Лекция 8

Сети Петри

Элементы сети Петри

Сеть Петри - двудольный ориентированный мультиграф:

Вершины: позиция и переходы.

Ребра – связь между вершинами по управлению.

Примечания:

1) Вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно.
2) В позициях могут размещаться метки (маркеры) .
3) Метки могут перемещаться по сети.

Событие – срабатывание перехода, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции.

Простые сети Петри

Сеть Петри состоит из четырёх элементов:

- ***множество позиций*** **P**,
- ***множество переходов*** **T**,
- ***входная функция*** **I,**
- ***выходная функция*** **O**.

Определение.

Сеть Петри **C** является четверкой, **C=(P,T,I,O)**.

P={p1, p2, ... , pn} - конечное множество позиций, **n>=0**.

T={ t1, t2, ... , tn } - конечное множество переходов, **m>=0**.

$P \cap T = \varnothing$

I: T->P - является входной функцией - отображением из переходов в комплекты позиций.

O: T->P - выходная функция - отображение из переходов в комплекты позиций.

Расширенные входная и выходная функции

Определение.

Кратность входной позиции **pi** для перехода **tj** есть число появлений позиции во входном комплекте перехода, **#(pi,I(tj))**.

Кратность выходной позиции **pi** для перехода **tj** есть число появлений позиции в выходном комплекте перехода, **#(pi ,O(tj))**.

Определение.

Расширенные функции **I: P->T и O: P->T** - это функции, для которых выполняется:

#(tj , I(pi))= #(pi ,O(tj)), #(tj ,O(pi))= #(pi ,I(tj)).

Пример 1. Для сети Петри

C=(P,T,I,O)

P= {p1, p2, p3, p4, p5}

T= { t1, t2, t3, t4}

I(t1)={ p1}, O(t1)={ p2, p3 , p5 }

I(t2)= { p2, p3, p5 }, O(t2)={ p5 }

I(t3)={ p3} , O(t3)={ p4 }

I(t4)={ p4} , O(t4)={ p2, p3 }

Расширенными функциями являются :

I (p1)={ }, O(p1)={t1}

I (p2)= { t1, t4 }, O(p2)={t2}

I (p3)={ t1, t4 }, O(p3)={t2 , t3}

I (p4)={ t3}, O(p4)={t4}

I (p5)= { t1, t2 }, O(p5)={t2}

Графическое представление

Обозначения на графе:

позиции: 

переходы:

Определение.

Граф сети Петри – двудольный ориентированный мультиграф, **G= (V, A)**,

где **V = {v1, v2, ..., vs}** - множество вершин,

A = {a1, a2, ..., as} - комплект направленных дуг,

ai=(vj, vk), где **vj, vk** принадлежат **V**.

Множество **V** может быть разбито на два непересекающихся подмножества **P** и **T**, таких, что:

ai ∈ **A**, если **ai = (vj, vk)**, тогда либо **vj** ∈ **P** и **vk**∈**T**, либо **vj**∈**T** и **vk**∈**P**.

Пример

Пример 1. Для сети Петри

C=(P,T,I,O)

P= {p1, p2, p3, p4, p5}

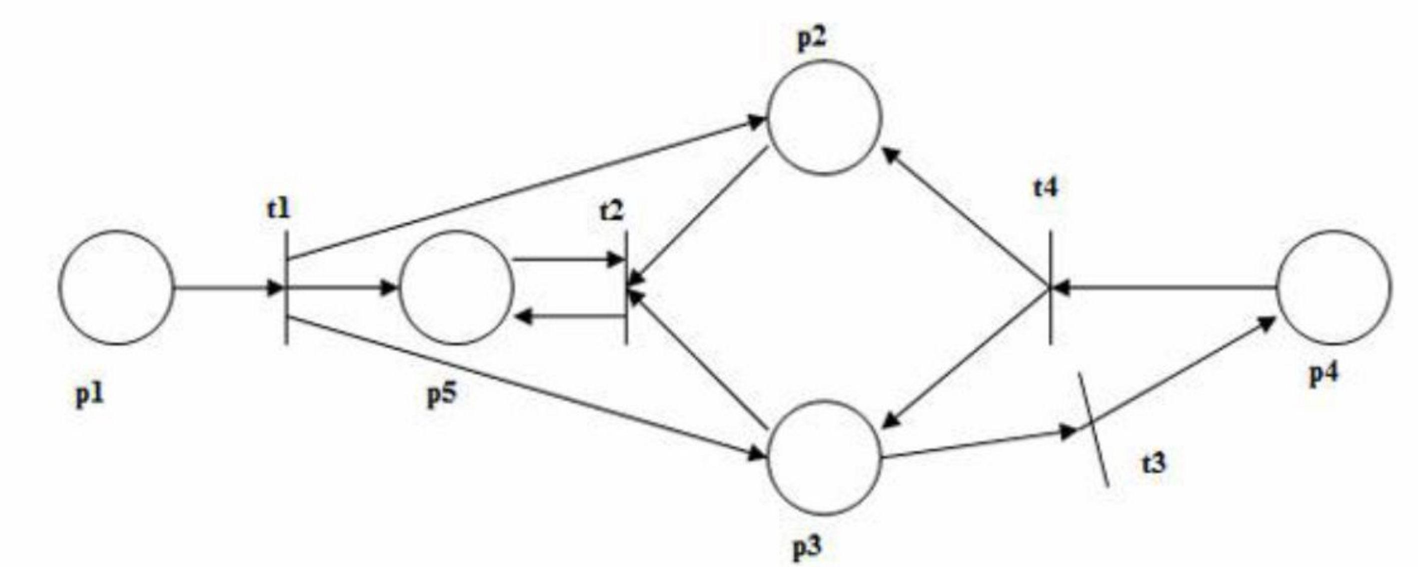
T= { t1, t2, t3, t4}

I(t1)={ p1}, O(t1)={ p2, p3 , p5 }

I(t2)= { p2, p3, p5 }, O(t2)={ p5 }

I(t3)={ p3} , O(t3)={ p4 }

I(t4)={ p4} , O(t4)={ p2, p3 }



Двойственная сеть

Двойственной к сети Петри **C = (P, T, I, O)** является сеть Петри **C' = (T, P, I, O)**, которая получается в результате перестановки позиций и переходов. Структура графа сохраняется, просто меняются местами кружки и планки.

