



Российская
Открытая
Академия
Транспорта

Раздел 1

Функции нескольких переменных



РАЗДЕЛ 1. Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Предел и непрерывность ФНП

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}\}$, $U \subseteq \mathbb{R}$.

Функция $f: X \rightarrow U$ называется **функцией n переменных**.

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

где f — закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \dots, x_n$ и u .

Значение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \dots, x_n = x_{0n}$ записывают в виде

$$u = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \quad \text{или}$$

$$u|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, \dots, x_n=x_{0n}}$$

Называют:

X – область определения функции (Обозначают: $D(u)$),
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ – аргументы (независимые переменные),
 U – область значений (Обозначают: $E(u)$),
 u ($u \in U$) – зависимая переменная (функция).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФНП

- 1) словесный;
- 2) табличный;
- 3) аналитический:
 - а) явное задание (т.е. формулой $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$)
 - б) неявное задание (т.е. уравнением $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$).
- 4) Функцию $z = f(x, y)$ можно задать графически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Графиком функции** $z = f(x, y)$ называется геометрическое место точек пространства с координатами $(x; y; f(x, y))$, $\forall (x, y) \in D(z)$.

График функции $z = f(x, y)$ будем также называть «поверхностью $z = f(x, y)$ ».

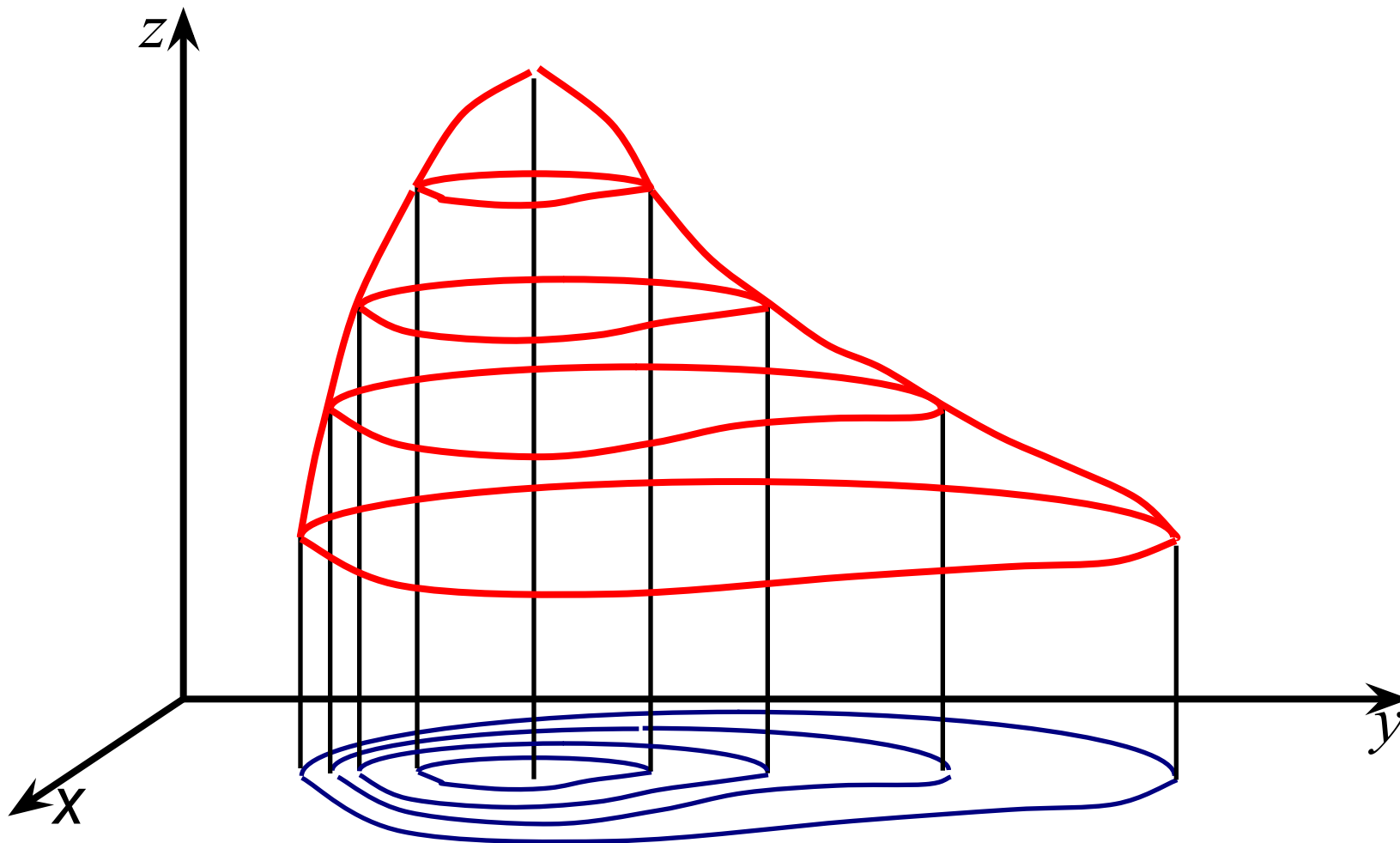
Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называют геометрическое место точек (x, y) плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C .

