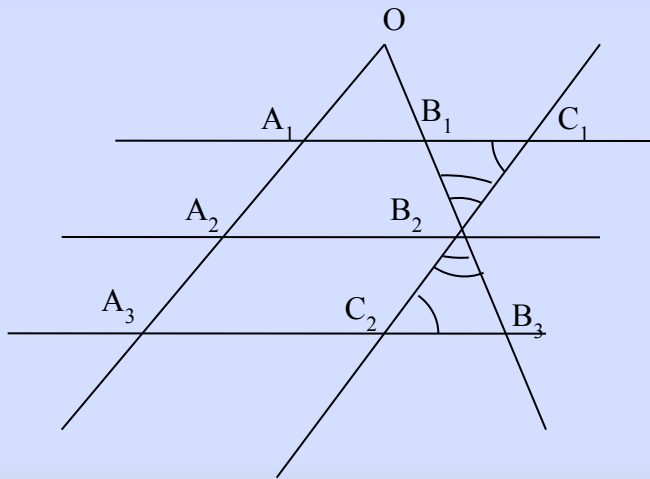


Теорема Фалеса

Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне

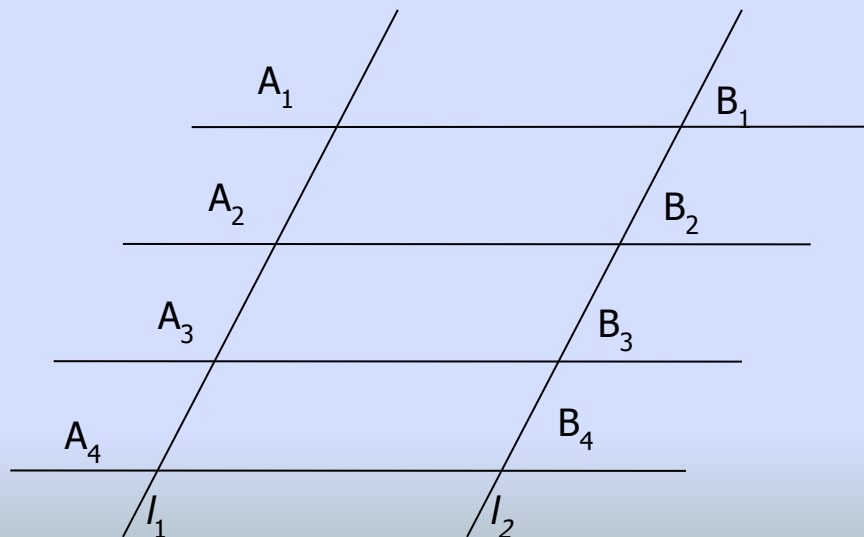


Доказательство:

Пусть A_3OB_3 – заданный угол, а A_1B_1 , A_2B_2 , и A_3B_3 – попарно параллельные прямые и $A_1A_2 = A_2A_3$. Докажем, что $B_1B_2 = B_2B_3$. Проведем через точку B_2 прямую C_1C_2 параллельную прямой A_1A_3 . По лемме $A_1A_2 = C_1B_2$, $A_2A_3 = B_2C_2$ и с учетом условия теоремы $C_1B_2 = B_2C_2$. Кроме того, $\angle B_1C_1B_2 = \angle B_2C_2B_3$ – как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 , A_3B_3 и секущей C_1C_2 , а $\angle B_1B_2C_1 = \angle C_2B_2B_3$ как вертикальные. По второму признаку равенства треугольников $\triangle B_1C_1B_2 = \triangle B_3C_2B_2$. Отсюда $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



Доказательство:

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1 , B_2 , B_3 , B_4 как на рисунке. Требуется доказать, что отрезки B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_4 равны друг другу. Докажем, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Рассмотрим случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны. Тогда $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

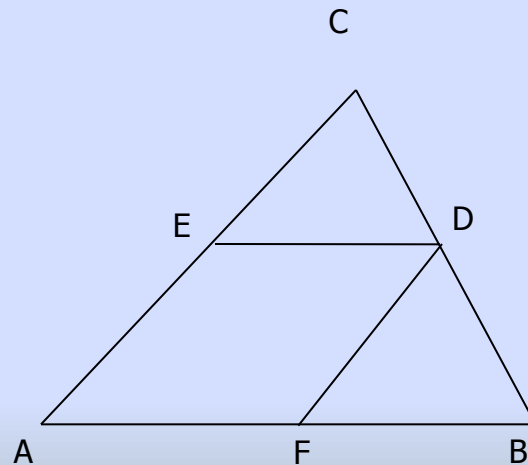
Применение теоремы Фалеса

К

решению задач

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.



Доказательство:

Пусть отрезок DE – средняя линия в треугольнике ABC , т. е. $AE = EC$, $CD = BD$. Проведем через точку D прямую a , параллельную стороне AB . По теореме Фалеса прямая a пересекает сторону AC в ее середине и, следовательно, содержит среднюю линию DE . Значит, средняя линия DE параллельна стороне AB . Проведем среднюю линию DF . Она параллельна стороне AC . Тогда по лемме отрезок ED равен отрезку AF и равен половине отрезка AB . Теорема доказана.