Пример 1. Для сети Петри

C=(P,T,I,O)

P= {p1, p2, p3, p4, p5}

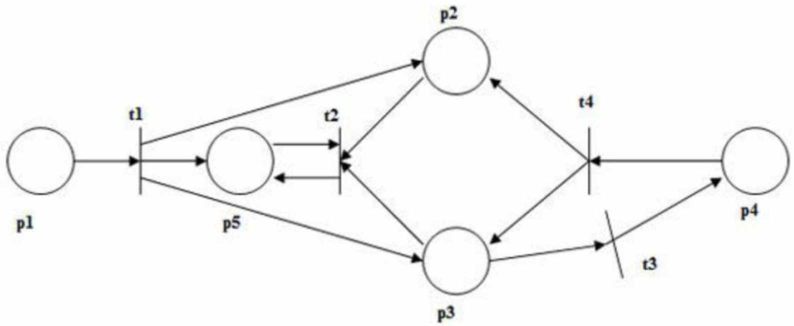
T= { t1, t2, t3, t4}

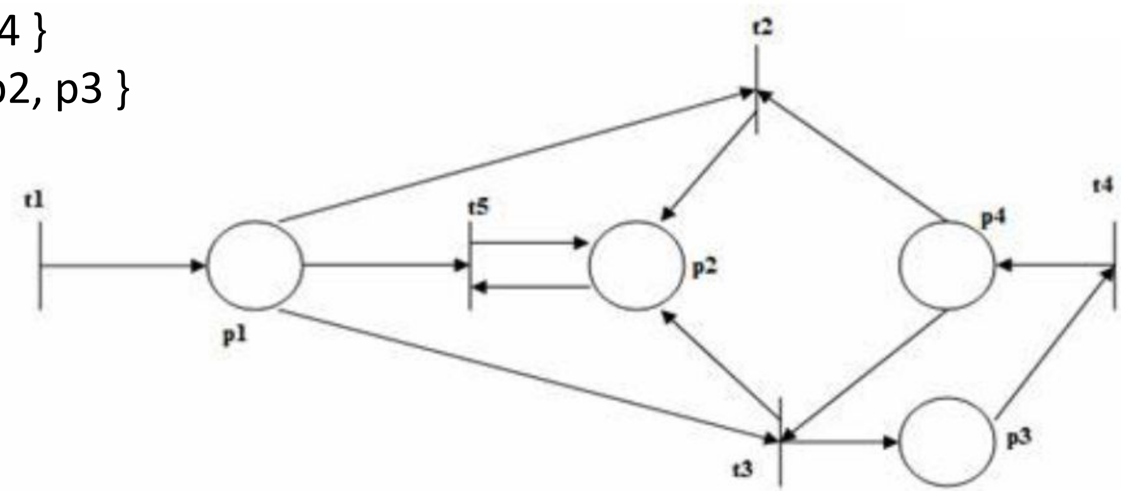
I(t1)={ p1}, O(t1)={ p2, p3 , p5 }

I(t2)= { p2, p3, p5 }, O(t2)={ p5 }

I(t3)={ p3} , O(t3)={ p4 }

I(t4)={ p4} , O(t4)={ p2, p3 }





Маркировка сети

***Маркировка* m** - это присвоение фишек позициям сети Петри.

Фишки используются для определения выполнения сети Петри.

Определение.
Маркировка **m** сети Петри **C = (P, T, I, O)** есть функция, отображающая множество позиций **P** в множество неотрицательных целых чисел **N**: **`m: P-> N.`**

*Маркировка может быть также определена как **n**-вектор $\boldsymbol{m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)}$, где $\boldsymbol{n = |P|}$.*

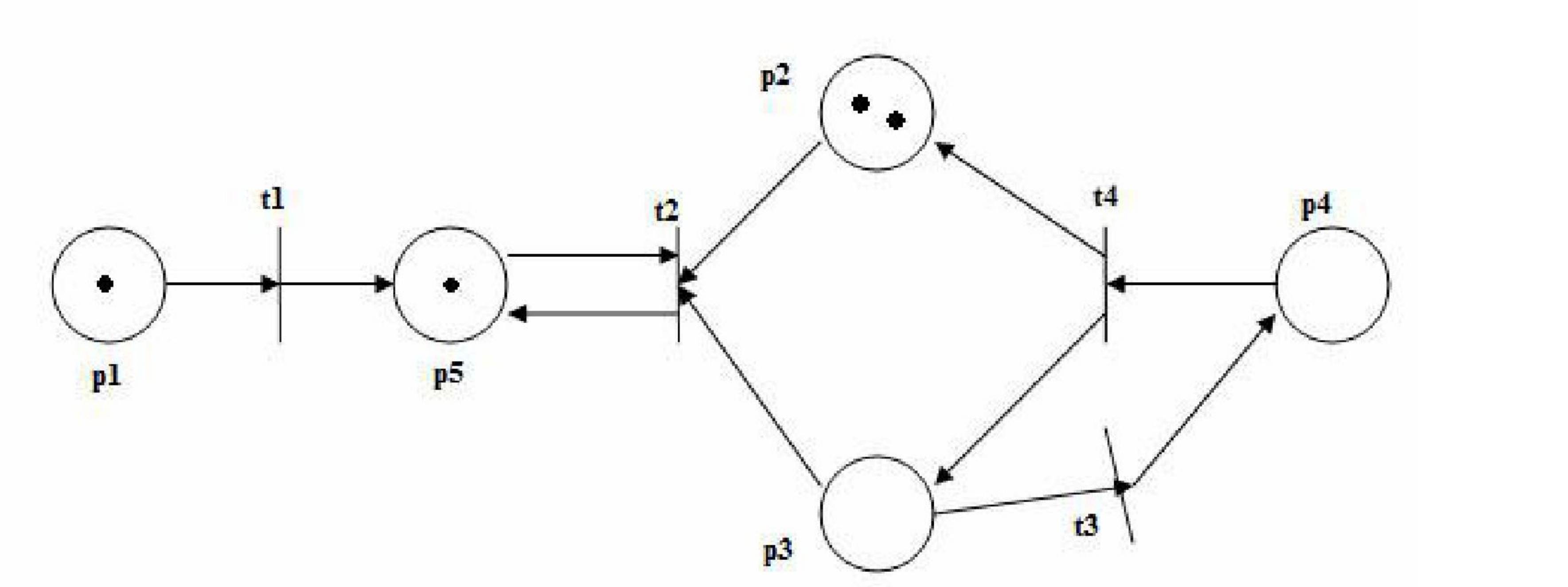
*Вектор **m** определяет для каждой позиции $\boldsymbol{p_i}$ сети Петри количество фишек в этой позиции.*

Количество фишек в позиции $\boldsymbol{p_i}$ есть $\boldsymbol{m_i}$, т.е. $\boldsymbol{m(p_i) = m_i}$, $\boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$.

