

Какая наука может быть более благородна,
более восхитительна, более полезна для
человечества, чем математика? Франклин

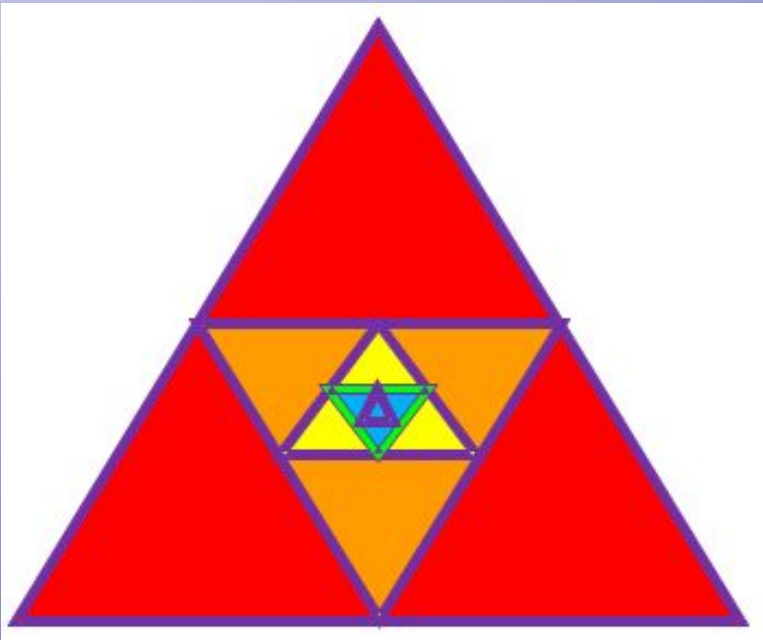
Мыслить последовательно, судить
доказательно, опровергать неправильные
выводы должен уметь всякий: физик и
поэт, тракторист и химик. Э.Кольман

В математике следует помнить не формулы,
а процессы мышления. В.П.Ермаков

Легче найти квадратуру круга, чем
перехитрить математика. Огастес де Морган

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

10 класс



I. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Вопросы

1. Определение арифметической прогрессии.

2. Формула n -го члена арифметической прогрессии.

последовательность, каждый член которой, начиная со

3. Формула суммы первых n членов

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

арифметической прогрессии .

4. Определение геометрической прогрессии.

5. Формула n -го члена геометрической прогрессии.

последовательность отличных от нуля чисел, каждый

6. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии .

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

II. Арифметическая прогрессия.

Задания

1. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 7 - 4n$
Найдите a_{10} . (-33)

2. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$.
Найдите a_4 . (4)

3. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$.
Найдите a_{17} . (-35)

4. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$.
Найдите S_{17} . (-187)

II. Геометрическая прогрессия.

Задания

5. Для геометрической прогрессии найдите пятый член

$$2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \dots \quad \left(\frac{2}{81} \right)$$

6. Для геометрической прогрессии найдите n -й член.

$$2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \dots \quad 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

7. В геометрической прогрессии $b_3 = 8$ и $b_5 = 2$.
Найдите b_4 .

