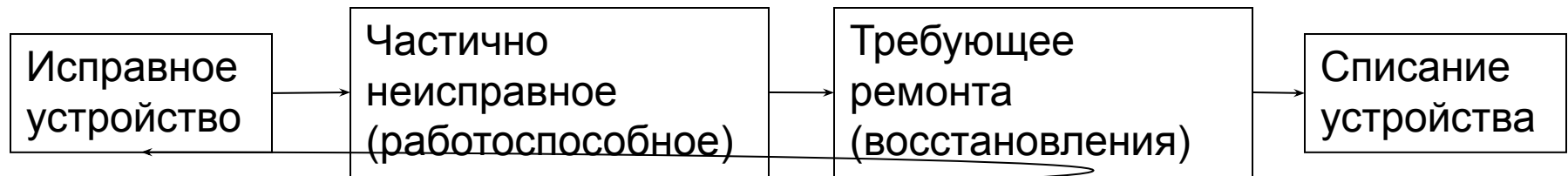


Моделирование систем и процессов

Лекция 3. Марковские процессы.

Цепочка состояний устройства (системы)



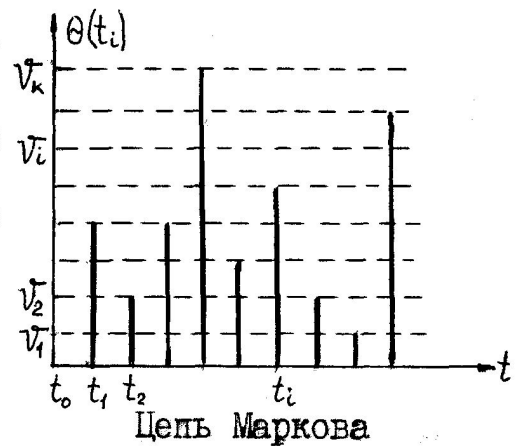
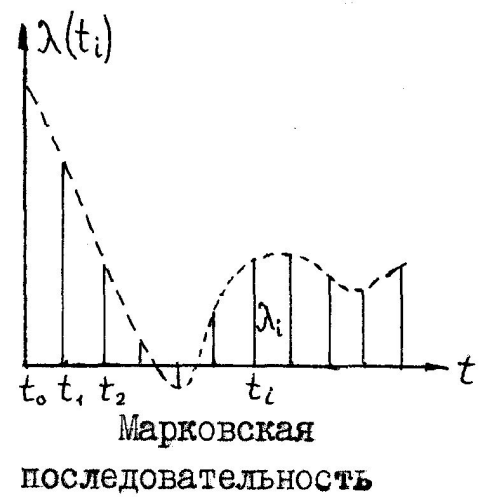
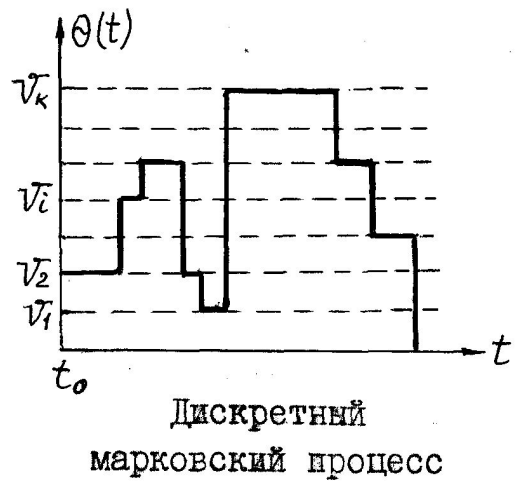
Марковская цепь – случайный марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

Методологические проблемы описания цепочки состояний:

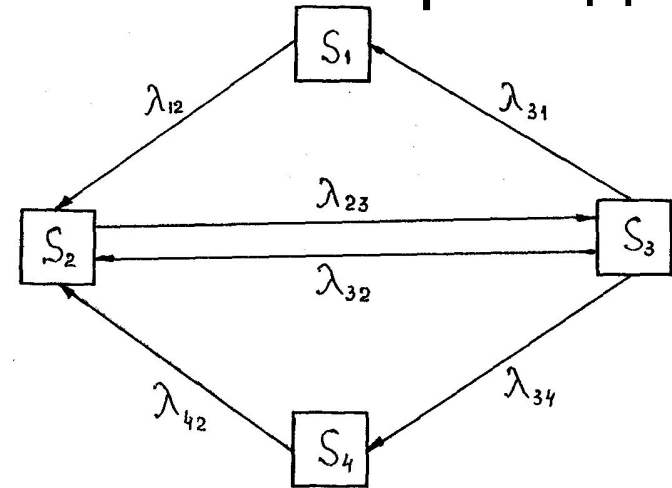
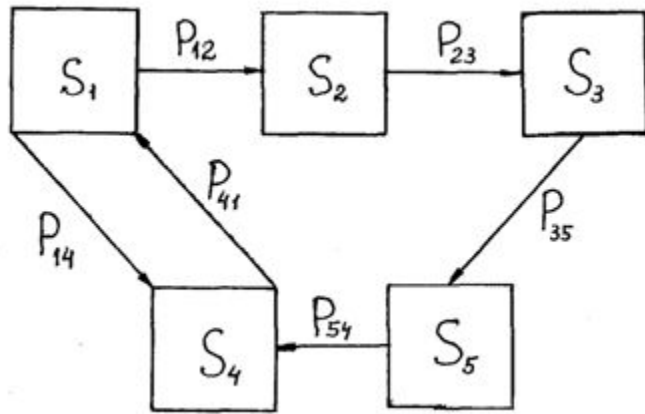
1. В естественных условиях процессы старения происходят непрерывно.
2. Любое техническое устройство не работает постоянно, работает с различной нагрузкой.
3. Системы рассматриваются в вероятностной постановке. Переход из одного состояния в другое носит вероятностный характер

