



ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Определение:

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк (i) и n столбцов (j).
Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы (a_{ij}).

Матрица **A** размера **m × n**

$$A_{m \times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения:

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A , B , C , D и т.д. ;

Матрицы обозначаются **скобками**: $()$ или $[]$;

$A_{m \times n}$ – матрица размерности $m \times n$;

a_{ij} – элемент матрицы i -ой строки и j -го столбца, где $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$

Определения:

Две матрицы называются равными, если у них одинаковая размерность и совпадают строки и столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется квадратной.

В случае квадратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

побочная диагональ

главная диагональ

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ** – диагональ идущая с левого верхнего угла в правый нижний,
элементы $a_{n1}, \dots, a_{22}, \dots, a_{1n}$ – **побочную диагональ** матрицы – диагональ идущая с верхнего правого угла в левый нижний.

Определения:

Элементы матрицы a_{ij} , у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются диагональными.

Если в квадратной матрице все диагональные элементы равны 1 , а остальные элементы равны 0 , то она называется единичной.

Определение:

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой.

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$$

Определение:

Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \boxtimes \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица
размера $m \times n = 3 \times 3$, где
 $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 1$ -
элементы **главной**
диагонали, $a_{31} = 0$, $a_{22} = 4$,
 $a_{13} = -2$ - элементы
побочной диагонали

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \text{матрица - столбец}$$

$$C = [1 \ 2 \ -5 \ 4 \ 0] - \text{матрица - строка}$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью матриц удобно описывать различного рода зависимости.

Пример:

Распределение ресурсов по отраслям экономики:

Ресурсы	<i>Промышленность</i>	<i>с/х</i>
Эл. энергия	8	7.2
Труд. ресурсы	5	3
Водные ресурсы	4.5	5.5

Эту зависимость можно представить в виде матрицы:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Где элемент a_{ij} показывает сколько i – го ресурса потребляет j – отрасль.

Например, a_{32} показывает, сколько воды потребляет сельское хозяйство.

Действия над матрицами

1) Умножение матриц на число

Чтобы умножить матрицу на произвольное число (λ), надо каждый элемент этой матрицы (a_{ij}) умножить на это число.

Полученные произведения образуют итоговую матрицу.

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -28 \\ 7 & 70 \end{pmatrix}$$

Пусть дана матрица: $A_{m \times n} = (a_{ij})$
Умножаем ее на число λ : $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij})$

Где каждый элемент матрицы:

$$a_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Где: $i = 1, 2 \dots m$

$j = 1, 2 \dots n$

Пример: Умножая матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2) Сложение (вычитание) матриц

Складываются (вычитаются) матрицы только одинаковой размерности.

Получается матрица $A \pm B$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов

исходных матриц:

$$A = (a_{ij}) \text{ и } B = (b_{ij})$$

Где каждый элемент матрицы C :

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Пример 1

Найти: 1) сумму и 2) разность матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$1) A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2) A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 2

Найти: 1) сумму и 2) разность матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение:

$$1) A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -10 \\ -1 & 9 & 6 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad 2) A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -8 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i -ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j -го столбца второй.

Результатом умножения двух матриц A и B
 $m \times k$ $k \times n$

где элемент матрицы a_{ij} , а элемент матрицы b_{ij}

является **матрица** C размера $m \times n$, т.е. :

$$C = A \cdot B$$

$m \times n$ $m \times k$ $k \times n$

где каждый элемент матрицы C , т.е. C_{ij} равен:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Даны две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

размера $m \times n$ и $n \times k$ соответственно.