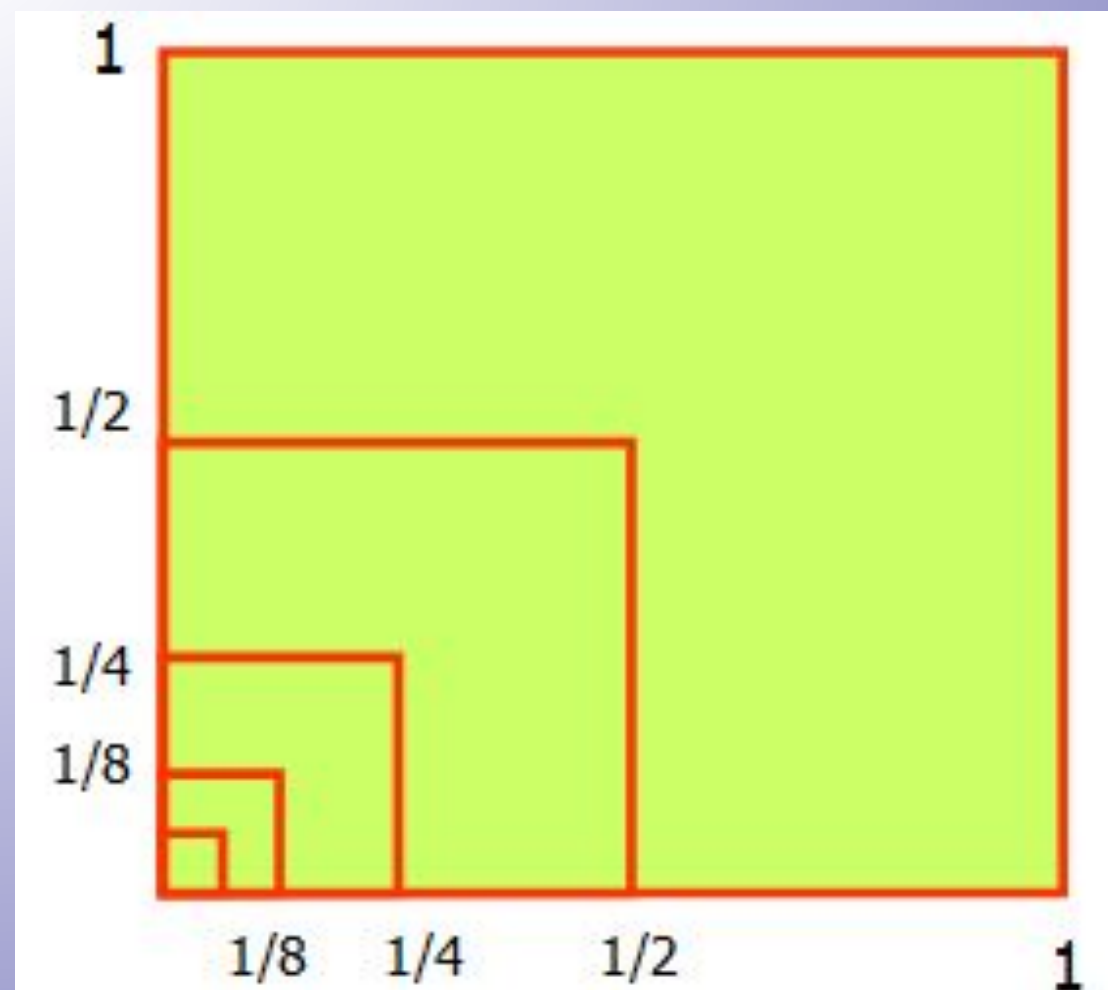
$$(4)$$

8. В геометрической прогрессии $b_3 = 8$ и $b_5 = 2$.
Найдите b_1 и q .

$$\left(\frac{1}{2} \text{ и } 32 \right)$$

9. В геометрической прогрессии $b_3 = 8$ и $b_5 = 2$.
Найдите S_5 .

$$(62)$$



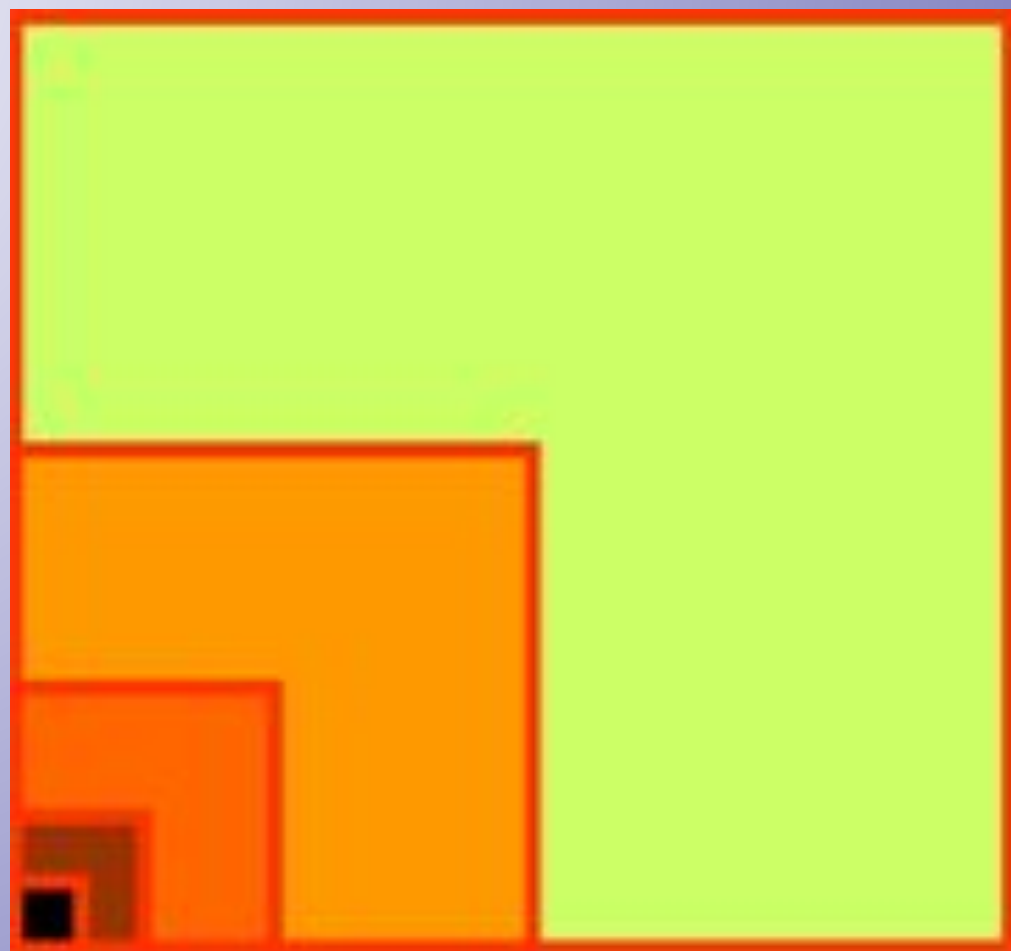
$$n = 15, \quad \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384};$$