Марковские случайные процессы

Марковские процессы - для каждого момента времени t_i вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_i$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_i$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

		ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ	
		дискретное	непрерывное
ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА	непрерывное	 Цепь Маркова	 Марковская последовательность
	дискретное	 Дискретный марковский процесс	 Непрерывный марковский процесс

Размеченный граф состояний и переходов



Граф состояний изображает возможные состояния системы с указанием (в виде стрелок) возможных переходов из состояния в состояние.

P_{ij} - вероятности переходов из i -го состояния в j -е состояние (для случая дискретного пространства состояний и дискретного времени)

λ_{ij} - плотность вероятностей переходов (для случайных Марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем)

Если плотности вероятностей переходов λ_{ij} не зависят от времени t , то такой марковский процесс называется *однородным*, при наличии зависимости от времени, т.е., если $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$, процесс называется *неоднородным*.

Однородная конечная цепь Маркова

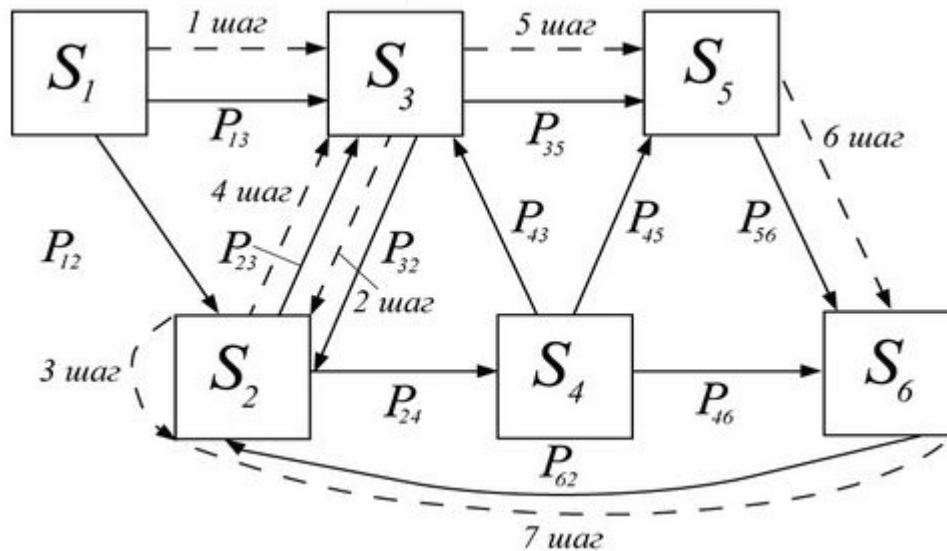
Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага (не зависят от момента времени перехода). При зависимости переходных вероятностей от номера шага Марковская цепь называется *неоднородной*.

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство матрицы P_{ij} - сумма членов, стоящих в каждой строке, равна единице

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$$

Графическое отображение конечной цепи Маркова



$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & 0 & P_{35} & 0 \\ 0 & 0 & P_{43} & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{55} & P_{56} \\ 0 & P_{62} & 0 & 0 & 0 & P_{60} \end{pmatrix}$$

В некоторые заранее определенные, фиксированные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ может реализоваться любая последовательность дискретных состояний, например :

$$S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_5 \rightarrow S_6 \rightarrow S_2$$

Эргодическая цепь Маркова

Свойство эргодичности однородной цепи Маркова означает, что переходные вероятности $P_{ij}(t)$ при достаточно большом T стремятся независимо от i -го состояния к некоторой стационарной величине.

Другими словами, эргодическая цепь Маркова – это однородная по времени цепь Маркова $S(t)$, обладающая следующим свойством: существуют независимые от i величины:

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t), \quad \sum_j P_j = 1$$

Это означает, что матрица P_{ij} превращена в матрицу из одной строки

$$\|P_{ij}\| = \|P_j\| = \|P_1, P_2 \dots P_j \dots P_n\|$$

Дискретные марковские процессы с непрерывным временем:

- **Случайный поток событий** - последовательность однородных событий, следующих один за другим в какие-то случайные моменты времени.
- **Интенсивность λ** (или «плотность») потока событий- это среднее число событий в единицу времени.
- Если $\lambda = \text{const}$, то поток событий является **стационарным**, если $\lambda = \lambda(t)$, т.е. зависит от времени, то поток событий является **нестационарным**.
- Экспоненциальный закон распределения:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

Пуассоновский процесс

Стационарный, без последствия и ординарный поток событий называется простейшим, или стационарным пуассоновским потоком. Термин пуассоновский поток означает, что число событий, попадающих на участок τ , распределено по закону Пуассона

$$P_m = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-(\lambda \tau)}$$