Маркированная сеть Петри

Определение.
Маркированная сеть Петри **M = (C, m)** есть совокупность структуры сети Петри **C = (P, T, I, O)** и маркировки **m** и может быть записана в виде **M = (P, T, I, O, m)**.

Пример: Маркировка - (1, 2, 0, 0, 1)



Влияние фишек на сеть

Выполнение сети Петри - распределение фишек сети.

Сеть Петри выполняется посредством запусков переходов.

Переход запускается удалением фишек из его входных позиций и образованием новых фишек, помещаемых в его выходные позиции.

Переход может запускаться только в том случае, когда он разрешен.

Переход называется ***разрешенным***, если каждая из его входных позиций имеет число фишек, по крайней мере, равное числу дуг из позиции в переход.

Фишки во входной позиции, которые разрешают переход, называются его ***разрешающими фишками***.

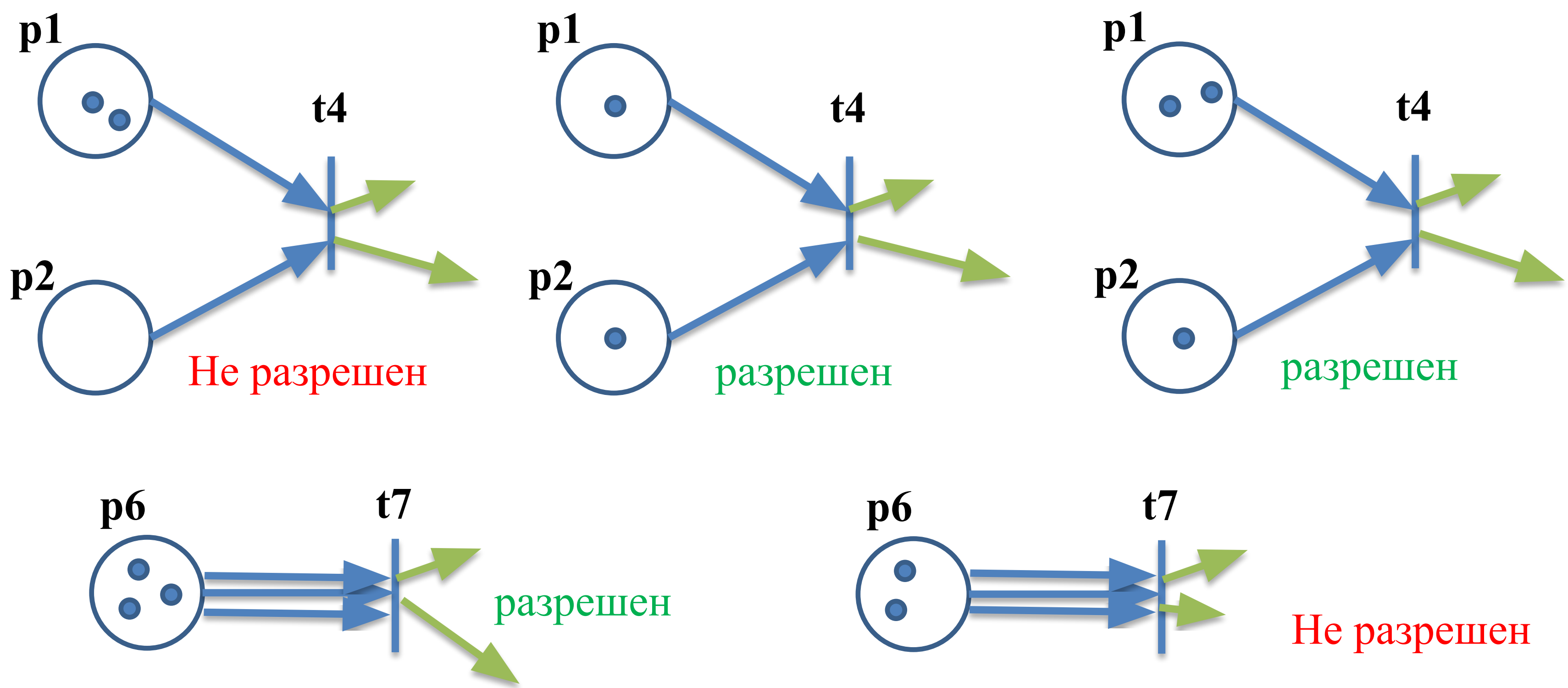
Плотность загрузки вычислительной системы

Пример:

Если позиции $\mathbf{p_1}$ и $\mathbf{p_2}$ служат входами для перехода $\mathbf{t_4}$, тогда $\mathbf{t_4}$ разрешен, если $\mathbf{p_1}$ и $\mathbf{p_2}$ имеют хотя бы по одной фишке.

Для перехода $\mathbf{t_7}$ с входным комплектом $\{\mathbf{p_6}, \mathbf{p_6}, \mathbf{p_6}\}$ позиция $\mathbf{p_6}$ должна обладать, по крайней мере, тремя фишками, для того, чтобы $\mathbf{t_7}$ был разрешен.

Смотрим только на количество входящих дуг!!!!