$$n = 20, \quad \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524288};$$

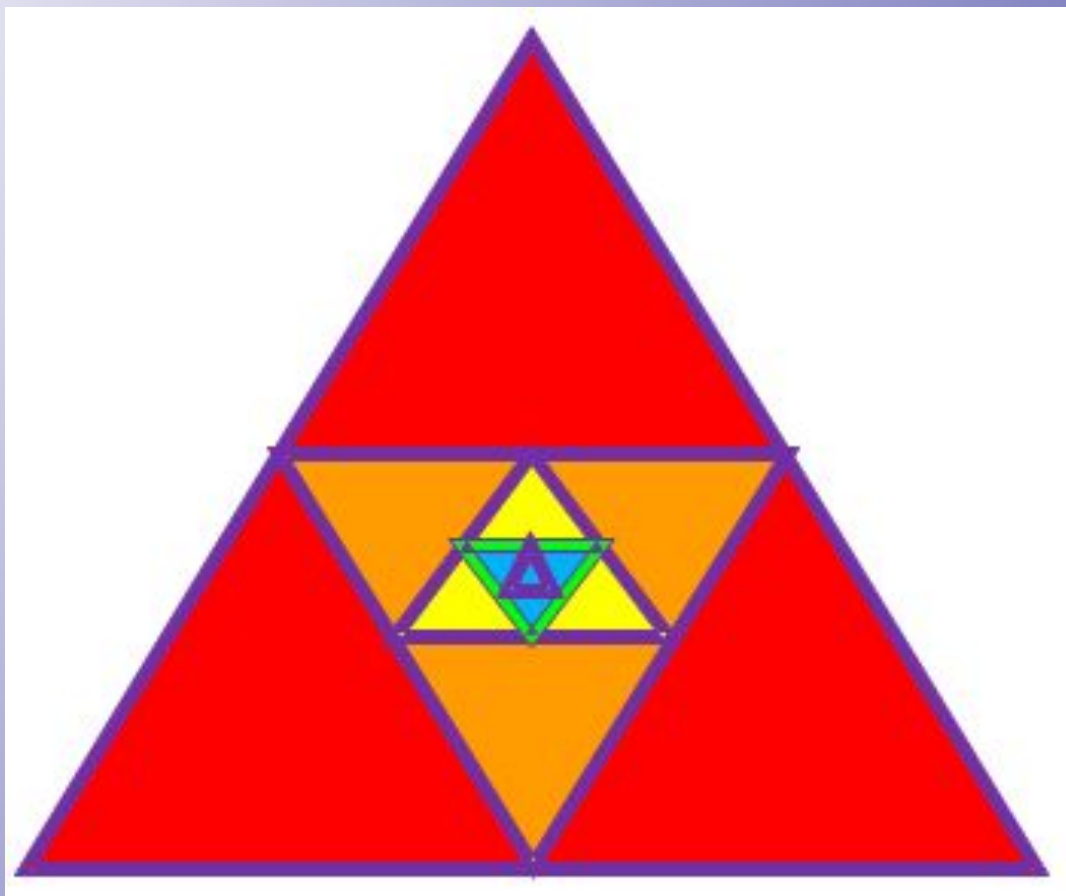
$$n = 21, \quad \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1048576}.$$

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots;$$

$$q = \frac{1}{2} < 1$$



$$1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4^2}; \frac{1}{4^3}; \dots; \frac{1}{4^{n-1}}; \dots \quad q = \frac{1}{4} < 1$$



