

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ++ a_{1n}x_n = e_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ++ a_{2n}x_n = e_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ++ a_{mn}x_n = e_m \end{array} \right.$$

a_{ij} – коэффициенты, x_j - неизвестные, b_i - свободные члены уравнений.

Опр. Решить систему означает найти все совокупности значений неизвестных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе или показать, что система не имеет решений.

1. Если система не имеет решений, то она называется **несовместимой**.

2. Если она имеет единственное решение – **определенной**.

3. Если она имеет бесконечно много решений – **неопределенной**.

Опр: Если хотя бы одно из чисел b_i , отлично от нуля, система называется **неоднородной**. Если все свободные члены равны нулю, то система называется **однородной**.

Опр: Матрица составленная из коэффициентов системы называется **основной матрицей**, если к основной матрице приписать справа столбец свободных членов, то получится **расширенная матрица системы**.

Метод Крамера

По формулам Крамера решаются только неоднородные системы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Опр: Определитель Δ основной матрицы называется главным (основным) определителем.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Опр: **Дополнительным определителем** называется определитель полученный из главного определителя путем замены j-го столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & a_{12} & a_{13} \\ B_2 & a_{22} & a_{23} \\ B_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & B_1 & a_{13} \\ a_{21} & B_2 & a_{23} \\ a_{31} & B_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & B_1 \\ a_{21} & a_{22} & B_2 \\ a_{31} & a_{32} & B_3 \end{vmatrix}$$

Теорема: Если определитель системы Δ не равен 0, то система имеет **единственное решение**, которое находится по формулам:

$$X_1 = \Delta_1 / \Delta;$$

$$X_2 = \Delta_2 / \Delta;$$

$$X_3 = \Delta_3 / \Delta$$

Теорема: Если определитель системы $\Delta=0$, и хотя бы один из определителей Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 отличен от нуля, то система **несовместна**(т.е. не имеет решений).

Теорема: Если определитель системы $\Delta=0$,
и $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, то система имеет
бесконечное множество решений.
(неопределенная система).

Матричный метод решения СЛАУ

Системе 3х линейных уравнений
соответствует матричное уравнение

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Метод не работает, если число уравнений не равно числу неизвестных, или когда матрица системы хотя и квадратна, но вырождена (тогда не существует обратной матрицы, т.е. определитель основной матрицы равен нулю).