ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

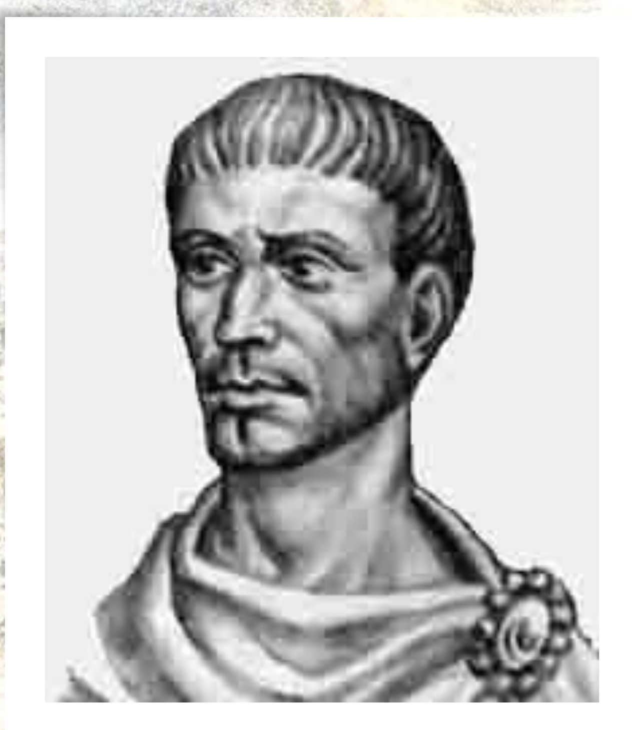
Десятая проблема Гильберта

Выполнила:
магистрант 2 курса
Магистерская программа:
«Математическое образование»
Истомина Ирина

Омск - 2013

Пролог

Диофант – последний великий математик античности.



Диофант Александрийский
3 в. н.э.

Основным произведением Диофанта была "Арифметика".

В этой книге произошел окончательный отказ от так называемой "геометрической алгебры"и переход к новому математическому языку, так называемой "буквенной алгебре".

Диофантовы уравнения

Основные направления деятельности Диофанта:

1) Арифметико – алгебраическое направление;
2) Исследование неопределенных уравнений.

Уравнение вида:

$$\boxed{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,}$$

где P – многочлен с целыми коэффициентами, а $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{Z}$, называется диофантовым уравнением.

Пример **1:** $x^2 + y^2 = z^2$

если тройка натуральных чисел (x_0, y_0, z_0) ему удовлетворяет то по теореме, обратной к теореме Пифагора, из отрезков длины x_0, y_0 и z_0 можно сложить прямоугольный треугольник и, таким образом, построить прямой угол.

Решение: $x=(m^2-n^2)l$ $\quad y=2mnl$

$z=(m^2+n^2)l \quad m \in N, n \in N, l \in N$

Пример **2:**

$$x^n + y^n = z^n, n \in N$$

Пьер Ферма (1601 - 1665)

Великая теорема Ферма

Это уравнение при $n>2$ **не имеет** решений в целых числах.

Эта задача, казалось бы, не слишком отличается от предыдущей, на самом дела оказалась чудовищно трудной.

Возникает вопрос:

Нет ли какого-нибудь способа по виду уравнения, по его коэффициентам определять, имеет ли это уравнение решение в целых числах?

Десятая проблема

Давид Гильберт
(1862 - 1943)

8 августа 1900 года на заседании 5-й и 6-й секций **II Международного конгресса математики** со своим докладом выступил знаменитый немецкий математик, профессор Геттингенского университета **Давид Гильберт**.

Его доклад носил скромное название **«Математические проблемы»,** но в нём Гильберт перечислил наиболее насущные и важнейшие **23 проблемы** математики.

Задача о разрешении диофантовых уравнений (Десятая проблема Гильберта)

Пусть задано произвольное **диофантово уравнение** с произвольным числом неизвестных

Указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение в целых числах или нет.

Задача о разрешении диофантовых уравнений

Десятая проблема Гильберта является примером **массовой проблемы.**

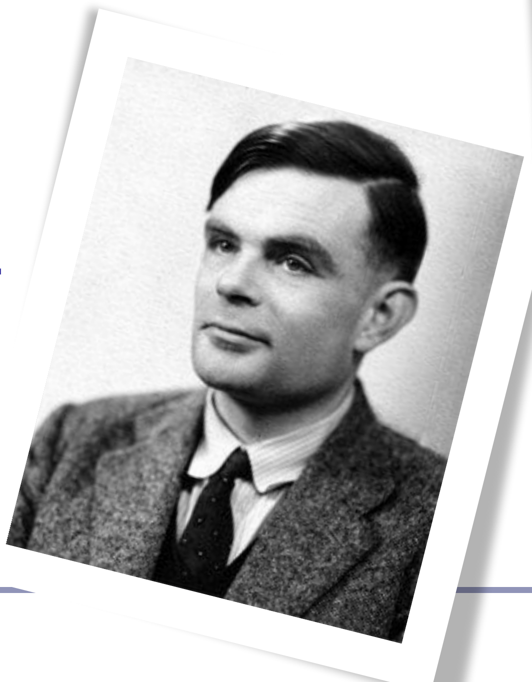
Массовая проблема — это проблема, состоящая из счётного множества **индивидуальных проблем**, на каждую из которых надо дать конкретный ответ **«ДА»** или **«НЕТ».**

