ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Преподаватель:

доцент кафедры ИСУ, к.т.н.

Бушуева Марина Евгеньевна

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Игра с природой (статистическая игра) – это парная матричная игра, в которой сознательный игрок A (статистик) выступает против участника, совершенно безразличного к результату игры, называемого **природой**.

- Стратегиями природы являются ее возможные состояния, которые реализуются случайным образом.
- Относительно этих состояний можно сделать n предположений $П_1, \ldots, П_n$. Эти предположения будем рассматривать как стратегии природы.
- Игрок A имеет в своем распоряжении m стратегий $A_1,\ldots,A_m$. Выигрыш (проигрыш) игрока A при выборе им стратегии A_i в ответ на стратегию $П_j$ равен a_{ij} и задан в виде платежной матрицы $m \times n$.

Определить стратегию A, обеспечивающую максимальный выигрыш (минимальный проигрыш).

РЕШЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

1. Следует исключить «заведомо невыгодные» стратегии игрока A из платежной матрицы.

2. Если $a_{ij} < a_{kl}$, то это не значит, что стратегия A_i выгоднее A_k, а возможно, что состояние $П_j$ благоприятнее $П_l$.

3. Наряду с матрицей платежей A часто используется *матрица рисков* R.

Риском r_{ij} игрока A при использовании им стратегии A_i в условиях $П_j$ называется разность между максимально возможным выигрышем в условиях $П_j$ и выигрышем, если в этих же условиях применить стратегию A_i

Если A - матрица выигрыша $$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

Если A - матрица потерь $$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}$$

ПРИМЕР 1. НАЙТИ МАТРИЦУ РИСКОВ (A - МАТРИЦА ВЫИГРЫША).

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{Vmatrix} \qquad R = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$$

$$\max \quad 4 \quad 8 \quad 6 \quad 9$$

$\boldsymbol{a_{21} = a_{24} = 3}$, однако они не равноценны. В условиях $\boldsymbol{\Pi_1}$ стратегия $\boldsymbol{A_2}$ почти оптимальна (риск $= 1$), а в условиях $\boldsymbol{\Pi_4}$ далеко нет (риск $= 6$).

В статистических играх существует две постановки задачи определения оптимальной стратегии: при одной желательно получить **max** выигрыш (**min** проигрыш), при другой – **min** риск.

Применяются следующие критерии:

- – Критерий Байеса.
- – Критерий недостаточного основания Лапласа.
- – Максиминный критерий Вальда.
- – Критерий минимаксного риска Сэвиджа.
- – Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.

1. КРИТЕРИЙ БАЙЕСА

Игроку A (статистику) должны быть известны вероятности, с которыми система (окружающая среда) находится в каждом из своих состояний $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Обозначим эти вероятности соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(j = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

Информация о вероятностях состояний окружающей среды может быть известна. Оптимальным можно считать такое поведение игрока A, при котором максимизируется его средний выигрыш (минимизируется средний проигрыш).

средний выигрыш в этом случае при выборе стратегии $\boldsymbol{A_i}$ равен

$$L_i = a_{i1} p_1 + \ldots + a_{in} p_n \qquad (i = \overline{1, m})$$

Если $\boldsymbol{A}$ - матрица выигрышей $$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \to \max$$

Если $\boldsymbol{A}$ - матрица потерь $$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \to \min$$

эта же стратегия всегда обеспечивает и минимальный средний риск: $$r = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j \to \min$$

2. КРИТЕРИЙ НЕДОСТАТОЧНОГО ОСНОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Если есть основания считать состояния природы равновероятными

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$$

то можно пользоваться критерием Лапласа:

A - матрица выигрышей

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \to \max$$

A - матрица потерь

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \to \min$$

ПРИМЕР 2.

Крупный ресторан определяет уровень предложения услуг, чтобы удовлетворить потребности клиентов в предстоящие праздники. Точное число клиентов неизвестно, но ожидается, что оно может принять одно из 4-х значений: **200**, **250**, **300**, **350**. Для каждого из этих значений рассчитаны затраты, обеспечивающие наилучший уровень предложения. Отклонения от этих значений влечет за собой дополнительные затраты либо из-за превышения спроса над предложением, либо наоборот. Потери в тыс. определяются матрицей. Определить наилучший уровень предложения.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