⇒ 1) Линия уровня – линия в $D(z)$, которая имеет уравнение $f(x, y) = C$.

2) Линия уровня – проекция на плоскость xOy линии пересечения графика функции $z = f(x, y)$ и плоскости $z = C$.

Полагаем C равными $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \dots, C_1 + nh$.

Получим линии уровня, по расположению которых можно судить о графике функции и, следовательно, о характере изменения функции.



Таким образом, там, где линии «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность, изображающая функцию, идет круче).

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называют геометрическое место точек пространства $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же значение C .

Уравнение поверхности уровня: $f(x, y, z) = C$.

2. Предел функции нескольких переменных

Напомним:

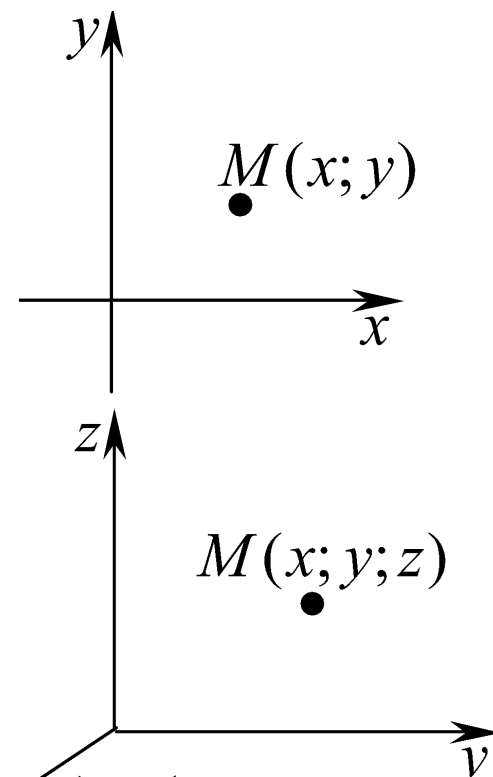
Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0** (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что
если $x \in U^*(x_0, \delta)$, то $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

$$\forall (x,y) \leftrightarrow M \in xOy ;$$

$$\Rightarrow z = f(x,y) = f(M), \text{ где } M \in D \subseteq xOy .$$

$$\forall (x,y,z) \leftrightarrow M \in Oxyz$$

$$\Rightarrow u = f(x,y,z) = f(M), \text{ где } M \in D \subseteq Oxyz .$$



По аналогии, последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем считать декартовыми координатами точки n -мерного пространства и рассматривать функцию n переменных как функцию точки этого пространства.

Обозначают:

$\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство,

$u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — функции n переменных.

Если $M_1(x_1), M_2(x_2) \in Ox$, то расстояние между ними (обозначают: $|M_1M_2|$) находится по формуле:

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Если $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in xOy$, то

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \in Oxuz$, то

Обобщая эти формулы, будем считать, что расстояние между точками n -мерного пространства

$$M_1(x_1, x_2, \dots, x_n), M_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

равно

$$|M_1M_2| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Пусть $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. Множество точек $\mathbb{R}^n$, находящихся от M_0 на расстоянии меньшем ε , будем называть **ε -окрестностью точки M_0** и обозначать $U(M_0, \varepsilon)$.

Иначе говоря, ε -окрестность $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ состоит из таких точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых имеет место неравенство

$$|M_0 M| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} < \varepsilon$$

При $n = 1$

$$U(M_0, \varepsilon) = \{M \in Ox \mid |M_0 M| = |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

При $n = 2$

$$U(M_0, \varepsilon) = \{M \in xOy \mid |M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ — круг с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом ε .

При $n = 3$

$$U(M_0, \varepsilon) = \{M \in Ox_1y_1z_1 \mid |M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — шар с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом ε .