Переходы по сети

Определение.
Переход $\mathbf{t_j}$ из **T** в маркированной сети Петри **C = (P, T, I, O)** с маркировкой **m** разрешен, если для всех $\mathbf{p_i}$, принадлежащих **P:**

$$m(p_i) >= \#\ (p_i,\ I(t_j)).$$

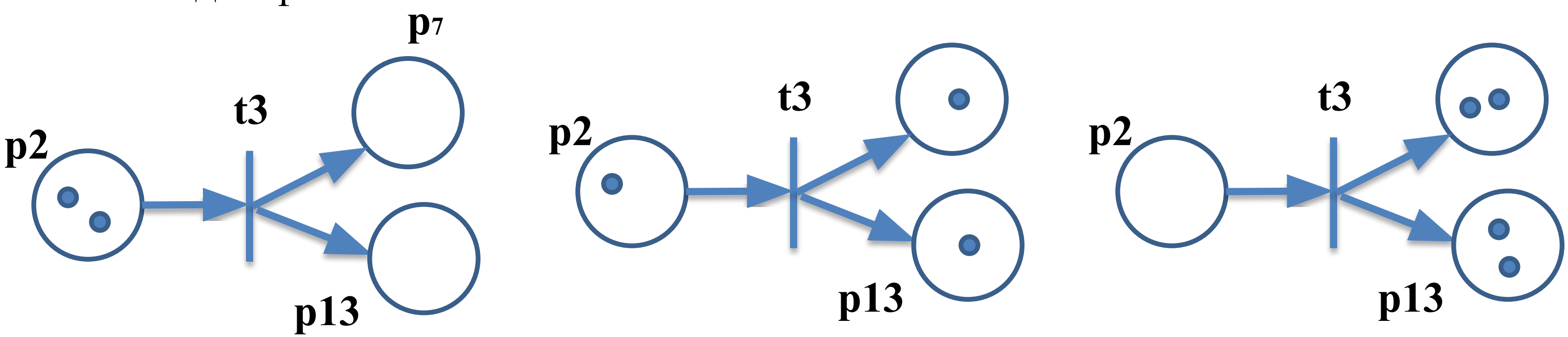
Переход ***запускается*** *удалением всех разрешающих фишек из его входных позиций и последующим перемещением в каждую из его выходных позиций по одной фишке для каждой дуги.*

Если какая-либо входная позиция перехода не обладает достаточным количеством фишек, то переход не разрешен и не может быть запущен.

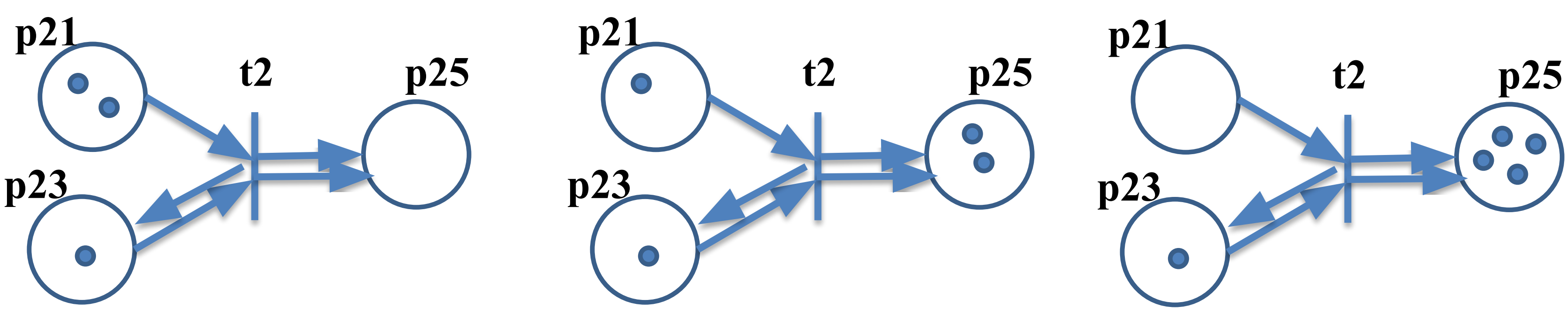
Запуски могут осуществляться до тех пор, пока существует хотя бы один разрешенный переход. Когда не останется ни одного разрешенного перехода, выполнение прекращается.

Срабатывание переходов

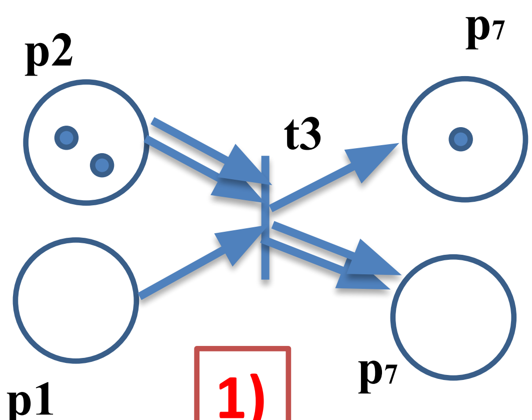
Переход t_3 с $I(t_3) = \{p_2\}$ и $O(t_3) = \{p_7, p_{13}\}$ разрешен всякий раз, когда в p_2 будет хотя бы одна фишка.



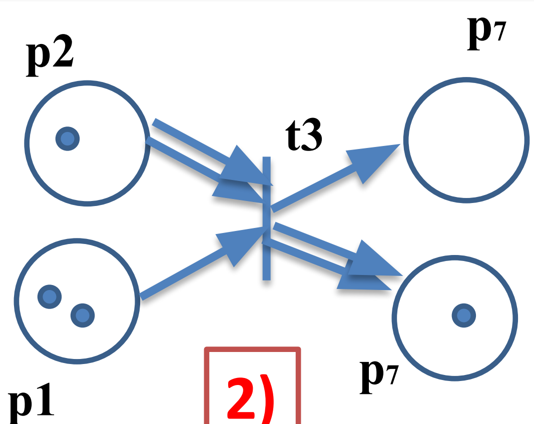
Переход t_2, в котором $I(t_2) = \{ p_{21}, p_{23}\}$ и $O(t_2) = \{p_{23}, p_{25}, p_{25}\}$ запускается удалением одной фишки из p_{21} и одной фишки из p_{23}, при этом одна фишка помещается в p_{23} и две - в p_{25} (так как p_{25} имеет кратность, равную двум).



