемкость вблизи лямбда-точки

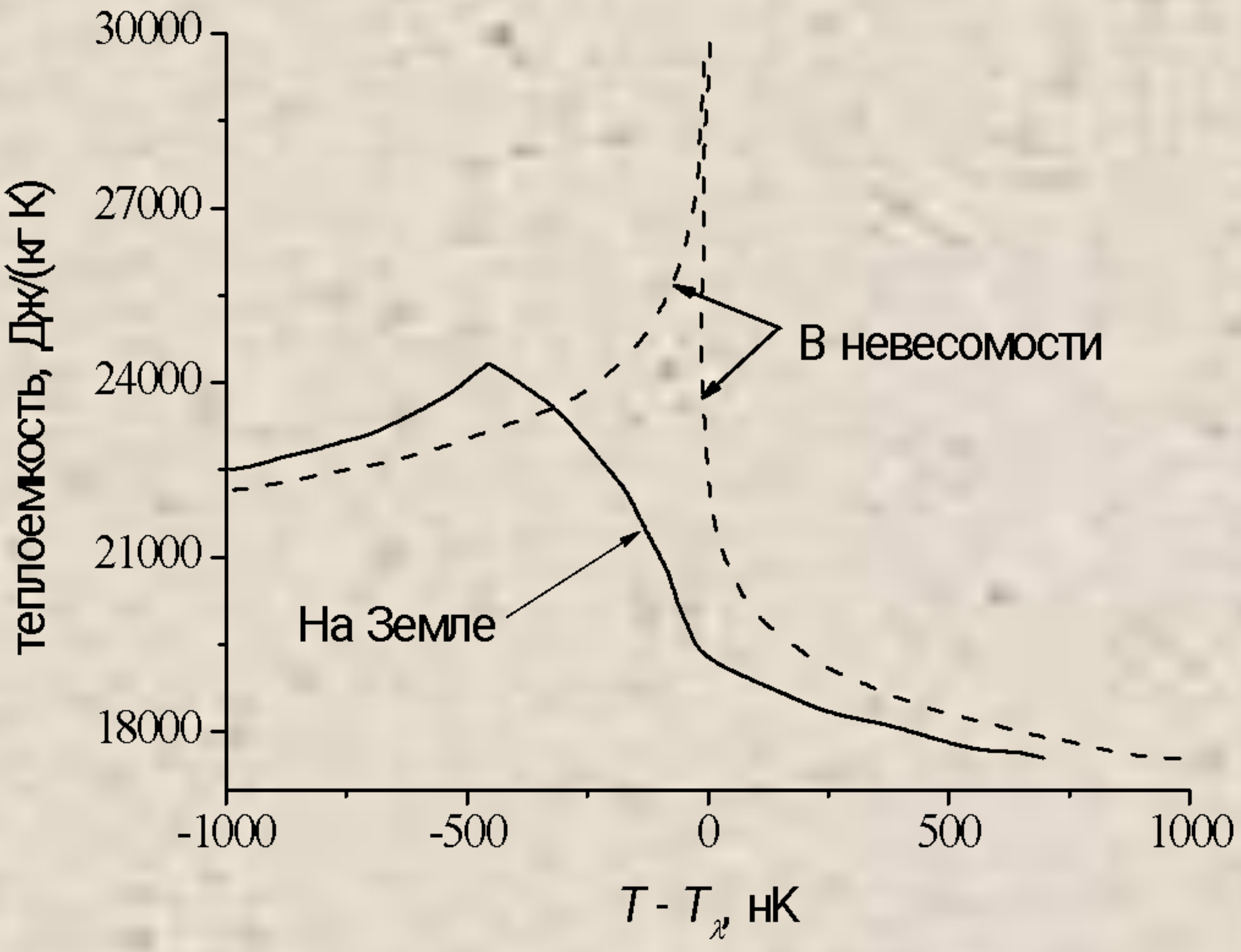


Температурный коэффициент объемного расширения

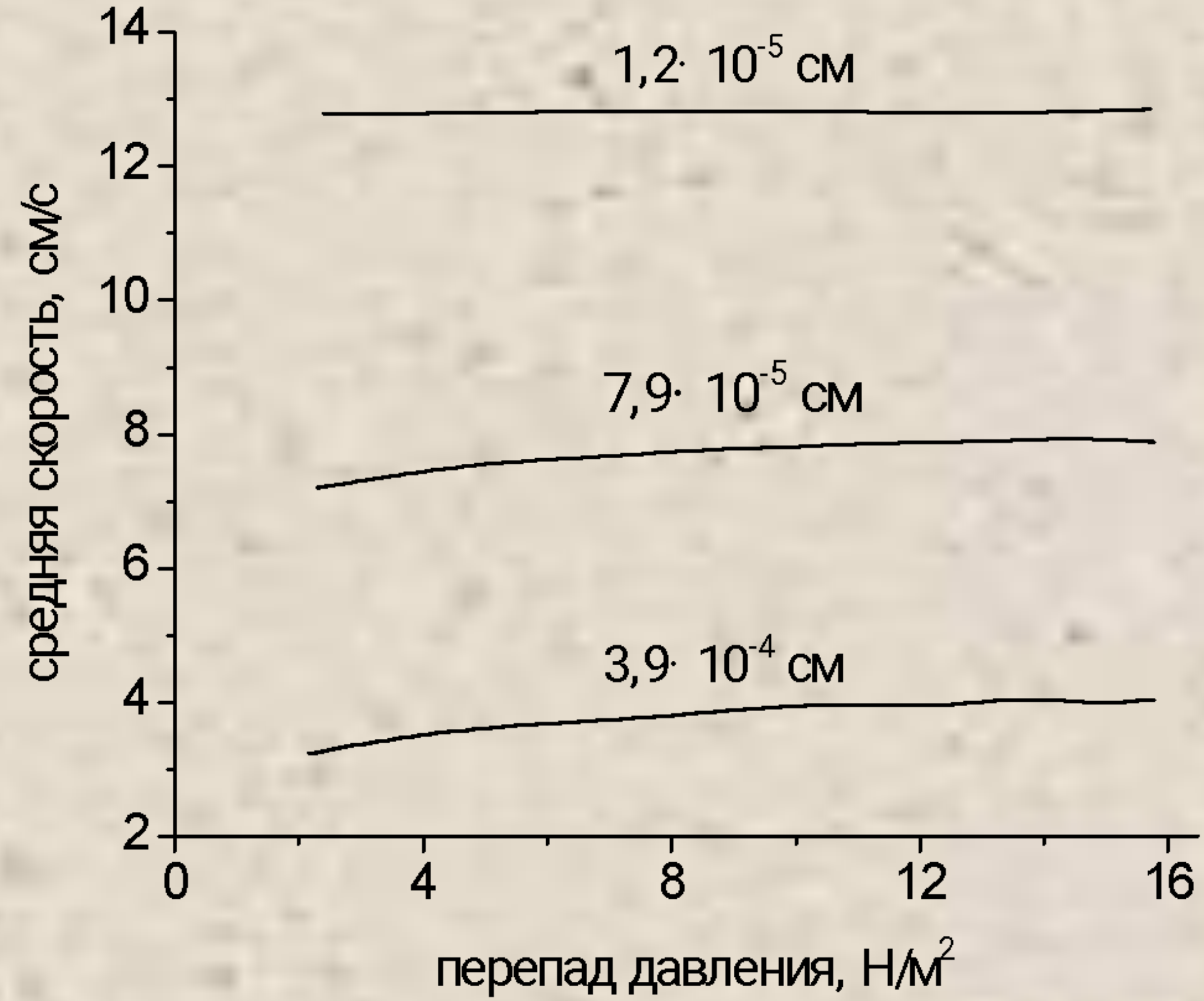
$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$