Пользуясь критерием Лапласа и полагая $P(П_i) = 0{,}25$, находим среднее значение затрат

$$E(A_1)=\frac{1}{4}(5+10+18+25)=14{,}5$$

$$E(A_2)=\frac{1}{4}(8+7+8+23)=11{,}5$$

$$E(A_3)=\frac{1}{4}(21+18+12+21)=18$$

$$E(A_4)=\frac{1}{4}(30+22+19+55)=21{,}5$$

По критерию Лапласа наилучший уровень предложения A_2, т.е. ***250*** клиентов

3. МАКСИМИННЫЙ (МИНИМАКСНЫЙ) КРИТЕРИЙ ВАЛЬДА

Игра с природой ведется как игра с разумным, причем агрессивным противником

Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимальный выигрыш в наихудших условиях (минимальный проигрыш)

$$L = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \left(L = \min_i \max_j a_{ij}\right)$$

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**max**	
A_1	5	10	18	25	25	
A_2	8	7	8	23	23	
A_3	21	18	12	21	21	**min**
A_4	30	22	19	15	30	

Оптимальной является стратегия A_3 **(300 клиентов).** Ориентируясь на нее, мы потеряем не более **21** тыс.

4. КРИТЕРИЙ МИНИМАКСНОГО РИСКА СЭВИДЖА

Критерий крайнего пессимизма, рекомендует выбирать стратегию, обеспечивающую в наихудших условиях минимальный риск.

$$r = \min_i \max_j r_{ij}$$

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 5 & 10 & 18 & 25 \\ & 8 & 7 & 8 & 23 \\ & 21 & 18 & 12 & 21 \\ & 30 & 22 & 19 & 15 \\ \hline \mathbf{min} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{15} \end{array}$$

$$R = \begin{array}{|cccc|cc} & & & & \mathbf{max} & \\ 0 & 3 & 10 & 10 & 10 & \\ 3 & 0 & 0 & 8 & 8 & \mathbf{min} \\ 16 & 11 & 4 & 6 & 16 & \\ 25 & 15 & 11 & 0 & 25 & \end{array}$$

По критерию Сэвиджа оптимальна – $\boldsymbol{A_2}$, т.е. $\boldsymbol{250}$ клиентов

5. КРИТЕРИЙ ПЕССИМИЗМА-ОПТИМИЗМА ГУРВИЦА

Крайнему пессимизму можно противопоставить крайний оптимизм (*критерий азартного игрока*), когда ставка делается на самый большой возможный выигрыш, т.е. на самый большой элемент платежной матрицы:

$$L = \max_i \max_j a_{ij}$$

Чаще применяется критерий «умеренного оптимизма», который называют критерием пессимизма-оптимизма Гурвица (а также критерием обобщенного максимума).

$$H = \max\left\{\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij}\right\}$$ $\boldsymbol{A}$ – матрица выигрышей

$0 \le \lambda \le 1$ – коэффициент пессимизма (чем больше значение λ, тем больше пессимизма)

$\lambda = 1$ - критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (крайний пессимизм)

$\lambda = 0$ – критерий крайнего оптимизма (максимальный выигрыш в наилучших условиях)

$0 < \lambda < 1$ - нечто среднее между тем и другим.

Коэффициент λ выбирается из субъективных соображений: чем опаснее ситуация, тем ближе к $\mathbf{1}$ выбираем λ.

$$H = \min_i \{\lambda \max a_{ij} + (1 - \lambda) \min a_{ij}\}$$

$\boldsymbol{A}$ – матрица потерь

ПРИМЕР 2 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

				min	max
5	10	18	25	***5***	***25***
8	7	8	23	***7***	***23***
21	18	12	21	***12***	***21***
30	22	19	15	***15***	***22***

Оптимальной стратегией является либо A_1 либо A_2, для которых **H =15**.

Выберем $\lambda = 1/2.$

$25 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}5 = 15 \quad \leftarrow \mathbf{min}$

$23 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}5 = 15 \quad \leftarrow \mathbf{min}$

$21 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 0{,}5 = 16{,}5$

$30 \cdot 0{,}5 + 15 \cdot 0{,}5 = 22{,}5$

Если взять более оптимистичную $\lambda = 1/4.$, то оптимальной стратегией будет A_1 $(H = 10)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В рассматриваемом примере получили:

- по критерию Лапласа – A_2, потери $11,5$
- по критерию Вальда – A_3, потери 21
- по критерию Сэвиджа – A_2, риск 8

-по критерию Гурвица при $\lambda = 1/2 - A_2, A_1$, потери 15

при $\lambda = 1/4 - A_1$ потери 10.

Отсюда следует, что если руководствоваться не самыми пессимистичными прогнозами, то можно ориентироваться на A_2 для более пессимистичного варианта – A_3.

ПРИМЕР 3.