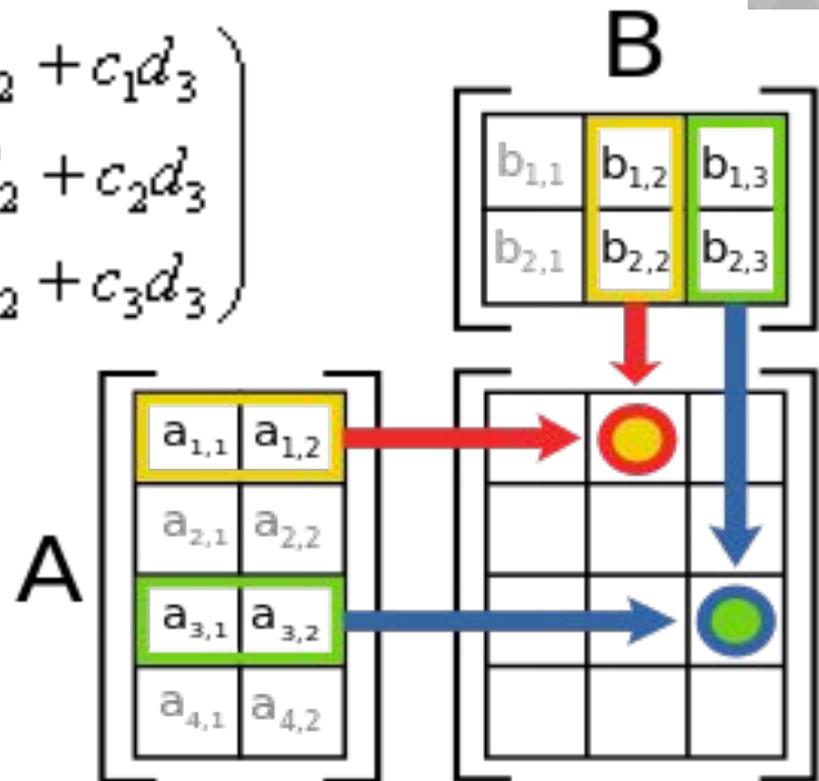
Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$ с элементами c_{ij} равными сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B , т.е.
 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, k$

Умножаем по принципу: **строка на столбец**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$$



Пример 1:

Найти

произведение
матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Эти две матрицы так же можно перемножить и в обратном порядке, так как **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй** (это исключение, см. свойство 3):

$$\begin{matrix} B \cdot A \\ 3 \times 2 \quad 2 \times 3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$m=2$
2 столбца

$$\left. \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} n=2 \text{ строки}$$

$m = n$, значит, умножать
МОЖНО

$m=1$
столбец

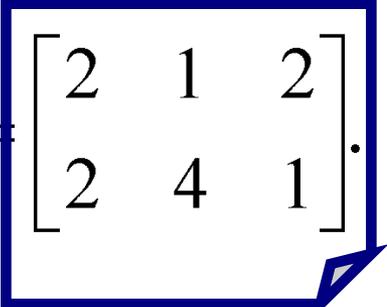
$$\left. \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right\} n=2 \text{ строки}$$

$m \neq n$, значит, умножать
НЕЛЬЗЯ

Пример 2: Найти произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

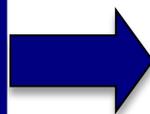
Решение:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

4) Транспонирование матриц

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A , если в ней поменяли местами строки и столбцы.

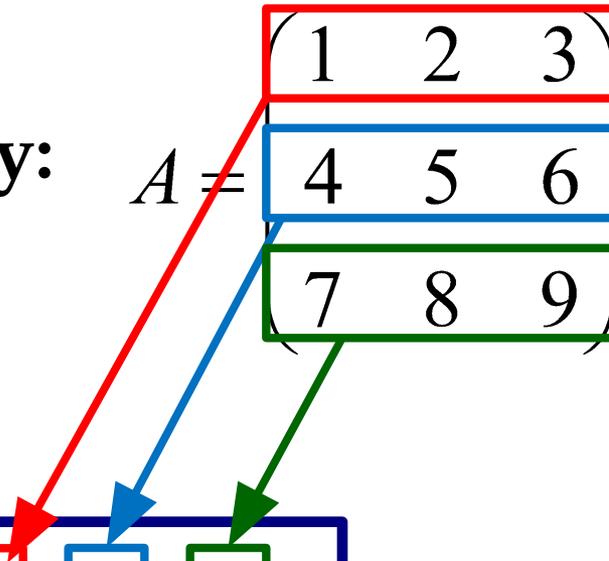
$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



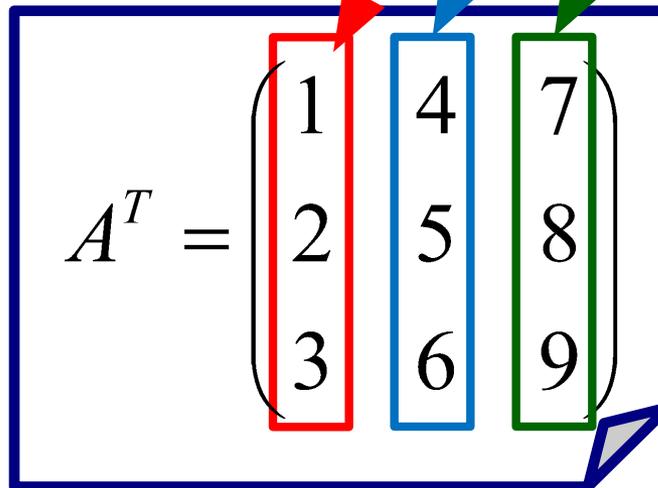
$$A^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример:

Транспонировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$


Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$


5) Возведение матриц в степень

Матрица $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}$ называется k степенью квадратной матрицы A

$$A^5 = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{5 \text{ раз}} = A^2 \cdot A^2 \cdot A$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Свойства перечисленных операций над матрицами:



$$A \cdot \lambda = \lambda \cdot A$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$



$$A \pm B = B \pm A$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$



$$A(B+C)=AB+AC$$

$$A(BC)=(AB)C$$

**Умножение матриц в общем случае
некоммутативно:**

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$



$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Определение:

Понятие определителя (детерминанта) матрицы вводится **только для квадратных матриц**.

Определителем или детерминантом (от лат. **determinare** - **определять**) квадратной матрицы **A** называется некоторое **число**, которое можно поставить ей в соответствие следуя определённым правилам.

Обозначения: $|\mathbf{A}|$, $\det(\mathbf{A})$, Δ

Определители записываются в прямых скобках $| \quad |$.

Определения:

1) Определителем первого порядка называется **число**, соответствующее квадратной матрице содержащей один элемент, т.е. $\mathbf{A} = (a_{11})$, которое равно самому элементу $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Пример:

Вычислить определитель для матрицы: $\mathbf{A} = (5)$

Решение: $|\mathbf{A}| = 5$.

2) Определителем второго порядка

называется **число**, соответствующее $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

квадратной матрице и вычисленное по

следующему правилу: **произведение элементов,**

стоящих по главной диагонали минус

произведение элементов, стоящих по

побочной диагонали, т.е. $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

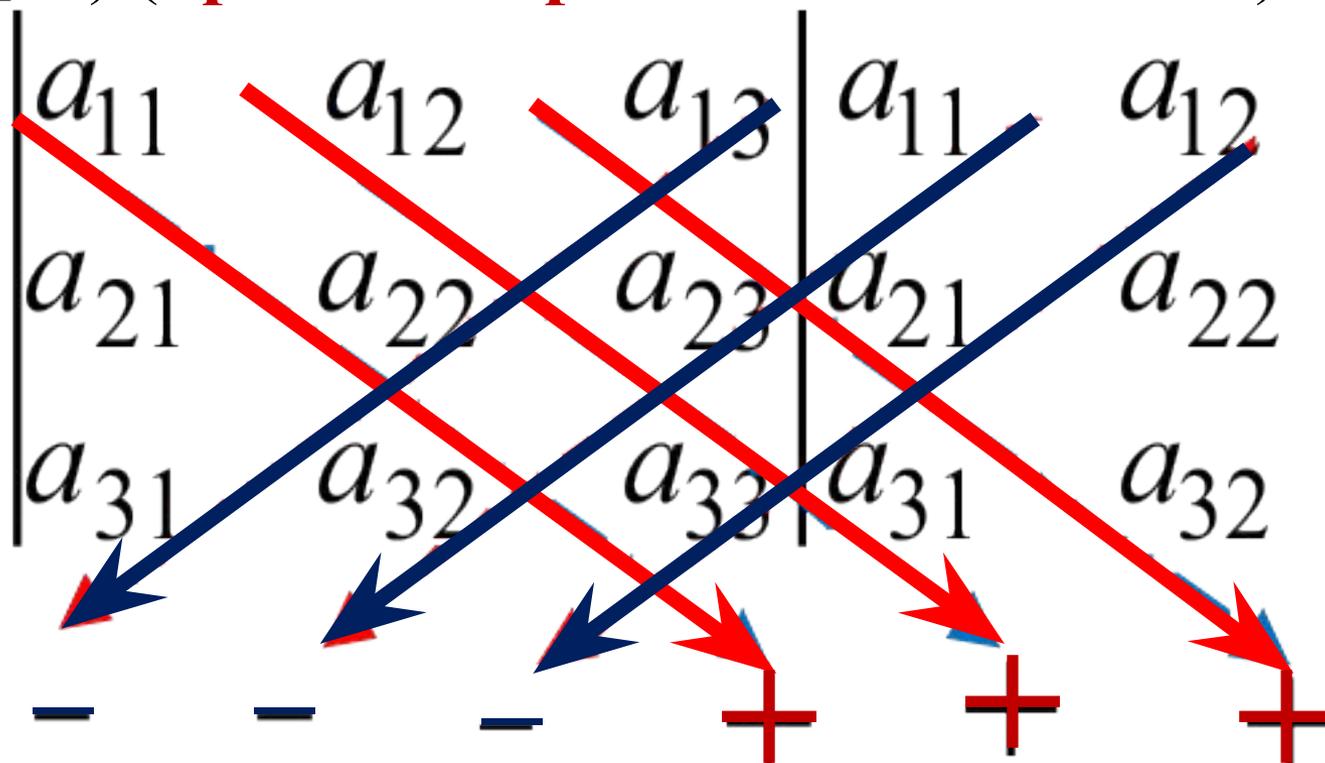
правило диагоналей:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Пример:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot 3 = 14 - (-15) = 29.$$