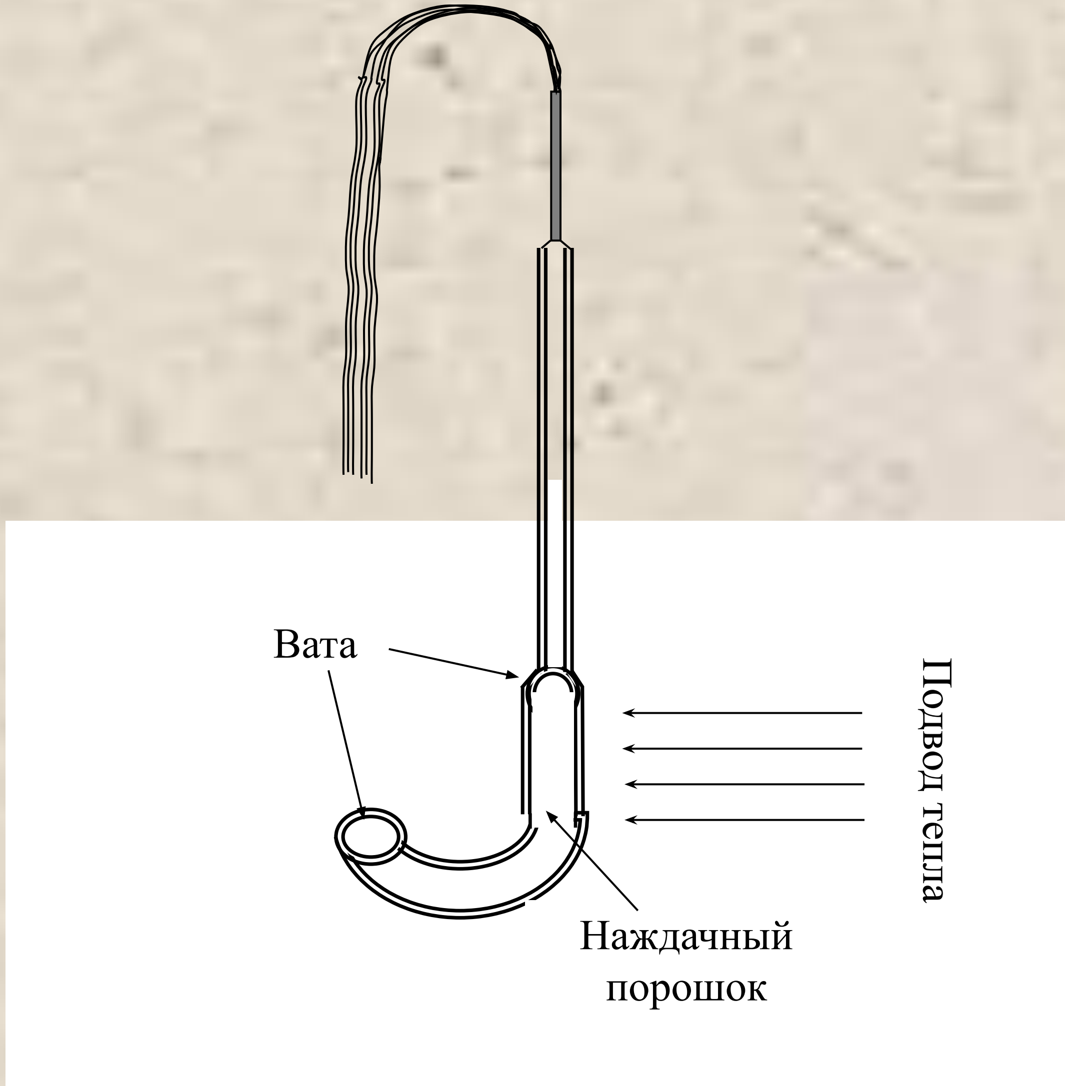
Теплоемкость вблизи лямбда-точки



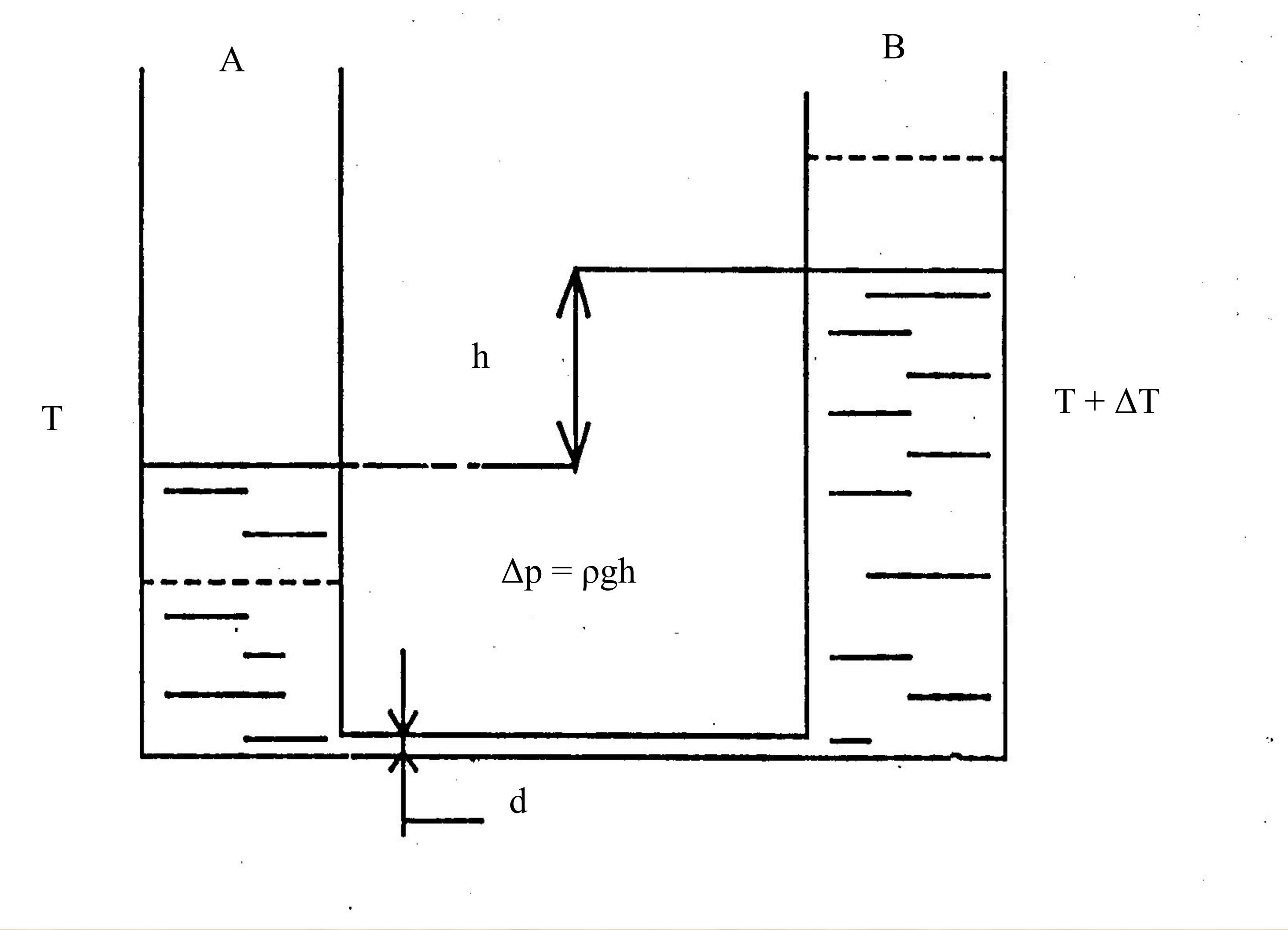
Скорость течения гелия II



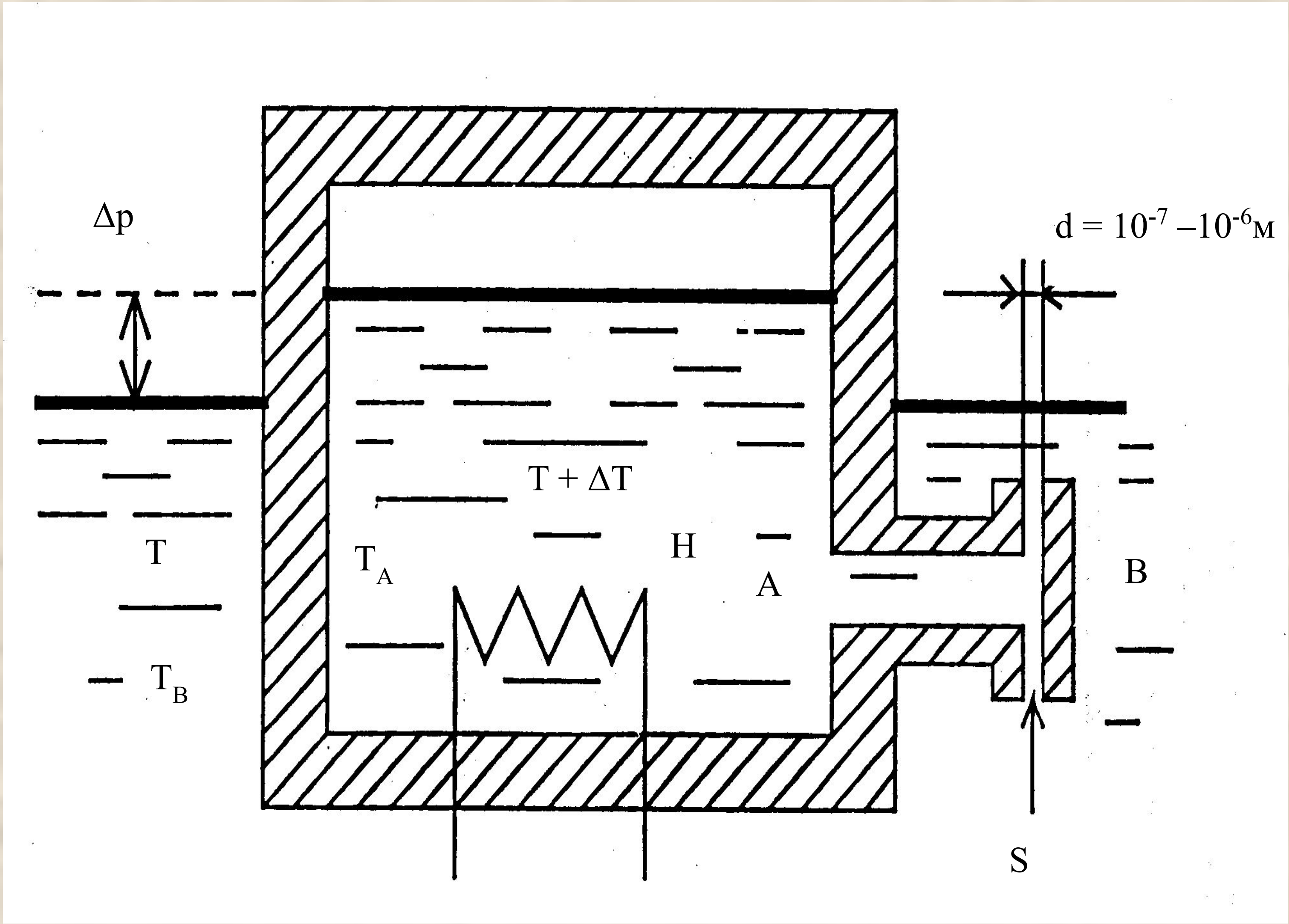
Эффект фонтанирования



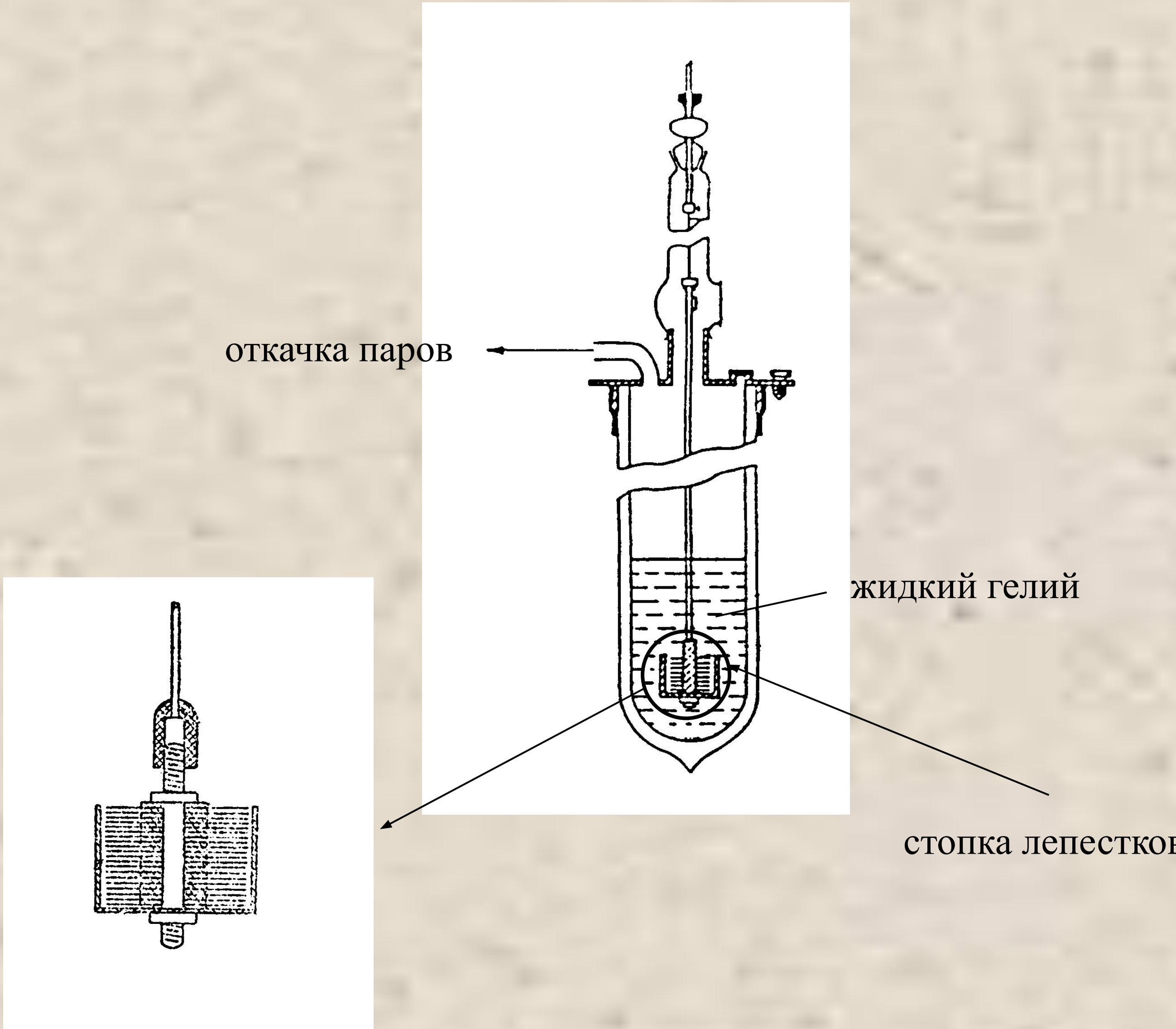
Механокалорический эффект



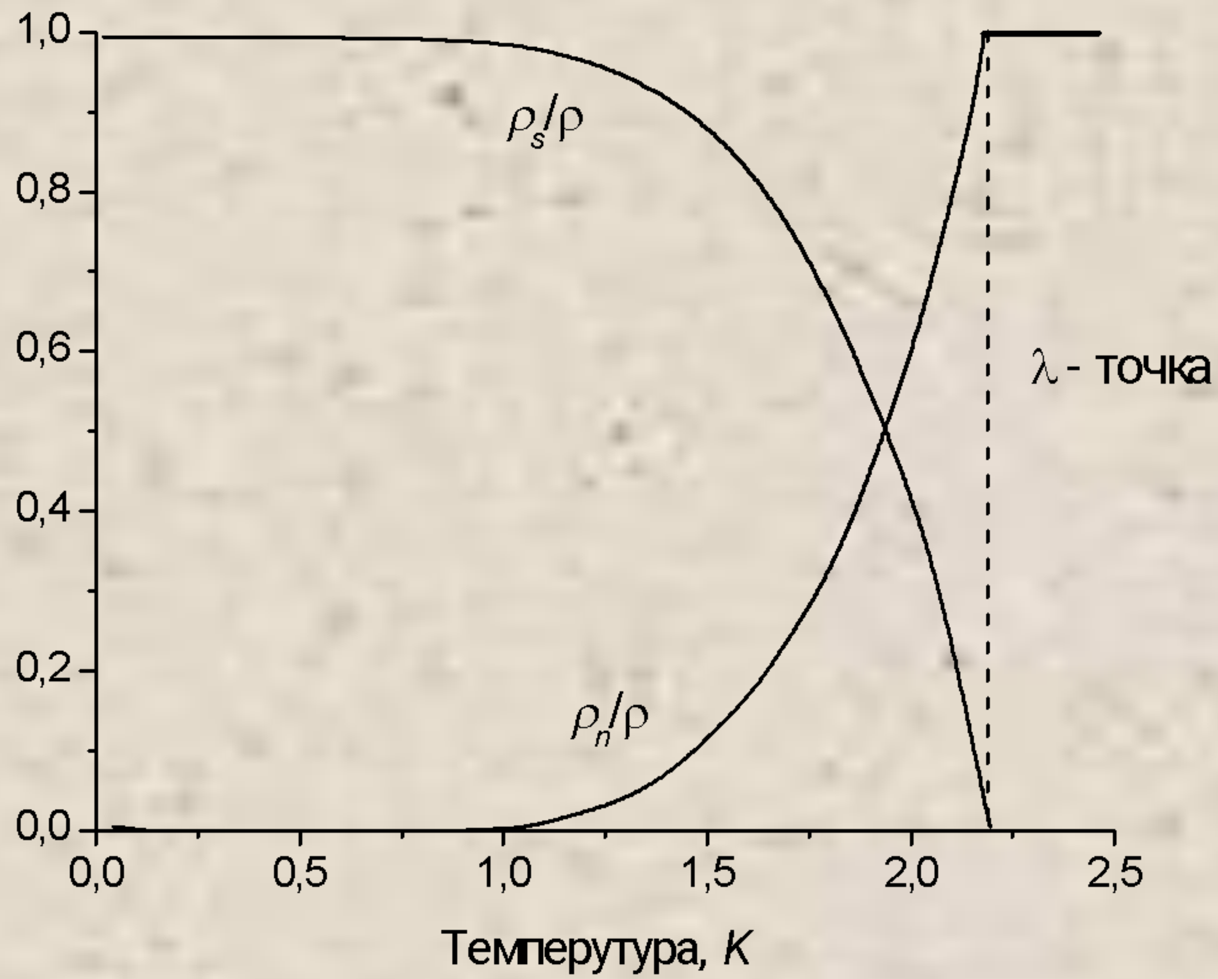
Термомеханический эффект. Эксперимент П.Л. Капицы



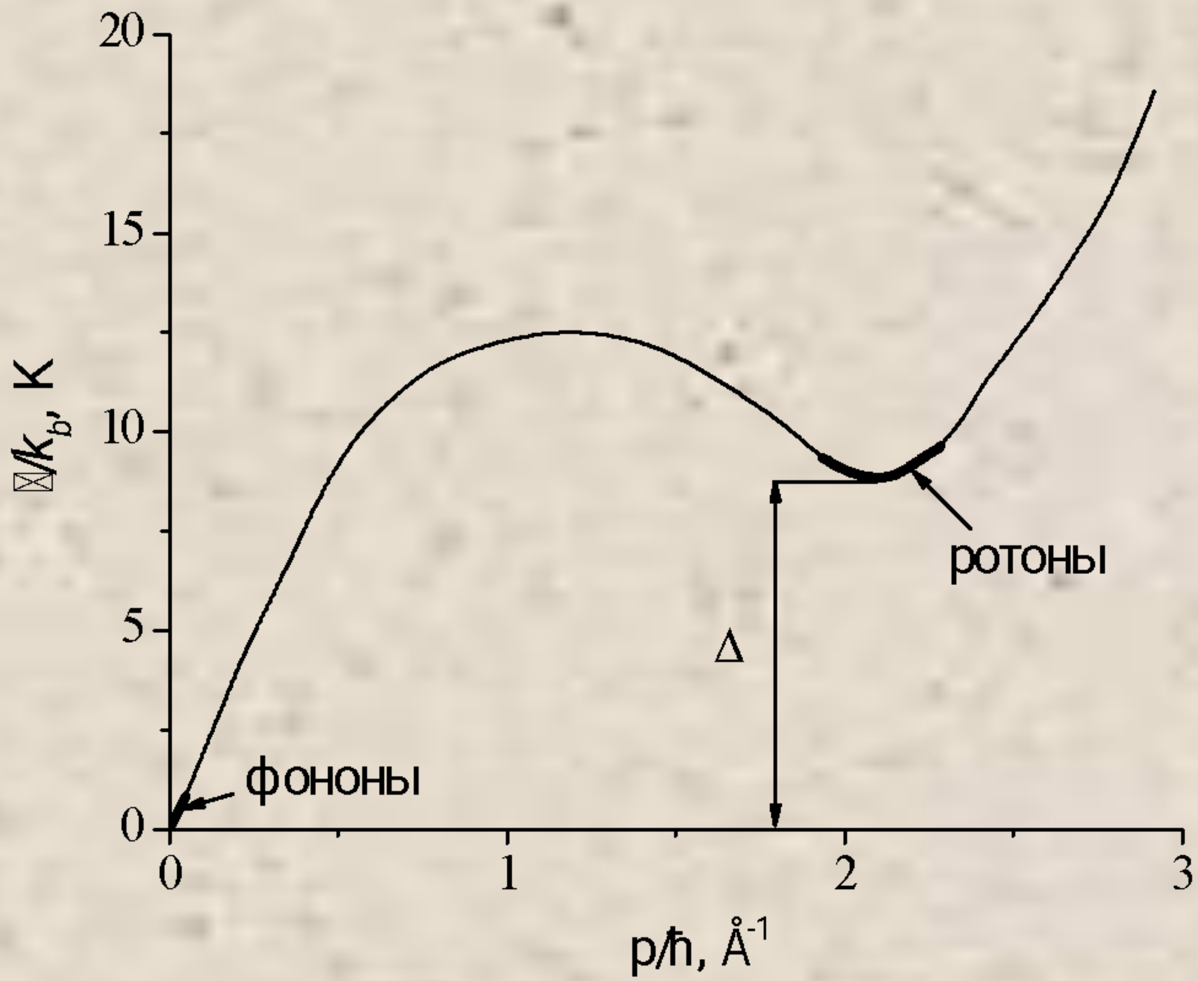
Экспериментальное определение вязкости



Плотности компонентов



Энергетический спектр



Уравнения двухскоростной гидродинамики

$$\rho' = \rho_n + \rho_s$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{j}\right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V_s}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\varphi + \frac{\boldsymbol{V}_s^2}{2}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial\left(\rho' S\right)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{F}\right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial\left(\rho' e_*\right)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{E}\right) = 0 \quad (7)$$

Требуется найти $\boldsymbol{j}, \Pi_{ik}, \varphi, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$

Преобразования уравнений двухскоростной гидродинамики

В покоящейся системе координат $\boldsymbol{j}=\rho'\boldsymbol{V};$ (8)

в движущейся системе координат $\boldsymbol{j}_0=\rho'\left(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_s\right).$ (9)

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_0+\rho'\boldsymbol{V}_s$$

$$\rho'e_*=\rho'\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho'\left[e+\frac{\left(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_s\right)^2}{2}\right]+\rho'\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}_s-\frac{\rho'\boldsymbol{V}_s^2}{2}=\rho'e_{*0}+\rho'\boldsymbol{V}_s\left(\boldsymbol{V}-\frac{\boldsymbol{V}_s}{2}\right)=$$

$$=\rho'e_{*0}+\rho'\boldsymbol{V}_s\left(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_s\right)+\frac{\rho'\boldsymbol{V}_s^2}{2}=\rho'e_{*0}+\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{V}_s+\frac{\rho'\boldsymbol{V}_s^2}{2}\quad(10)$$

$$d\left(\rho e_{*0}\right)=\mu d\rho+Td\left(\rho S\right)+\left(\boldsymbol{V}_n-\boldsymbol{V}_s\right)d\boldsymbol{j}_0\quad(11)$$

Выражения для искомых параметров

$$\boldsymbol{j}_0 = \rho_n \left(\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \right) \quad (12)$$