$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots \quad q = \frac{1}{2} < 1$$

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

$$q = -\frac{1}{3}; \quad 1; \quad -\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \quad -\frac{1}{3^3}; \dots; \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}; \dots \quad b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}$$

определение:

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы. $|q| = 1$

Задача №1

Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она заданна формулой:

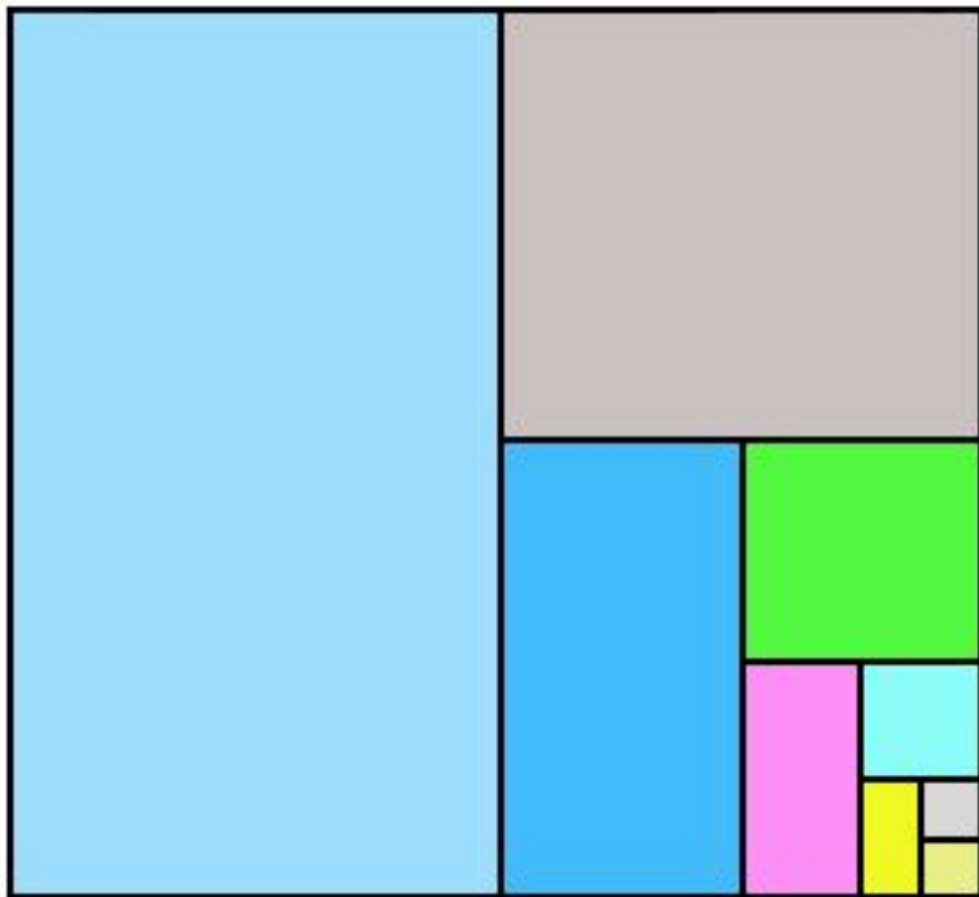
$$a) b_n = \frac{10}{7^n} \qquad б) b_n = (-4)^{n+2}$$

Решение: а)

$$b_1 = \frac{10}{7} \qquad b_2 = \frac{10}{49} \qquad q = \frac{10}{49} : \frac{10}{7} = \frac{1}{7} \qquad \left| \frac{1}{7} \right| < 1$$

данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

б) $b_n = (-4)^{n+2}$; $b_1 = (-4)^3 = -64$; $b_2 = (-4)^4 = 128$; $q = 128 : (-64) = -2$; $|-2| > 1$, $\Rightarrow$
данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (0.5)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \rightarrow 1 \quad S_n \rightarrow 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии
есть предел последовательности $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$.

Например, для прогрессии $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$, где $b_1 = 1, q = -\frac{1}{3}$

имеем $S_1 = 1, S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \dots$, $S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \dots$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии
можно находить по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Вопросы

- С какой последовательностью сегодня познакомились?
- Дайте определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
- Как доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей?
- Назовите формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

- Известный польский математик Гуго Штейнгаус шутливо утверждает, что существует закон, который формулируется так: математик сделает это лучше. А именно, если поручить двум людям, один из которых математик, выполнение любой незнакомой им работы, то результат всегда будет следующим: математик сделает ее лучше.



Гуго Штейнгаус
14.01.1887-25.02.1972