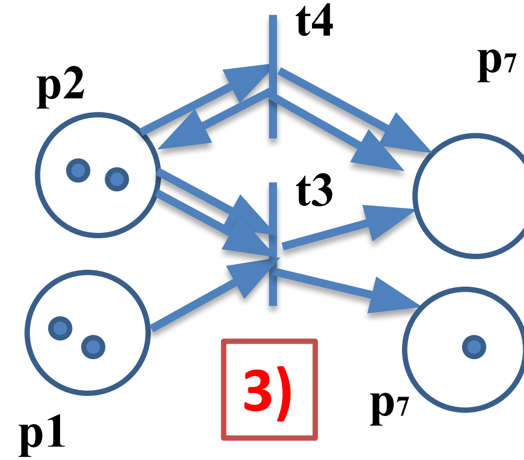
Определить срабатывание переходов



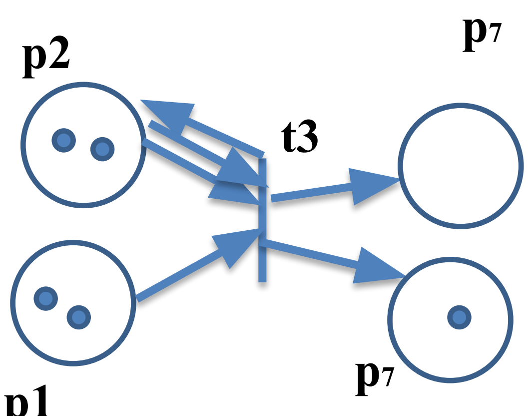
1)



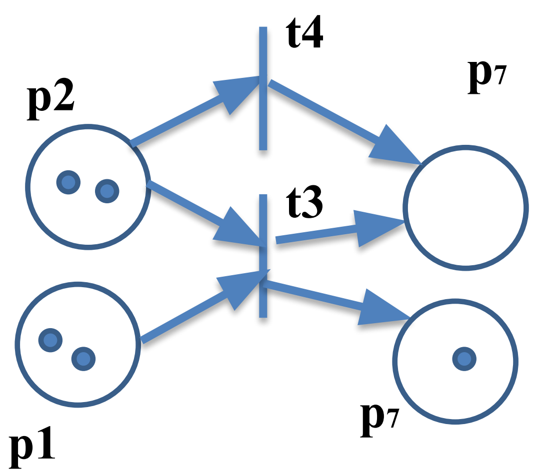
2)



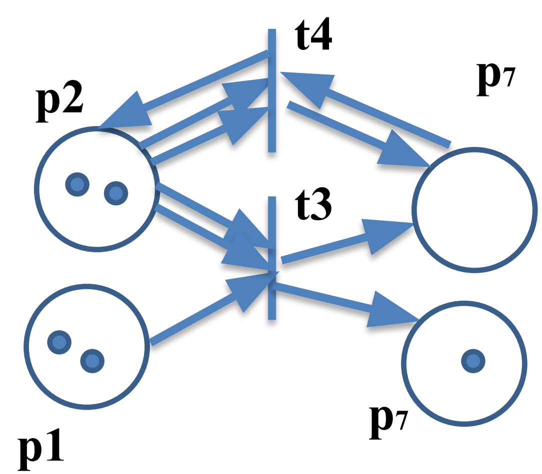
3)



4)



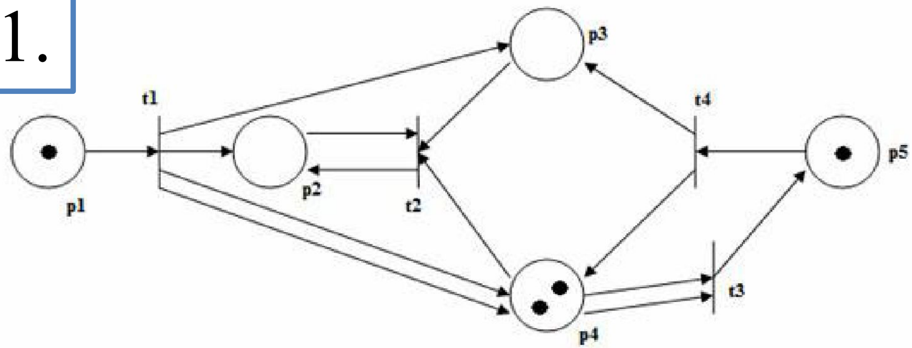
5)



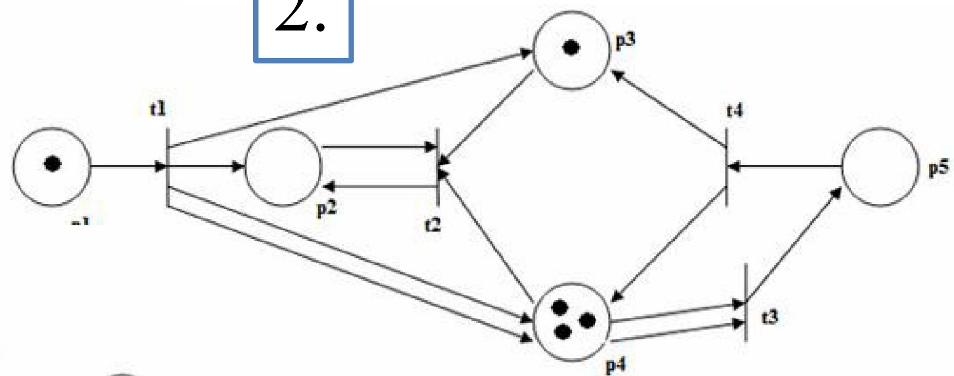
6)

Пример

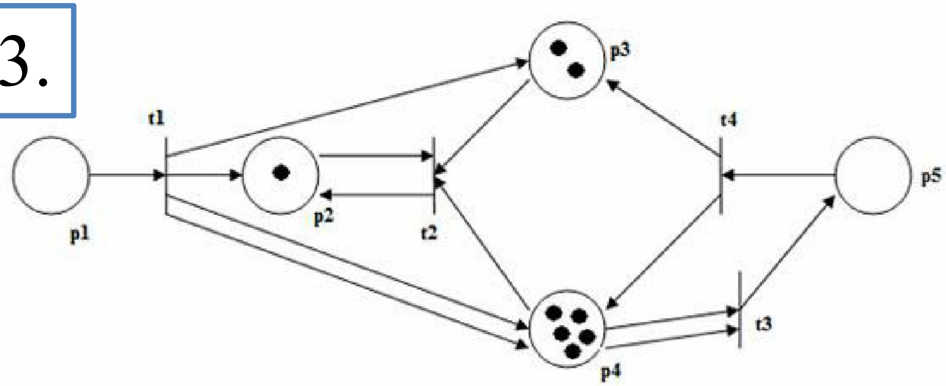
1.