$$\boldsymbol{j} = \rho_n \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}} + \rho_s \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \quad (13)$$

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho_n V_{ni} V_{nk} + \rho_s V_{si} V_{sk} \quad (14)$$

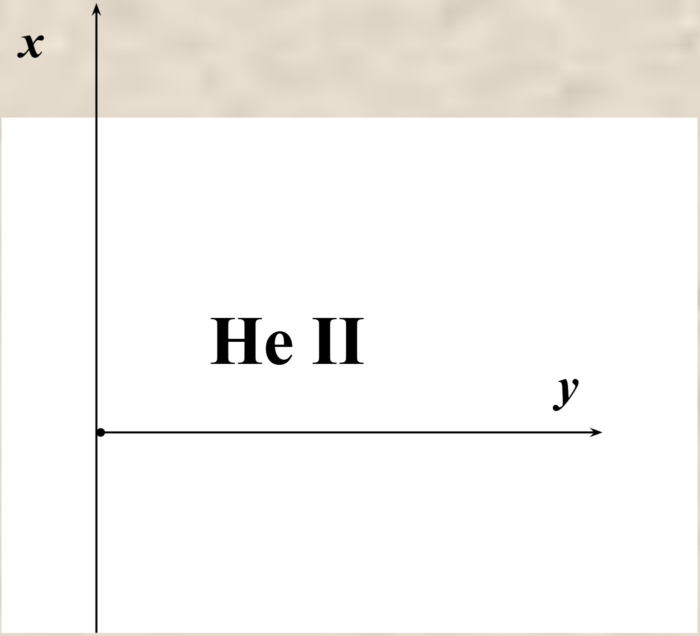
$$\varphi = \mu \quad (15)$$

$$\boldsymbol{F} = \rho' S \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{q} = T \cdot \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{q} = \rho' S T \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}} \quad (17)$$

Граничные условия



$$\boldsymbol{q} = 0$$

$$V_{ny}\Big|_{y=0} = 0 \qquad V_{sy}\Big|_{y=0} = 0$$

$$V_{nx}\Big|_{y=0} = 0$$

$$\boldsymbol{q} \neq 0$$

$$V_{ny}\Big|_{y=0} = \frac{q_y}{\rho' ST}$$

$$V_{sy}\Big|_{y=0} = -\frac{\rho_n}{\rho_s}\frac{q_y}{\rho' ST}$$

Распространение звука в гелии II

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x}=0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\rho S\frac{\partial V_n}{\partial x}=0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial t}+\frac{\partial \mu}{\partial x}=0 \quad (21)$$

Дифференцируя (18) по t и (19) по x,

получаем $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=-\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{j}}{\partial t \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{j}}{\partial x \partial t}=-\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (22)$$

Из (20) $$S\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial S}{\partial t}+\rho S\frac{\partial V_n}{\partial x}=0 \quad (23)$$

Из (18) и (13) $$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho_n\frac{\partial V_n}{\partial x}-\rho_s\frac{\partial V_s}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial\left(V_n-V_s\right)}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho_s S}\cdot\frac{\partial S}{\partial t} \quad (25)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-S\frac{\partial T}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+S\frac{\partial T}{\partial x} \quad (27)$$

Из (19) и (13) $$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_n\frac{\partial V_n}{\partial t}-\rho_s\frac{\partial V_s}{\partial t} \quad (28)$$

$$\frac{\partial\left(V_n-V_s\right)}{\partial t}=-\frac{\rho S}{\rho_n}\frac{\partial T}{\partial x} \quad (29)$$

Из (25) $$\frac{\partial^2\left(V_n-V_s\right)}{\partial x\partial t}=-\frac{\rho}{\rho_s S}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (30)$$