3) **Определителем третьего порядка** называется **число**, соответствующее квадратной матрице размера 3×3 и вычисленное по **правилу Саррюса** (франц. математик Пьер Фредерик Саррюс) (**правило параллельных полосок**):



произведения

произведения

со знаком минус «-»

со знаком плюс «+»

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} =$$

со знаком минус «-» со знаком плюс «+»

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot (-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 \cdot 9 = \\ &= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204 \end{aligned}$$

Можно свернуть форму вычисления по правилу Саррюса и получить **правило треугольников**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right)^{ "+" } + \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right)^{ "-" } =$$

произведения со знаком плюс «+»
произведения со знаком минус «-»

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - \\ - 3 \cdot 4 \cdot 5 = -10 + 4 - 18 + 4 + 3 - 60 = -77.$$

Приведение определителя к треугольному виду:

Определение. Определитель, у которого все элементы, находящиеся над (под) главной (боковой) диагональю, равны нулю, называются **определителем треугольного вида**.

Утверждение 1. Приведение любого определителя к треугольному виду всегда возможно.

Теорема Гаусса. Определитель треугольного вида равен:

- по главной диагонали - произведению элементов его главной диагонали.
- по боковой диагонали - произведению элементов его боковой диагонали со знаком "-"

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} I + II \\ I * (-3) + III \end{array} \right\} =$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -5 \end{vmatrix} = \left\{ II * (2) + III \right\} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 \cdot (-1) = 5$$

4) Определителем n -го порядка называется **число**, соответствующее квадратной матрице размера $n \times n$ и вычисленное по **теореме Лапласа**

Определитель квадратной матрицы n -го порядка равен сумме попарных **произведений** элементов **любой строки (столбца)** на их **алгебраические дополнения**:

Разложение по элементам i -й строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}$$

Разложение по элементам j -го столбца:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj}$$

Алгебраические дополнения и миноры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В квадратной матрице n -го порядка рассмотрим элемент a_{ij} .

Вычеркнем i -ю строку и j -ый столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . В результате получается матрица $(n-1)$ -го порядка.

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ к элементу a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i + j$ четная, и со знаком «-», если сумма нечетная.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 8 \cdot (-1) = 12 \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = -4$$

$$1) A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

где элемент a_{ij} : 1) $a_{12} = 1$; 2) $a_{31} = -1$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(-40 - 6) = 46$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель разложением по элементам **1**-ой строки (т.е. a_{1j})

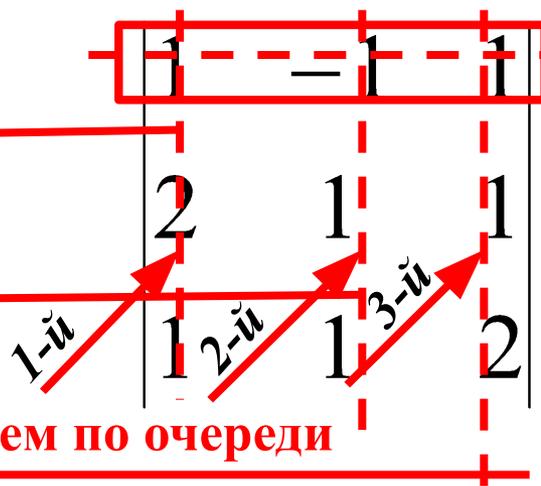
Решение:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 5$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$



1-ая строка вычёркиваем для всех A_{ij}