p1
t1
p2
t2
p3
t4
p5
p4
t3

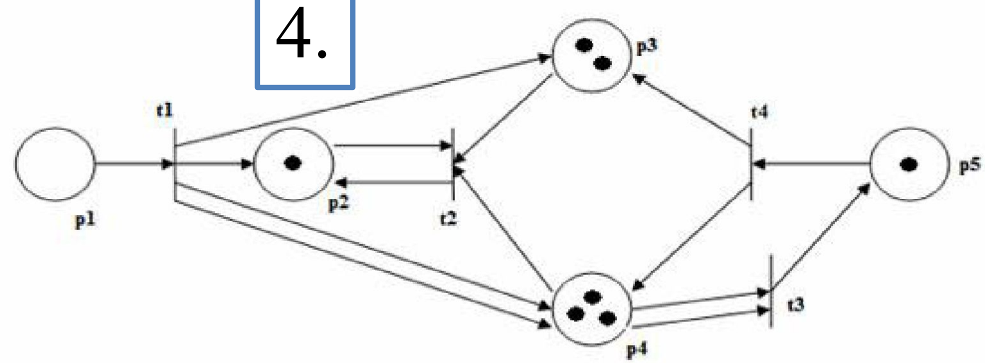
2.


p3
t1
t4
p5
p2
t2
t3
p4

3.


p3
t1
t4
p5
p1
p2
t2
t3
p4

4.


p3
t1
t4
p5
p1
p2
t2
t3
p4

Функция следующего состояния

Функция следующего состояния b: функция, которая при применении к маркировке **m** и переходу t_j, образует новую маркировку, которая получается при запуске перехода t_j в маркировке **m**.

*Так как t_j может быть запущен только в том случае, когда он разрешен, то функция $b(m, t_j)$ не определена, если t_j не разрешен в маркировке **m**.*

*Если же t_j разрешен, то $b(m, t_j) = m'$, где **m‘** есть маркировка, полученная в результате удаления фишек из входов t_j и добавления фишек в выходы t_j.*

Описание выполнения сети Петри

1. Пусть дана сеть Петри **C = (P, T, I, O)** с начальной маркировкой **m0**.
2. Запуск разрешенного перехода **tj** в начальной маркировке образует новую маркировку **m1 = b(m0, tj)**.
3. Запуск следующего перехода **tk** образует новую маркировку **m2 = b(m1, tk)**.
4. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока в маркировке будет существовать хотя бы один разрешенный переход.
5. Если же получена маркировка, в которой ни один переход не разрешен, то выполнение сети должно быть закончено.

Результат:

две последовательности:

1) последовательность маркировок **(m0, m1, m2, …);**

2) последовательность переходов, которые были запущены **(tj0, tj1, tj2, ...)**.

Эти две последовательности связаны следующим соотношением:

b(mk, tjk) = mk+1 для **k = 0, 1, 2, ...** .

Множество достижимости R(C, m)

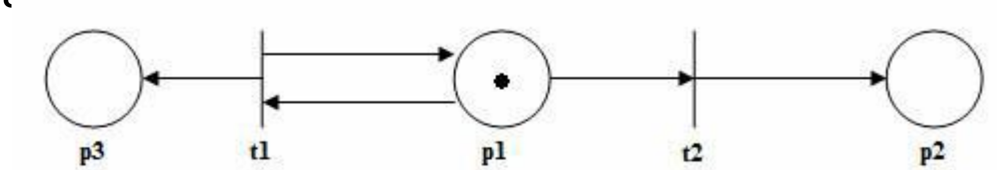
Определение.

Для сети Петри **C = (P, T, I, O)** с маркировкой **m** маркировка **m'** называется ***непосредственно достижимой из*** **m**, если существует переход **tj**, принадлежащий **T**, такой, что **b (m, tj) = m'**.

Определение.

Множество достижимости **R(C, m)** для сети Петри **C = (P, T, I, O)** с маркировкой **m** есть наименьшее множество маркировок, определенных следующим образом:

1. **m** принадлежит **R(C, m)** ;
2. Если **m'** принадлежит **R(C, m)** и **m''** принадлежит **b(m', tj)** для некоторого **tj**, принадлежащего **T**, то **m''** принадлежит **R(C, m)**



m = (1, 0, 0)

Непосредственно достижимые:

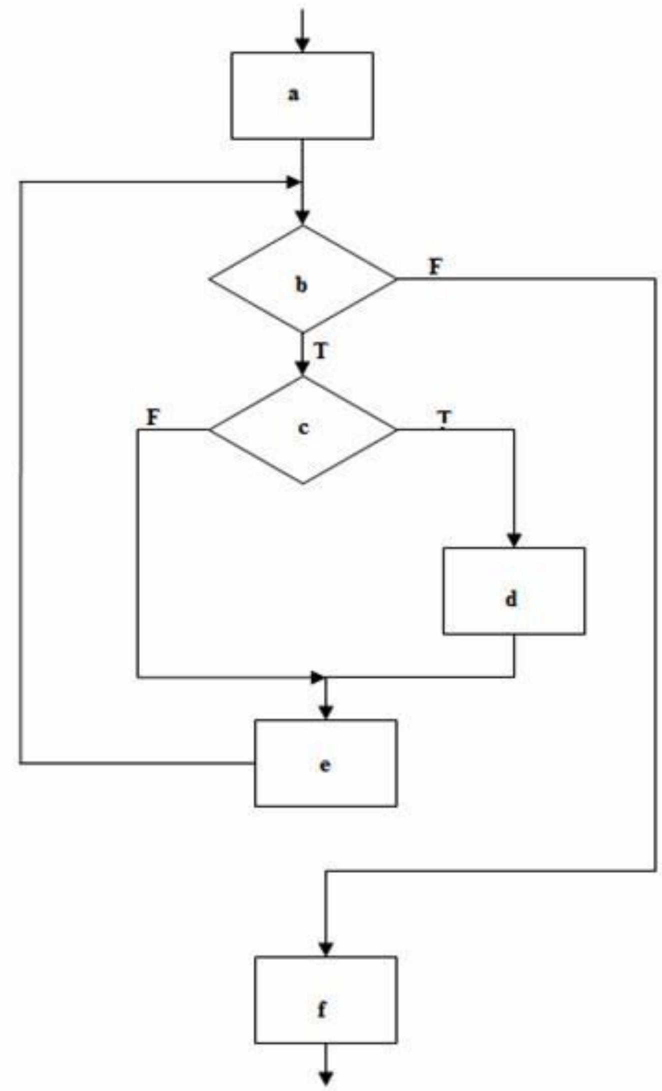
(0, 1, 0)
(1, 0, 1)