Из (29) $$\frac{\partial^2\left(V_n-V_s\right)}{\partial x\partial t}=-\frac{\rho S}{\rho_n}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\frac{\rho_s S^2}{\rho_n}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (32)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\frac{\partial p}{\partial t}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right)_T\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_p\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\dfrac{\rho_s S^2}{\rho_n}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\\[2ex]\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}\end{cases}$$

$$p = p_0 + \hat{p} \cdot \mathrm{Re}\left\{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right]\right\} \quad T = T_0 + \hat{T} \cdot \mathrm{Re}\left\{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \hat{p} \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right](i\omega)^2\left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \left\{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \hat{p} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \hat{T}\right\} \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right](i\omega)^2$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \hat{p} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \hat{T} = \frac{\hat{p}}{a^2} \text{ или } \quad \hat{p}\left[a^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - 1\right] + a^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \hat{T} = 0$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \hat{p} + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \hat{T} = \frac{\rho_s S^2}{\rho_n a^2} \cdot \hat{T} \text{ или } \quad \hat{p} \cdot a^2\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + \left[a^2\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n}\right] \cdot \hat{T} = 0$$

$$\text{определитель } \left[a^2\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n}\right]\left[a^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - 1\right] - a^4\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = 0$$

$$\left[a^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T - 1\right]\left[a^2\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - \frac{S^2\rho_s}{\rho_n}\right] = 0$$

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T}$$

$$a_2 = S\sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_n\left(\partial S/\partial T\right)_p}}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S$$

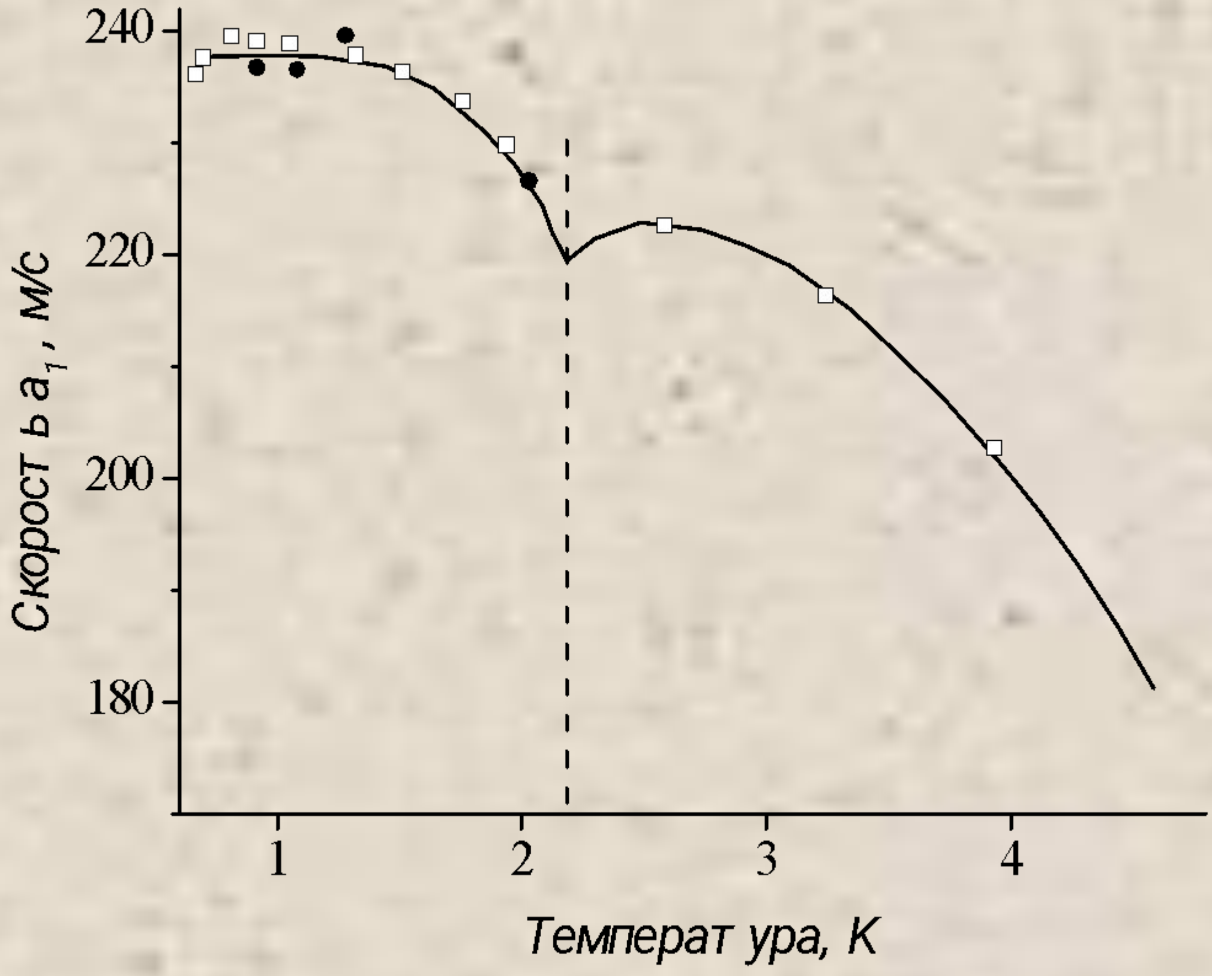
$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}$$

$$c_p = c_v = c$$

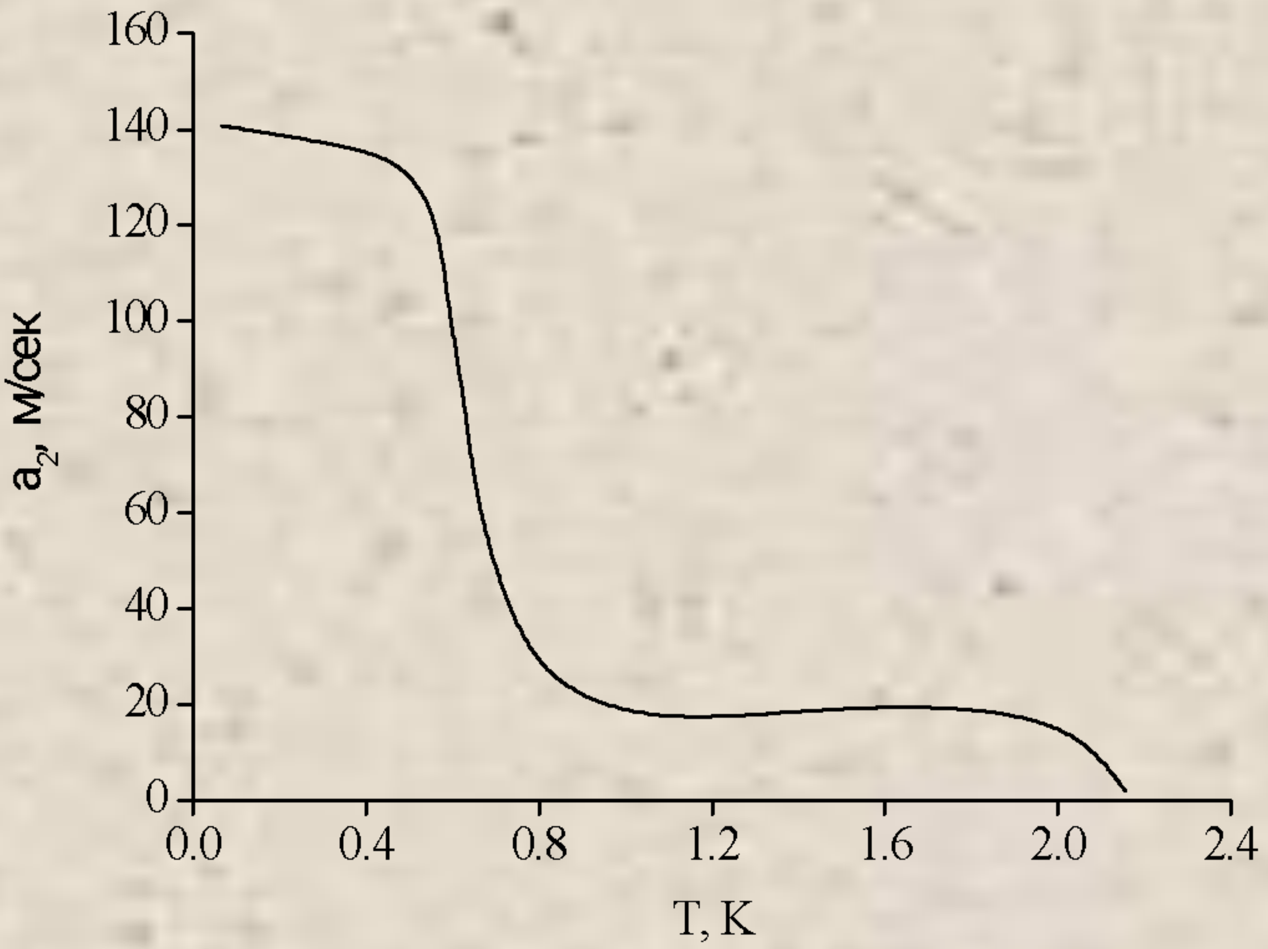
$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S}$$