Суть массовой проблемы: требуется найти единый метод, пригодный для получения ответа на любую из её индивидуальных подпроблем.

Что такое «<u>общий метод» </u>и какими средствами он может быть реализован?

В начале 30-х г.г. XX в. выработано понятие «общего метода», или ***алгоритма***, которое дало принципиальную возможность устанавливать невозможность алгоритма с требуемыми свойствами, или его существование.

Алан Тьюринг (1912-1954)



Алонзо Чёрч (1903-1995)

И уже в 1944 году Э. Пост пишет в одной из своих работ:

Эмиль Пост
(1897-1954)

«…*десятая проблема Гильберта молит о доказательстве неразрешимости*»

Гипотеза Дэвиса

Мартин Дэвис
род. 1928 г.

М. Дэвис перешёл от формулировки Десятой проблемы Гильберта в целых числах к естественной для теории алгоритмов формулировке в натуральных числах.

Он рассуждал следующим образом:

Для конкретного диофантова уравнения проблема распознавания **наличия целочисленных решений** и проблема распознавания **наличия неотрицательных целочисленных решений** — это две разные проблемы.

Гипотеза Дэвиса

С другой стороны, пусть

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ **(1)** - произвольное диофантово уравнение, и мы интересуемся наличием у него **неотрицательных** решений.

Рассмотрим систему уравнений :

$$\begin{cases} P(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ x_1 = y_{1,1}^2 + y_{1,2}^2 + y_{1,3}^2 + y_{1,4}^2 \\ x_2 = y_{2,1}^2 + y_{2,2}^2 + y_{2,3}^2 + y_{2,4}^2 \\ \ldots \\ x_n = y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 + y_{n,3}^2 + y_{n,4}^2 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

$$
\begin{cases}
P(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\
x_1 = y_{1,1}^2 + y_{1,2}^2 + y_{1,3}^2 + y_{1,4}^2 \\
x_2 = y_{2,1}^2 + y_{2,2}^2 + y_{2,3}^2 + y_{2,4}^2 \\
\ldots \\
x_n = y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 + y_{n,3}^2 + y_{n,4}^2
\end{cases} \text{(2)} \qquad P(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \quad \text{(1)}
$$

Понятно, что:

1)что любое решение системы **(2)** в произвольных целых числах содержит решение уравнения **(1)** в неотрицательных целых числах.

2) что для любого решения уравнения **(1)** в неотрицательных целых числах $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ найдутся целочисленные значения $\boldsymbol{y_{1,1}}, \ldots, \boldsymbol{y_{n,4}}$, дающие решение системы **(2)** , так как каждое неотрицательное целое число представимо в виде суммы квадратов четырёх целых чисел (Теорема о четырех квадратах).

$$\begin{cases} P(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ x_1 = y_{1,1}^2 + y_{1,2}^2 + y_{1,3}^2 + y_{1,4}^2 \\ x_2 = y_{2,1}^2 + y_{2,2}^2 + y_{2,3}^2 + y_{2,4}^2 \\ \dots \\ x_n = y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 + y_{n,3}^2 + y_{n,4}^2 \end{cases} \quad (2) \qquad P(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \quad (1)$$

Система (2) может быть свёрнута в одно уравнение :

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n, y_{1,1}, \dots, y_{n,4})$$

-разрешимое в целых числах тогда и только тогда, когда исходное уравнение (1) разрешимо в неотрицательных целых числах.

Таким образом, проблема распознавания наличия решений в неотрицательных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания наличия решений в целых числах.

Гипотеза Дэвиса

Тем самым установлено, что для доказательства неразрешимости 10-й проблемы Гильберта в её оригинальной постановке достаточно доказать неразрешимость её аналога, касающегося наличия или отсутствия решений в неотрицательных целых – в числах натуральных.