Множество достижимости R(C, m):

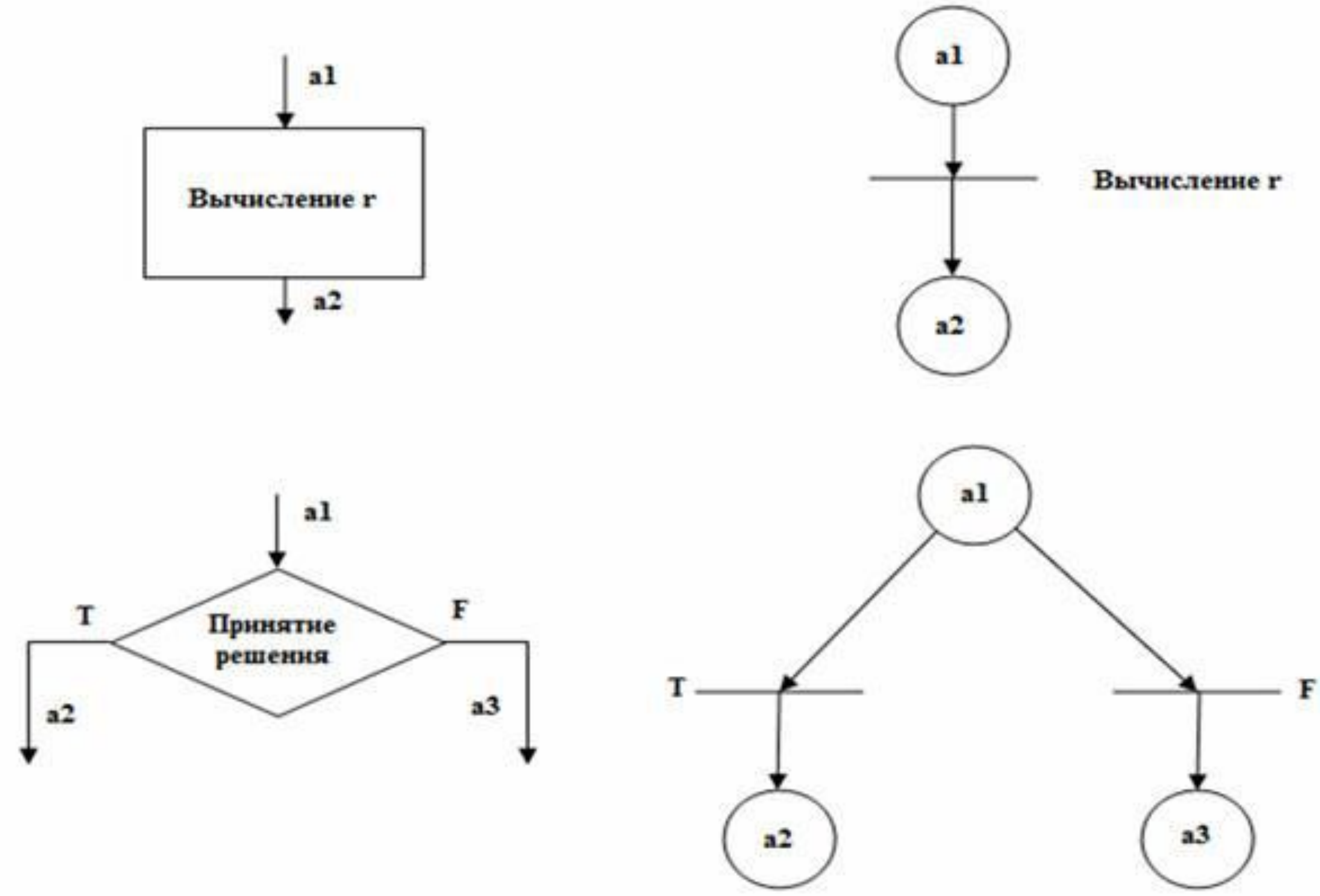
(0, 1, 0)
(1, 0, 1)
(0, 1, 1)
(1, 0, 2)

Пример 1

```
begin
	Writeln('Введите y1');
	Readln(y1);
	Writeln('Введите y2');
	Readln(y2);
	y3:=1;
	while y1>0 do
		begin
			if odd (y1) then
				begin
							y3:=y3*y2;
							y1:=y1-1;
				end;
				y2:=y2*y2;
				y1:=y1/2;
		end;
	writeln('y=',y3);
end.
```