$$a_2 = S\sqrt{\frac{\rho_s T}{\rho_n c}}$$

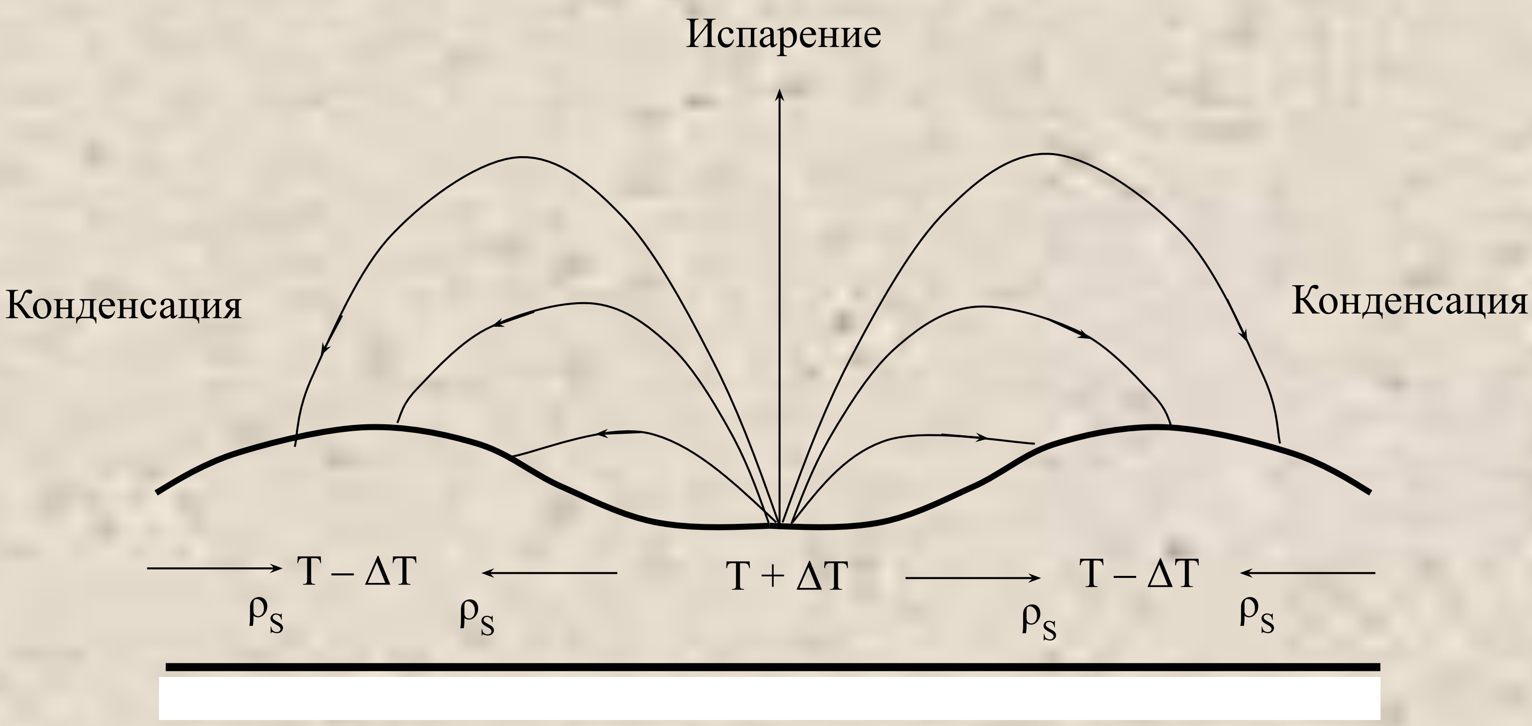
Скорость первого звука



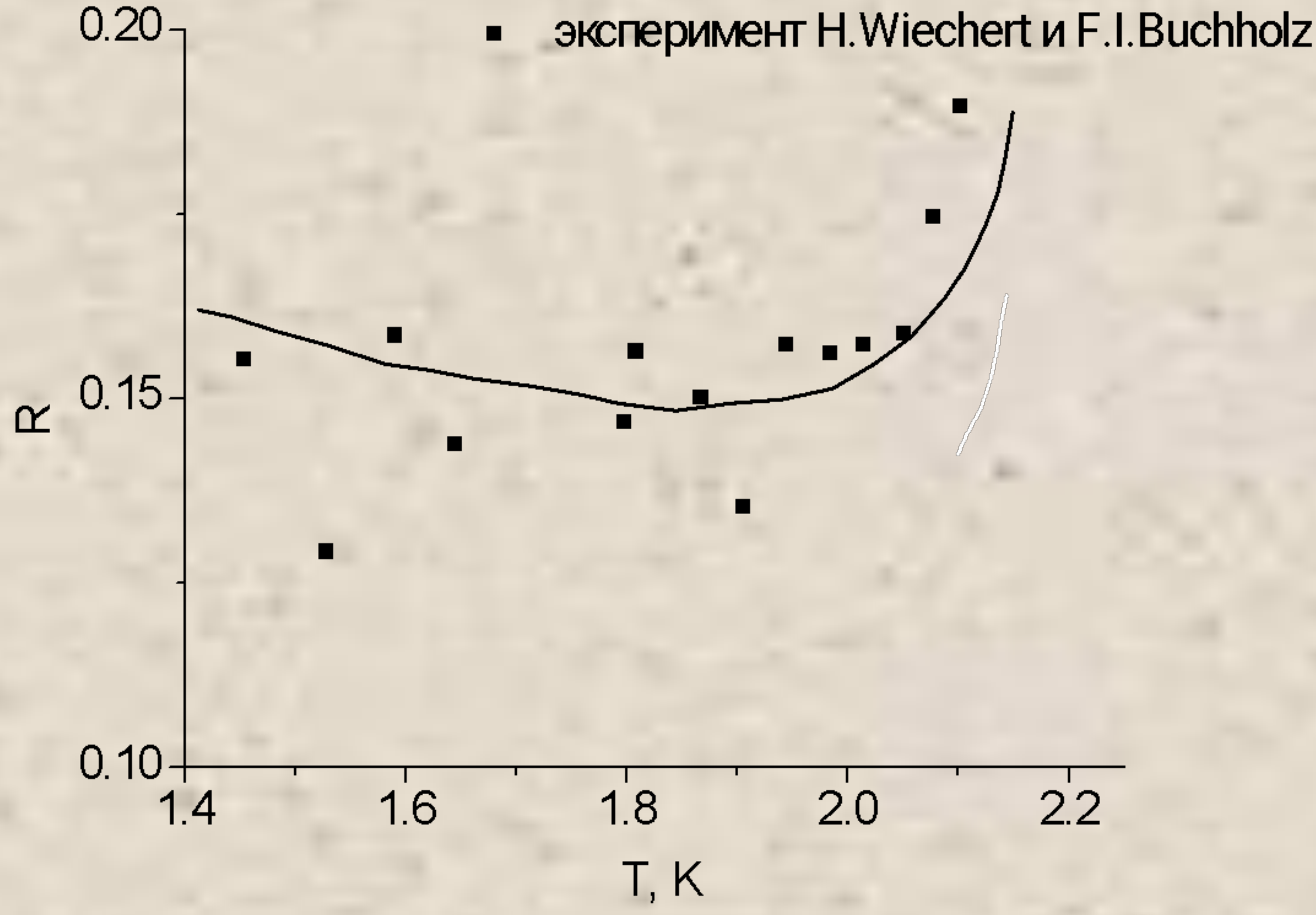
Скорость второго звука



Третий звук



Коэффициент отражения звука



Описание теплопереноса в He II

$$\frac{\partial(\rho' S)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho' S \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}}\right) = 0 \quad (39) \qquad \frac{\partial(\rho' S)}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}} = 0 \quad (40)$$

$$\boldsymbol{j} = \rho_n \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}} + \rho_s \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \qquad \rho_n = \boldsymbol{const} \quad \rho_s = \boldsymbol{const}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} = 0 \quad (41)$$

$$\Pi_{lk} = \delta_{lk} p + \rho_n V_{nl} V_{nk} + \rho_s V_{sl} V_{sk}$$

$$\frac{\partial(\rho_n V_{nl})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s V_{sl})}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial(\rho_n V_{nl} V_{nk})}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho_s V_{sl} V_{sk})}{\partial x_k} = 0 \quad (42)$$

$$\rho_n \frac{D\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}}}{dt} + \rho_s \frac{D\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}}}{dt} + \nabla p = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}}}{\partial t} + \nabla\left(\mu + \frac{V_s^2}{2}\right) = 0 \quad (44) \qquad (\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} = \nabla\left(\frac{V_s^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}} + \nabla\mu = 0 \quad (45) \qquad \nabla\mu = \frac{\nabla p}{\rho} - S\nabla T$$

Преобразованная система уравнений

$$\rho_s \frac{D\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}}}{dt} = -\frac{\rho_s}{\rho}\nabla p + \rho_s S \nabla T \quad (46)$$

$$\rho_n \frac{D\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}}}{dt} = -\frac{\rho_n}{\rho}\nabla p - \rho_s S \nabla T \quad (47)$$

$$\begin{cases} \rho_s \dfrac{D\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{s}}}{dt} = -\dfrac{\rho_s}{\rho}\nabla p + \rho_s S \nabla T - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{вз.тр}} & (46\ \ ) \\ \rho_n \dfrac{D\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}}}{dt} = -\dfrac{\rho_n}{\rho}\nabla p - \rho_s S \nabla T + \eta \Delta \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{вз.тр}} + \boldsymbol{F} & (47\ \ ) \end{cases}$$

Стационарный теплоперенос в He II при безвихревом сверхтекучем движении

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho_s}{\rho}\nabla p + \rho_s S \nabla T = 0 & (48) \\ -\dfrac{\rho_n}{\rho}\nabla p - \rho_s S \nabla T + \eta \Delta \boldsymbol{V_n} = 0 & (49) \end{cases}$$

$$\nabla p = \eta \Delta \boldsymbol{V_n} \quad (50)$$

При ламинарном нормальном движении

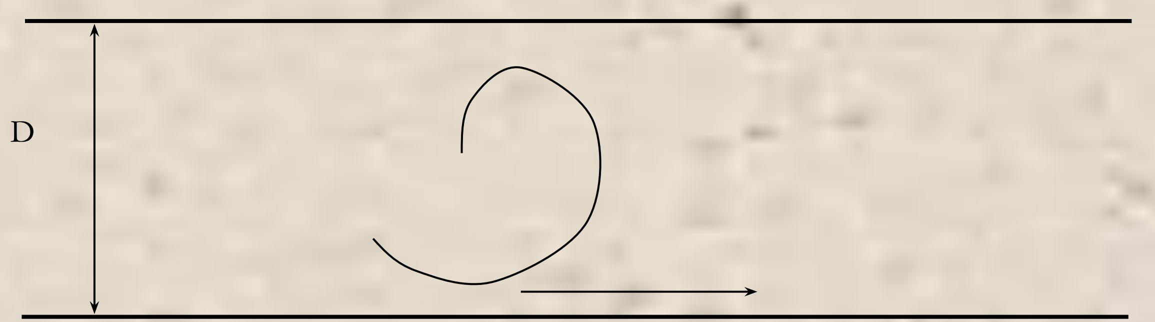
$$\overline{V}_n = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{8\eta l} \quad (51)$$

$$\nabla p = \rho S \nabla T$$

$$q = \rho S T \overline{V}_n = \rho S T \frac{\rho S (T_1 - T_2) R^2}{8\eta l} = -(\rho S)^2 T \frac{(T_2 - T_1) R^2}{8\eta l} = -\frac{(\rho S)^2 T R^2}{8\eta} \nabla T \quad (52)$$