ε -окрестность точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ без самой точки M_0 будем называть **проколотой** и обозначать $U^*(M_0, \varepsilon)$

Пусть функция n переменных $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$, кроме, может быть, самой M_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(M)$ при M стремящемся к M_0** (пределом функции $f(M)$ в точке M_0), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что
если $M \in U^*(M_0, \delta)$, то $f(M) \in U(A, \varepsilon)$.

Записывают в общем случае:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, \quad f(M) \rightarrow A, \text{ \textit{ïðå} } M \rightarrow M_0$$

Для функции $z = f(x, y)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Замечания.

- 1) Условие $M \in U^*(M_0, \delta)$ означает, что выполняется неравенство:
$$0 < \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} < \delta$$
- 2) Условие $f(M) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(M)$ выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$
- 3) Так как формально определение предела функции n переменных ничем не отличается от определения предела функции одной переменной, то все утверждения, которые были получены о пределах функции одной переменной и в которых не используется упорядоченность точек числовой прямой, остаются верными и для предела функции n переменных.
- 4) Определение бесконечно большой функции переносится на случай функции n переменных тоже дословно (сформулировать самостоятельно).

3. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности $M_0 \in \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(M)$ называется **непрерывной в точке M_0** если справедливо равенство

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

или, иначе говоря, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что

если $M \in U(M_0, \delta)$ (т.е. $|MM_0| < \delta$),

то $f(M) \in U(f(M_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$).

Справедливы утверждения:

- 1) арифметические операции над непрерывными в точке M_0 функциями приводят к непрерывным в этой точке функциям (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в ноль);
- 2) сложная функция, составленная из нескольких непрерывных функций, тоже будет непрерывной.

Если функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 (за исключением, может быть, самой M_0), но не является в этой точке непрерывной, то ее называют **разрывной в точке M_0** , а саму точку M_0 — **точкой разрыва**.

Пусть G — некоторое множество точек в $\mathbb{R}^n$ и $M_0 \in G$.

Точка M_0 называется **внутренней точкой** множества G , если $\exists U(M_0, \varepsilon) \subset G$.

Множество, каждая точка которого — внутренняя, называется **открытым**.

Точка M_0 называется **граничной точкой** множества G , если в любой ее ε -окрестности есть как точки из G , так и точки, не принадлежащие G .

Множество всех граничных точек множества G называется его **границей**.

Множество, содержащее свою границу, называется **замкнутым**.

Множество G называется **связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек этого множества.

Замечание.

Непрерывной кривой в n -мерном пространстве называется геометрическое место точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t),$$

где $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ – непрерывные функции параметра $t \in (\alpha; \beta)$.

Связное открытое множество называется **областью**.

Связное замкнутое множество называется **замкнутой областью**.

Область, целиком лежащая в некоторой ε -окрестности точки $O(0,0,\dots,0)$, называется **ограниченной**.

ТЕОРЕМА (аналог теорем Вейерштрасса и Коши для ФНП).

Если функция n переменных $u = f(M)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области D , то она

- 1) ограничена;*
- 2) достигает в D своего наибольшего и наименьшего значения;*
- 3) принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями.*

Частные производные

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – открытая область.

Пусть $\forall M_0(x_0, y_0) \in D$.

Придадим x_0 приращение Δx , оставляя значение y_0 неизменным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$).

При этом $z = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется **частным приращением** функции $z = f(x, y)$ **по x в точке $M_0(x_0, y_0)$** .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения

$$\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(если он существует и конечен) называется **частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$** .

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0)$$

или

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \quad z'_x(M_0), \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad f'_x(M_0)$$

Замечания.

1) Обозначения

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0, y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x, y)$ по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Соответствие

$$(x_0; y_0) \rightarrow f'_x(x_0; y_0) \quad (\text{и} \quad (x_0; y_0) \rightarrow f'_y(x_0; y_0) \quad)$$

является функцией, определенной на $D_1(D_2) \subseteq D(f)$.

Ее называют **частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x** (y) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

Операция нахождения для функции $z = f(x, y)$ ее частных производных

называется **дифференцированием функции $z = f(x, y)$ по переменной x и y** соответственно.

Фактически, $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ – это обыкновенная производная функции $z = f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) при постоянном значении другой переменной.

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменной. При этом, одна из переменных считается константой.

ПРИМЕР. Найти частные производные по x и по y функции

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^3$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в $M_0(x_0, y_0)$ частную производную по x .

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x, y)$. Тогда

$$f'_x(M_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол наклона к оси Ox касательной, проведенной в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$.