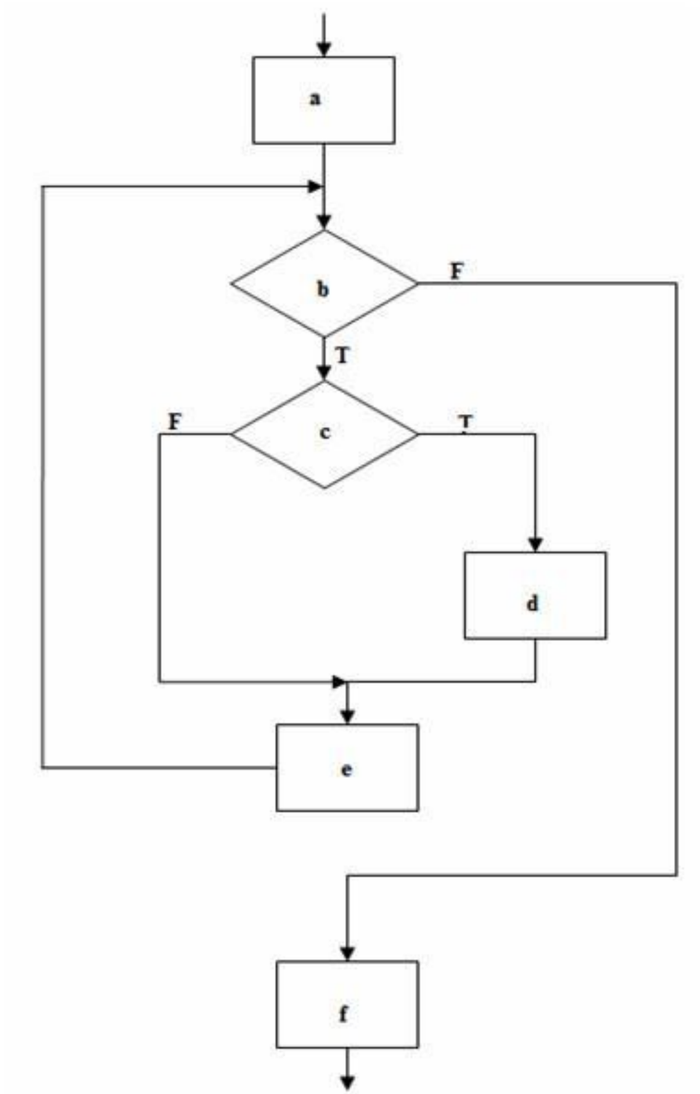


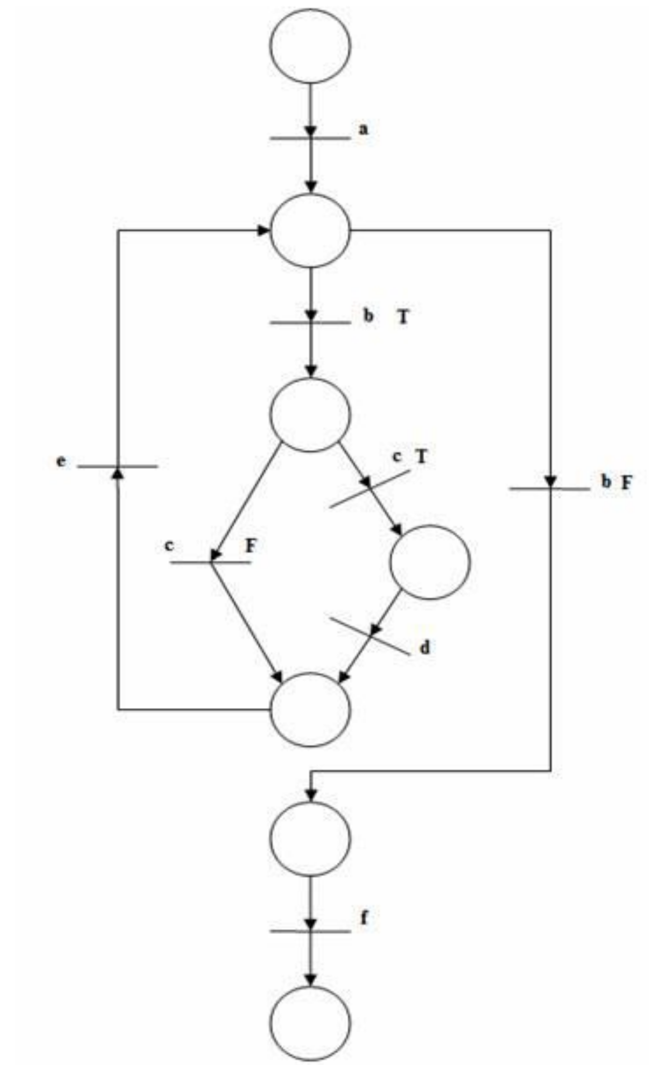
Пример 1



a1
Вычисление r
a2
a1
Вычисление r
a2
a1
T
Принятие решения
F
a2
a3
a1
T
F
a2
a3

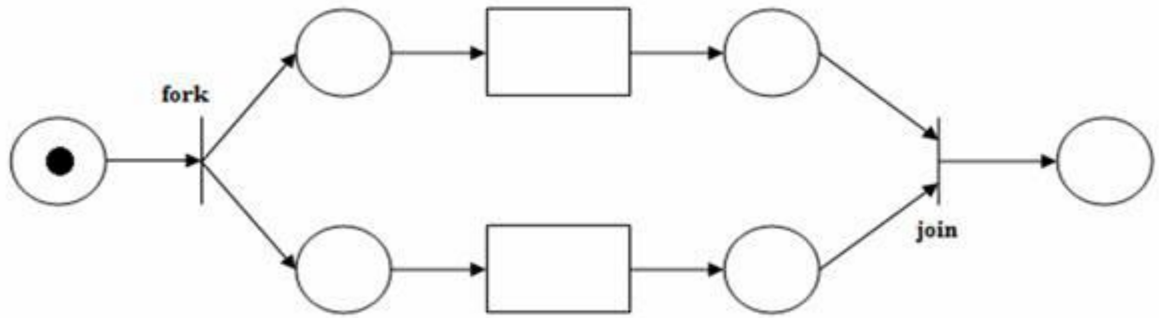
Пример 1



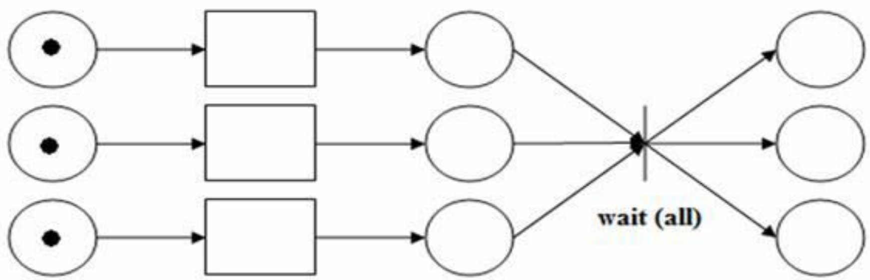


Пример 2

a)



b)



c)