$$C = \frac{8\eta}{(\rho S)^2 T R^2}$$

Вихри сверхтекучего компонента
Критическая скорость сверхтекучего движения



$$\Gamma = \pi d V_s$$

$$\Gamma = n\frac{h}{m}$$

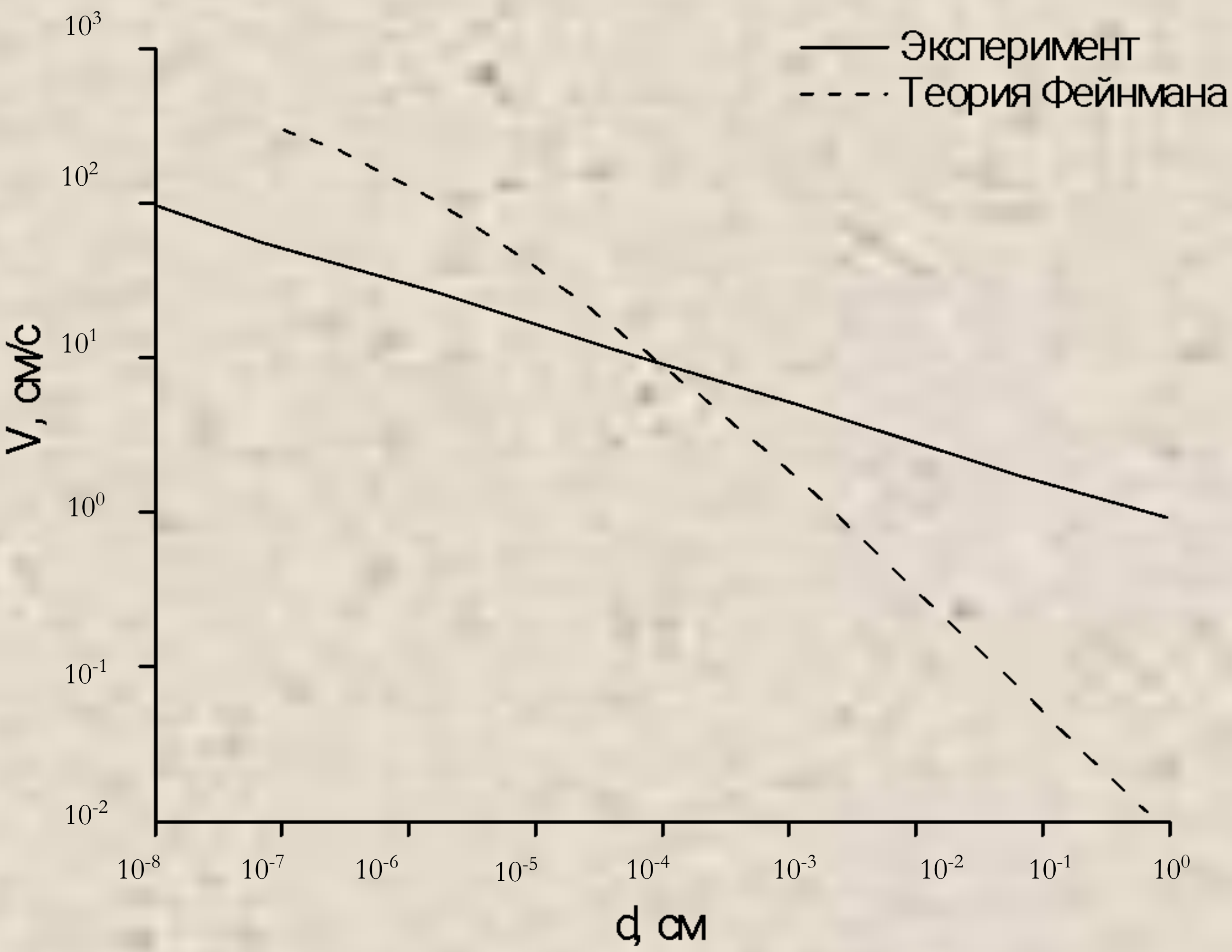
$$\pi d V_s = n\frac{h}{m}$$

$$d = D \qquad n = 1$$

$$V_{scr} = \frac{h}{\pi D m} \quad (53)$$

$$V_{scr} = \frac{h}{\pi D m}\left(\ln\frac{4D}{a_0} - K'\right) \quad (54)$$

$$V_{scr} = \frac{1}{D^{1/4}} \quad (55)$$



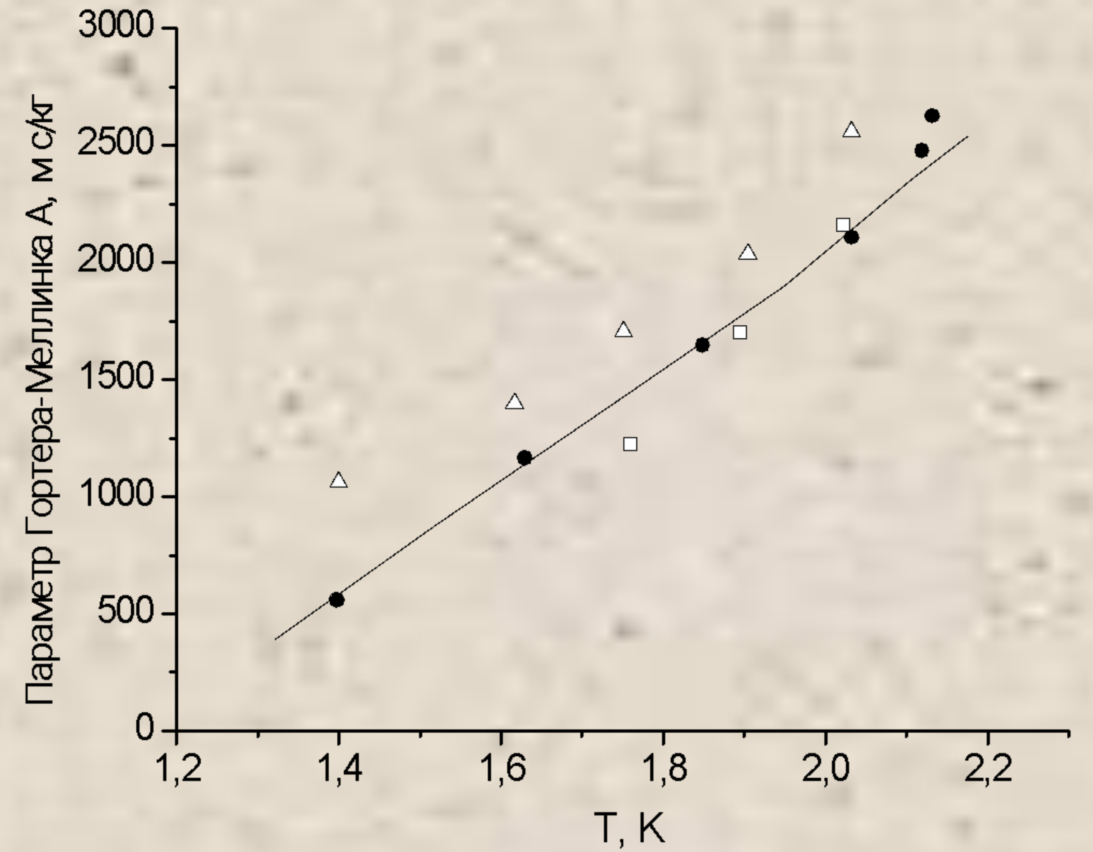
Эксперимент
Теория Фейнмана
V, см/с
d, см
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-8}
10^{-7}
10^{-6}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^0

Сила взаимного трения

$$f \sim -\frac{\rho_n \rho_s}{\rho^2}\eta\left(\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_s\right)$$

$$L \sim \left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)^2 \left(\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_s\right)^2$$

$$\boldsymbol{F}_{вз.тр} = f \cdot L$$



$$\boldsymbol{F}_{вз.тр} = -A\rho_n\rho_s\left(\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_s\right)^3 \quad (56)$$

Расчет стационарного теплопереноса в He II с учетом силы взаимного трения

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho_s}{\rho}\nabla p + \rho_s S \nabla T + A\rho_n\rho_s\left(\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_s\right)^3 = 0 \quad (57) \\ -\dfrac{\rho_n}{\rho}\nabla p - \rho_s S \nabla T + \eta\Delta\boldsymbol{V}_n - A\rho_n\rho_s\left(\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_s\right)^3 = 0 \quad (58) \end{cases}$$

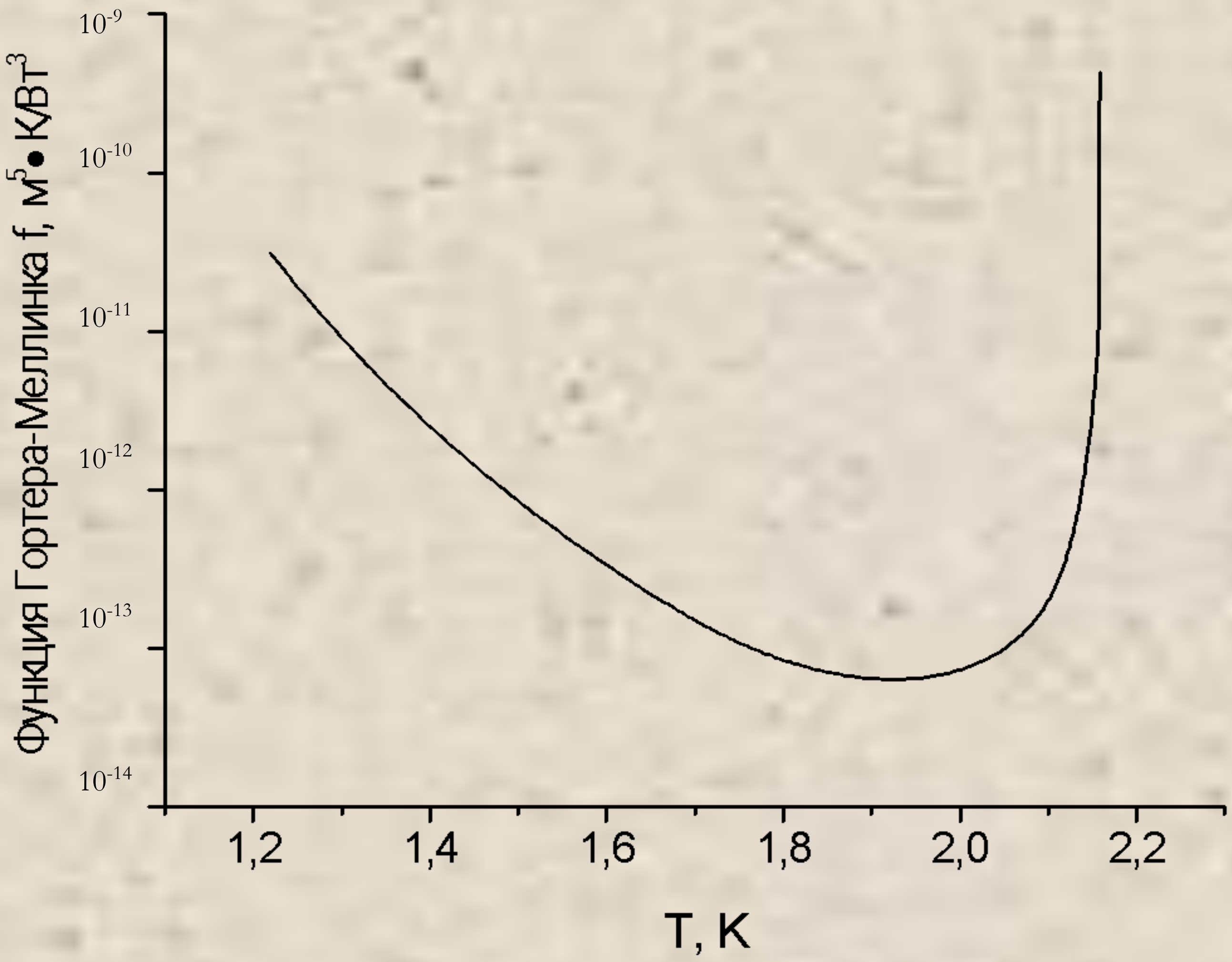
$$\nabla T = -\frac{A\rho_n\left(\boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{V}_s\right)^3}{S}$$

$$\nabla T = -\frac{A\rho_n\rho^3\boldsymbol{V}_n^3}{S\rho_s^3}$$

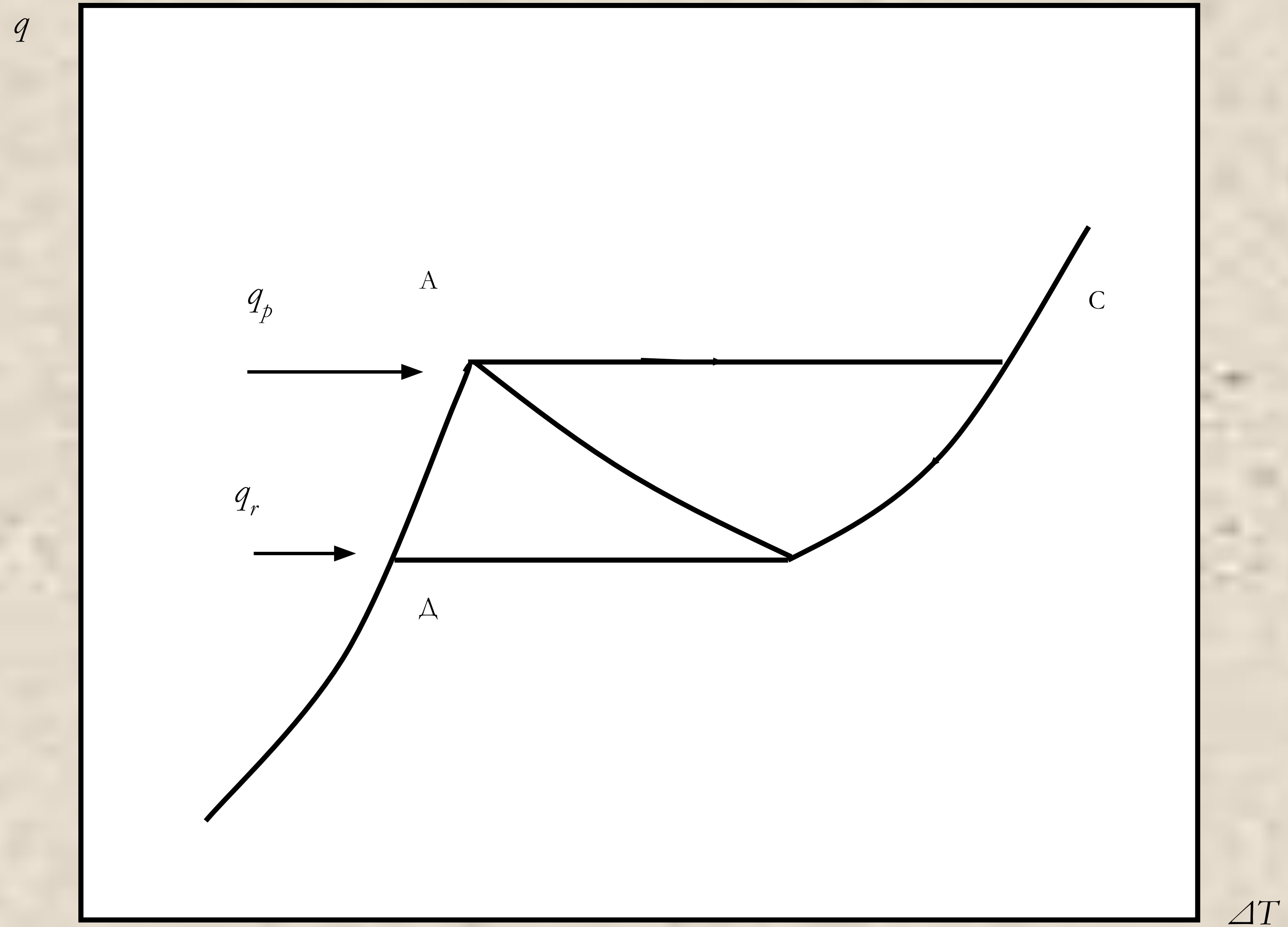
$$\nabla T = -\frac{A\rho_n}{\rho_s^3 S^4 T^3}\boldsymbol{q}^3 = -f\left(T\right)\cdot\boldsymbol{q}^3 \quad (59)$$

$$\nabla T = -C\boldsymbol{q} - f\left(T\right)\cdot\boldsymbol{q}^3 \quad (59a)$$