Швейная фабрика должна израсходовать в апреле ***3 500 000*** руб. на пошив мужских брюк и костюмов, причем брюки ей обходятся в ***1000*** руб., а костюмы – в ***2500***. Реализация продукции будет происходить в мае по ценам: брюки – ***2000*** руб., костюмы – ***4500*** руб. По статистическим данным в мае можно продать в случае прохладной погоды ***500*** брюк и ***1200*** костюмов, в случае теплой погоды ***600*** костюмов и ***2000*** брюк. Непроданный товар дохода не приносит, учитывая расходы на хранение, переоценку и т.д.

КАК МАКСИМИЗИРОВАТЬ СРЕДНИЙ ДОХОД ФАБРИКИ?

Построим матрицу выигрышей

$$a_{11} = 500 \cdot 2000 + 1200 \cdot 4500 - 3\,500\,000 = 290 \cdot 10^4 \text{ руб.}$$
$$a_{12} = 500 \cdot 2000 + 600 \cdot 4500 - 3\,500\,000 = 20 \cdot 10^4 \text{ руб.}$$
$$a_{21} = 500 \cdot 2000 + 600 \cdot 4500 - 3\,500\,000 = 20 \cdot 10^4 \text{ руб.}$$
$$a_{22} = 2000 \cdot 2000 + 600 \cdot 4500 - 3\,500\,000 = 320 \cdot 10^4 \text{ руб}$$

$$A = \begin{array}{c|cc|} & пр & теп \\ \hline пр & 290 & 20 \\ теп & 20 & 320 \end{array}$$

РЕШЕНИЕ

- Критерии Лапласа – A_2
- Критерий Вальда – A_1 *и* A_2 равнооптимальны
- Критерий Сэвиджа – A_2.
- Критерий Гурвица

$$(\lambda = 0{,}2) - A_2$$
$$(\lambda = 0{,}5) - A_2$$
$$(\lambda = 0{,}8) - A_2$$

ПРИМЕР 4

Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может принимать следующее значение: **100, 150, 200, 250, 300**. Свежие булочки продаются по **49** центов, если булочка не продана днем, то она будет реализована за **15** центов к концу дня. Затраты магазина на одну булочку **25** центов. Определить какое число булочек надо заказывать ежедневно.

Прибыль **49 – 25 = 24** (ц.)

Убыток **15 – 25 = -10** (ц.)

	100	*150*	*200*	*250*	*300*	
100	24	24	24	24	24	
150	19	36	36	36	36	
200	14	31	48	48	48	x 100
250	9	26	43	60	60	
300	4	21	38	55	72	

РЕШЕНИЕ

- Критерии Лапласа – **250** булочек
- Критерий Вальда – **100** булочек
- Критерий Сэвиджа – **250** булочек
- Критерий Гурвица $(\lambda = 0{,}6)$ – **250** булочек

Критерий Байеса

	100	***150***	***200***	***250***	***300***	
вероятности	0,2	0,3	0,3	0,2	0,1	

200 булочек

ПРИМЕР 5

Вокзал определяет количество транспортных средств для удовлетворения потребностей пассажиров в праздничные дни. Точное число клиентов не известно, но предположительно оно может быть: A_1 - до 2-х тыс., A_2 - от 2-х до 3-х тыс., A_3 - от 3-х до 4-х тыс., A_4 - от 4-х до 5-ти тыс. Рассчитаны затраты, обеспечивающие перевозки пассажиров. Любые отклонения приводят к дополнительным затратам. Потери определяются матрицей. Определить наилучший уровень предложений.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	7	12	20	27
A_2	10	9	11	25
A_3	23	20	14	23
A_4	31	24	17	12

РЕШЕНИЕ

- Критерии Лапласа – A_2
- Критерий Вальда – A_3
- Критерий Сэвиджа – A_2.
- Критерий Гурвица $(\lambda = 0{,}5)$ – A_1 и A_2

ПРИМЕР 6

Судебный исполнитель Гарри должен вручить повестку Стиву. Гарри собирается подкараулить Стива возле его дома. Гарри знает, Что у Стива есть сосед, который не подозревает о его проблемах, но не знает, что со Стивом в доме находится его друг Том. Гарри не знает как выглядит Стив и может вручить повестку либо первому выходящему из дома, либо второму. Если первым их дома выйдет Стив и Гарри вручит ему повестку, то Стив заплатит штраф 500 марок. Если первым выйдет Том, то Гарри получит премию 100 марок, т.к. Том преступник в розыске. Если повестку получит сосед, Гарри заплатит штраф 200 марок (моральный ущерб)

A_1 – вручить 1 выходящему из дома

A_2 – вручить 2 выходящему из дома

	Т Ст	Т Сос	Ст Т	Ст Сос	Сос Т	Сос Ст
A_1	100	100	500	500	-200	-200
A_2	500	-200	100	-200	100	500