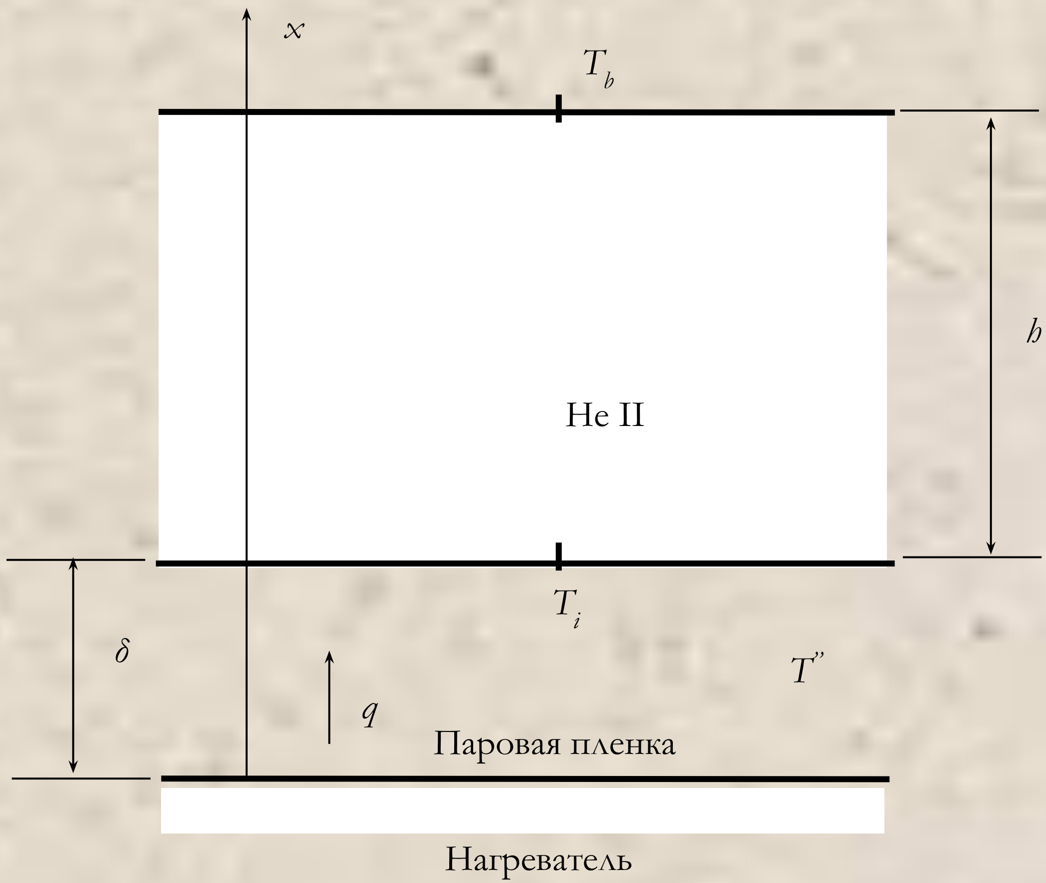
Функция Гортера-Меллинка



Кривая кипения He II



Кипение гелия II



$$q_R = 2{,}27 \cdot \left(p'' - p_{\text{нас}}\left(T_i\right)\right) \cdot \sqrt{2RT_i}$$

$$\tilde{q}_R = {q_R} \Big/ \left(p_{\text{нас}}\left(T_i\right) \cdot \sqrt{2RT_i}\ \right) << 1$$

$$q_R = 8 \cdot \left(\frac{p''}{p_{\text{нас}}\left(T_i\right)} - 1 \right) \cdot p'' \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}}$$

$$\frac{dT}{dr} = -f\,(T) \cdot q^3$$

$$q_i \cdot r_i = q \cdot r \qquad q = \frac{q_R \cdot r_w}{r}$$

$$\frac{dT}{dr} = -f(T) \cdot \frac{{q_R}^3 \cdot {r_w}^3}{r^3}$$

$$\int_{T_i}^{T_\infty} \frac{dT}{f(T)} = -{q_R}^3 \cdot {r_w}^3 \cdot \int_{r_w}^{\infty} \frac{dr}{r^3}$$

$$\int_{T_i}^{T_b} \frac{dT}{f(T)} = -\int_{T_b}^{T_i} \frac{dT}{f(T)} = -\frac{T_i - T_b}{\tilde{f}(T)} \qquad \tilde{f}(T) = \frac{T_i - T_b}{\int_{T_b}^{T_i} \frac{dT}{f(T)}}$$

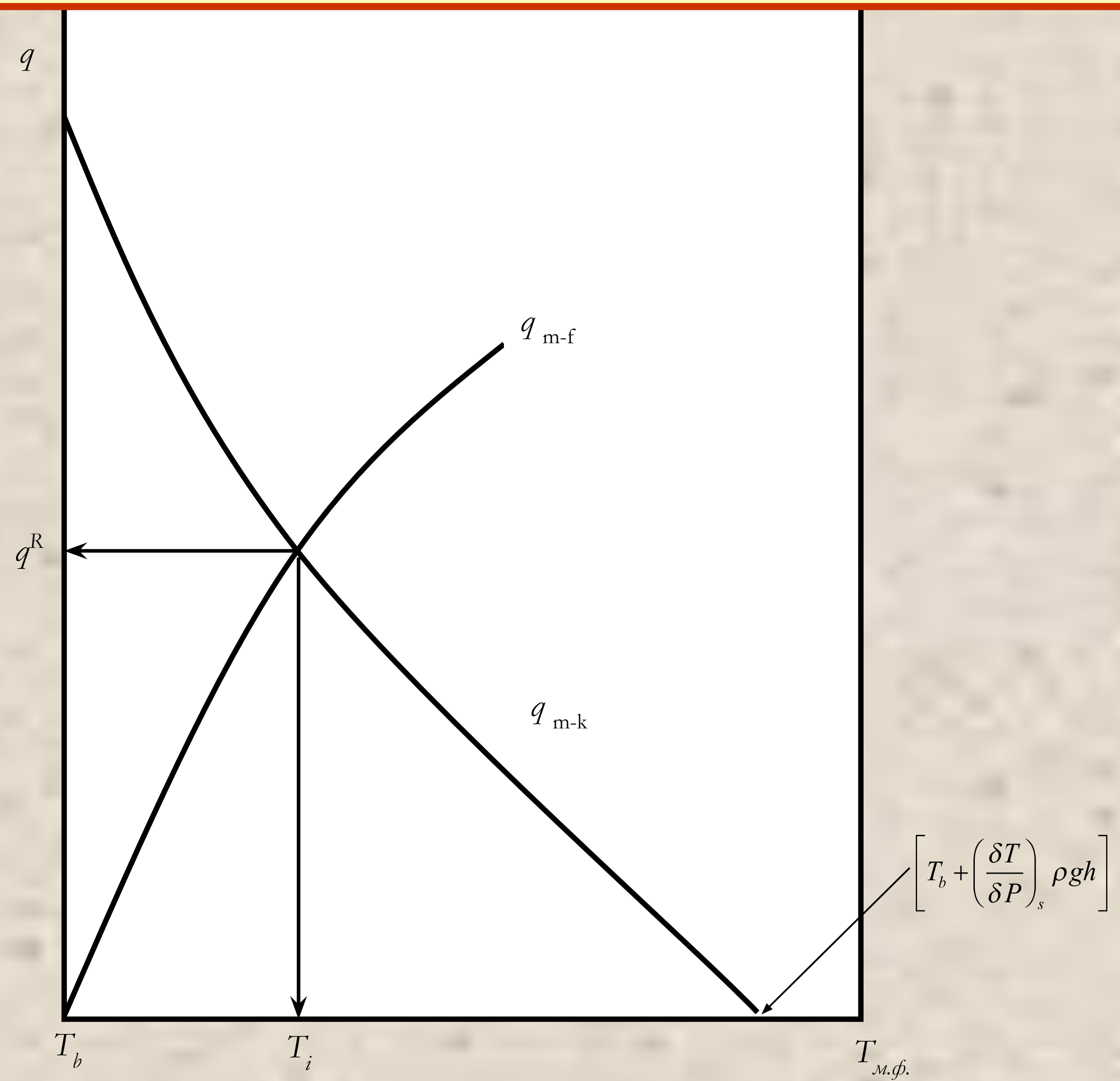
$$-\frac{T_i - T_b}{\tilde{f}(T)} = \frac{q_R{}^3 \cdot r_w{}^3}{2r^2} \Big|_{r_w}^{\infty} = -\frac{q_R{}^3 \cdot r_w{}^3}{2r_w{}^2} = -\frac{q_R{}^3 \cdot r_w}{2}$$

$$T_i - T_b = \tilde{f}(T) \cdot \frac{q_R{}^3 \cdot r_w}{2}$$

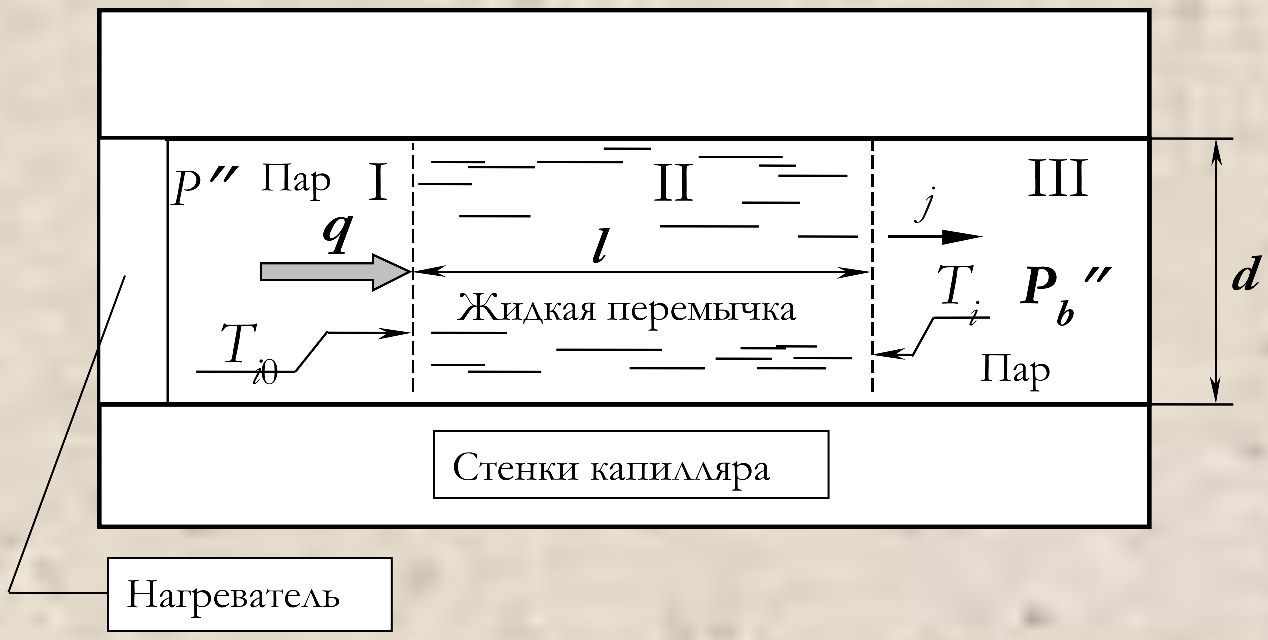
$$p'' = p_b + \rho g h$$

$$\Delta T = \left({dT}/{dp} \right)_{\text{нас.}} \cdot \rho g h$$

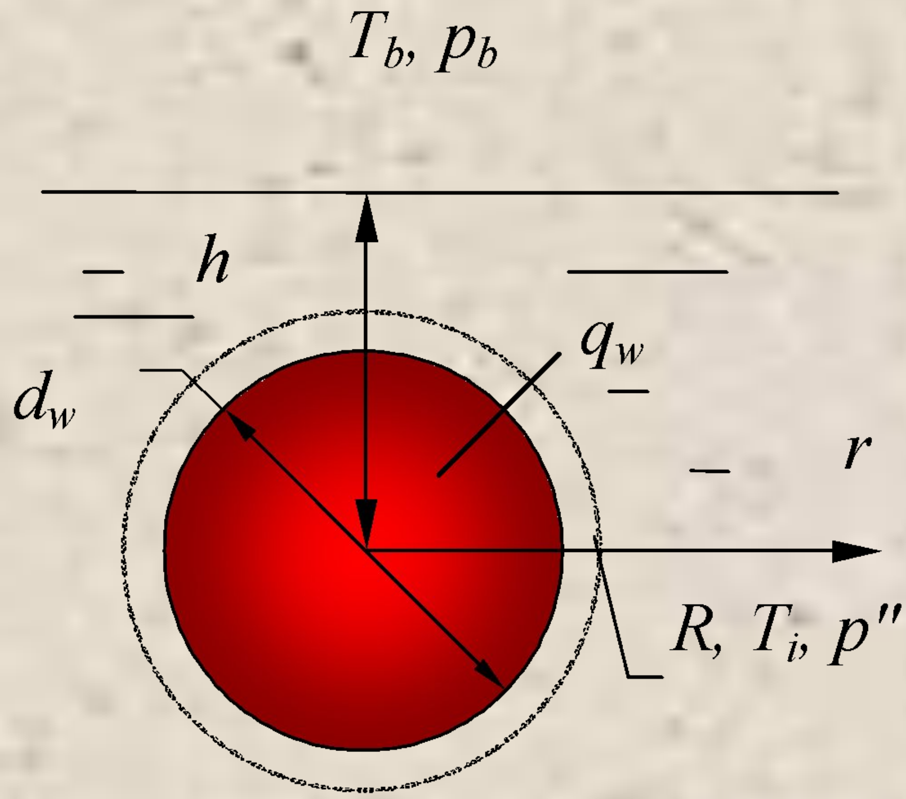
Определение востановительного потока



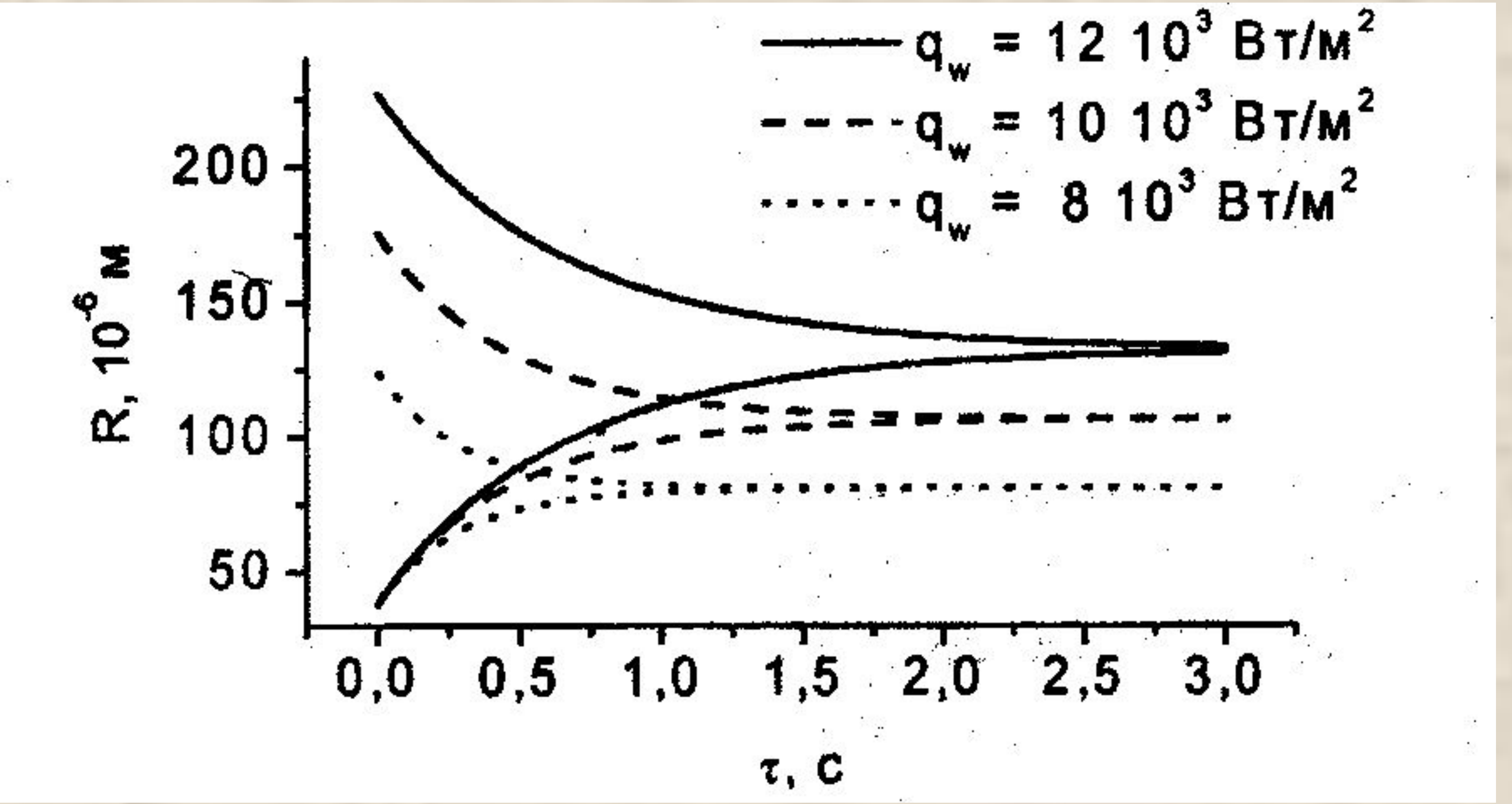
Движение перемычки гелия II в капилляре



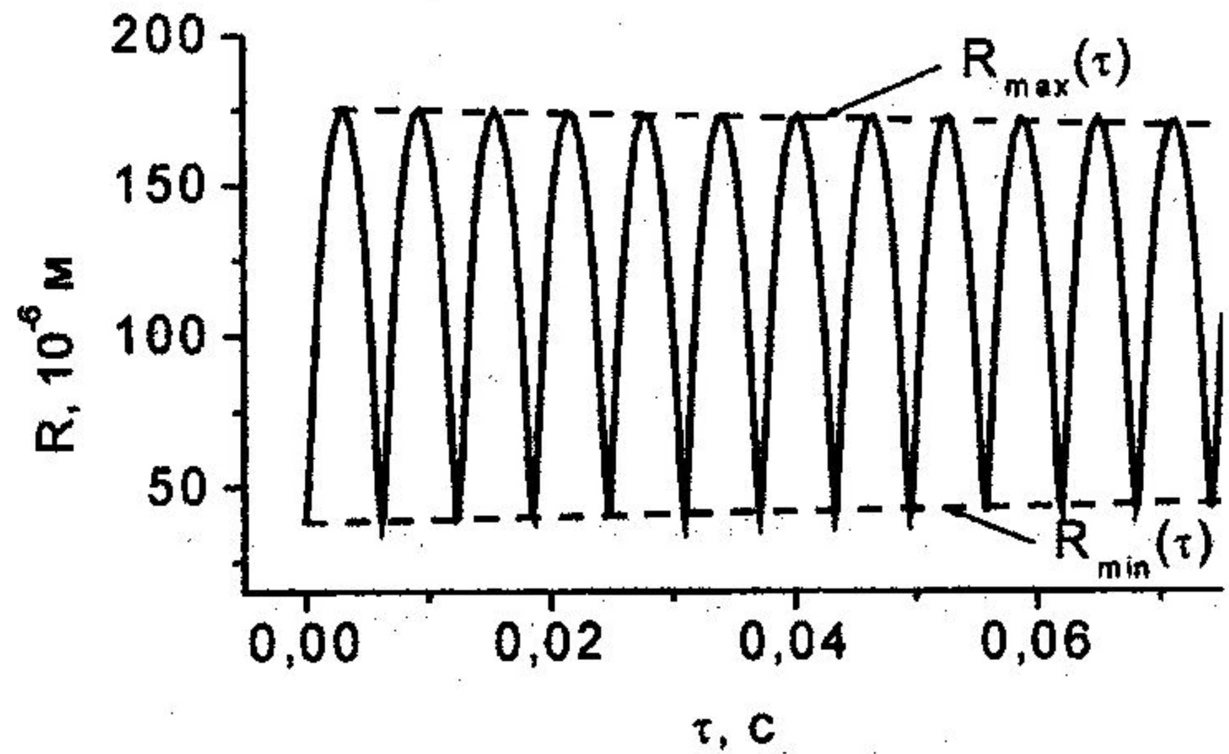
Кипение гелия II на цилиндрическом нагревателе



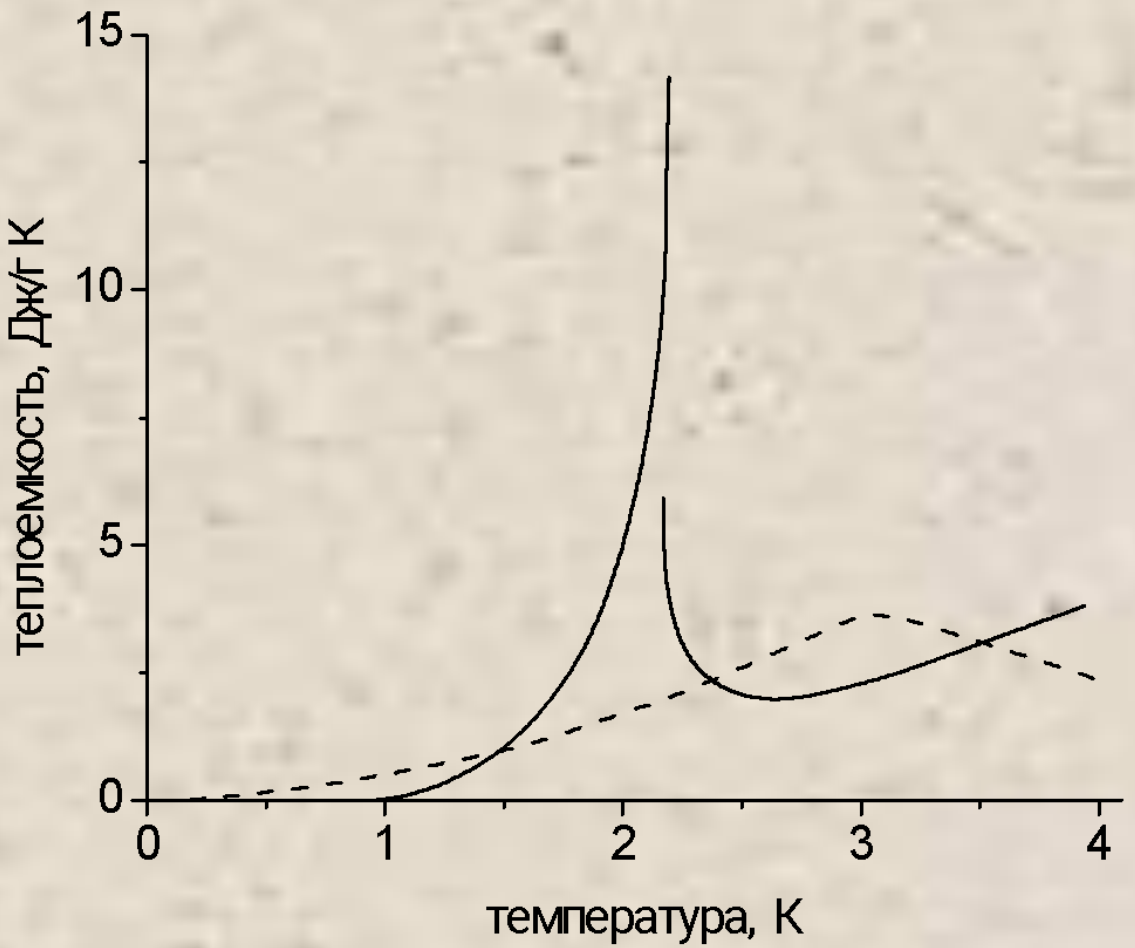
Колебания межфазной поверхности



Колебания межфазной поверхности



Теплоемкость гелия II



Плотность нормального компонента