Гипотеза Дэвиса

наряду с классическими диофантовыми уравнениями:

$\boldsymbol{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0}$, где $\boldsymbol{P}$ – многочлен с целыми коэффициентами, $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n} \in \mathbb{Z}$

Дэвис рассмотрел их параметрическую версию:

$\boldsymbol{P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0}$, где $\boldsymbol{P}$ – многочлен с целыми коэффициентами, $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_m} \in \mathbb{Z}$ **- параметры,** $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n} \in \mathbb{Z}$ **- переменные.**

Гипотеза Дэвиса

$P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ **- параметры,** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ **- переменные.**

При одном наборе значений параметров уравнение может иметь решение, при другом решений может не существовать.

Дэвис выделил множество M, которое содержит все наборы значений параметров при которых уравнение имеет решение:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \; \{P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}$$

Гипотеза Дэвиса

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \{P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0\}$$

(1) – диофантово представление множества

M – диофантово множество

Для доказательства неразрешимости десятой проблемы Гильберта нужно было лишь показать диофантовость любого перечислимого множества.

Перечеслимое множество - множество конструктивных объектов, все элементы которого могут быть получены с помощью некоторого алгоритма.

Для доказательства неразрешимости десятой проблемы Гильберта нужно было лишь показать диофантовость любого перечислимого множества.

то есть нужно показать возможность построения уравнения, которое имело бы натуральные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ только при всех $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$, принадлежащих этому перечислимому множеству.

Всё это привело Дэвиса к следующей гипотезе:

Понятия диофантового и перечислимого множества совпадают. Это значит, что множество диофантово тогда и только тогда, когда оно перечислимо.

Дэвис также сделал первый шаг — доказал, что любое перечислимое множество можно представить в виде:

Нормальная форма Дэвиса

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists z\ \forall y{<}z\ \ \exists x_1, x_2, \dots, x_n \{P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n)=0\}$$

Гипотеза Робинсон

Исследовала вопрос о том, является ли диофантовым множество, состоящее из троек :

$$\langle a, b, c=a^b \rangle$$

Джулия Робинсон (1919-1985)

Найти диофантово представление для операции возведения в степень ей не удалось, но, тем не менее, в своей работе она показала **достаточное условие** для его существования.

Гипотеза Робинсон

Достаточное условие для существования диофантова представления для операции возведения в степень

$$\langle a,b\rangle \in M \Leftrightarrow \exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \{P(a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0\}$$

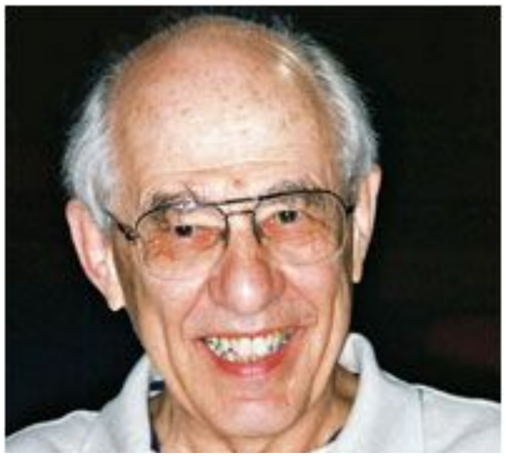
Его определяет отношение **J(a, b)** со следующими свойствами:

1) $\forall$ a, b$\in$ M: J(a, b) $\Rightarrow a<b^b$

2) $\forall$ k $\exists$ a, b$\in$ M: J(a, b) $\wedge$ $a>b^k$

J(a, b) – «зависимость экспоненциального роста» или «предикат Робинсон»

Дэвис и Патнем: объединение усилий



Хилари Патнем
род. 1926г.

В 1958 году М. Дэвис и Х. Патнем публикуют работу в которой они рассмотрели класс **экспоненциально-диофантовых** уравнений, имеющих вид:

$$\boxed{\mathbf{E_L}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{E_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

где $\mathbf{E_L}$, $\mathbf{E_R}$ — экспоненциальные многочлены, то есть выражения, полученные из переменных и рациональных чисел с применением операций сложения, умножения и возведения в степень.

Дэвис, Патнем и Робинсон: объединение усилий

В 1961 году в совместной работе Робинсон, Дэвиса и Патмена было получено экспоненциально - диофантово представление для любого перечислимого множества:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists \; x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$\mathbf{E_L}(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{E_R}(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

Одним из следствий работы стала возможность сведения любого **показательно-диофантова** уравнения к **экспоненциально-диофантову** уравнению с фиксированным числом переменных.

Чтобы перенести результат Дэвиса, Патнема и Робинсон на «обычные» диофантовы уравнения, нужно было доказать, что множество, состоящее из троек **⟨a, b, c=a^b⟩**, является диофантовым. Тогда стало бы возможным ценой введения дополнительных неизвестных перевести экпоненциально-диофантово представление в диофантово представление:

$$a,b,c=a^b \Leftrightarrow \exists \; x_1, x_2, \ldots, x_n \; P(a, b, c, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

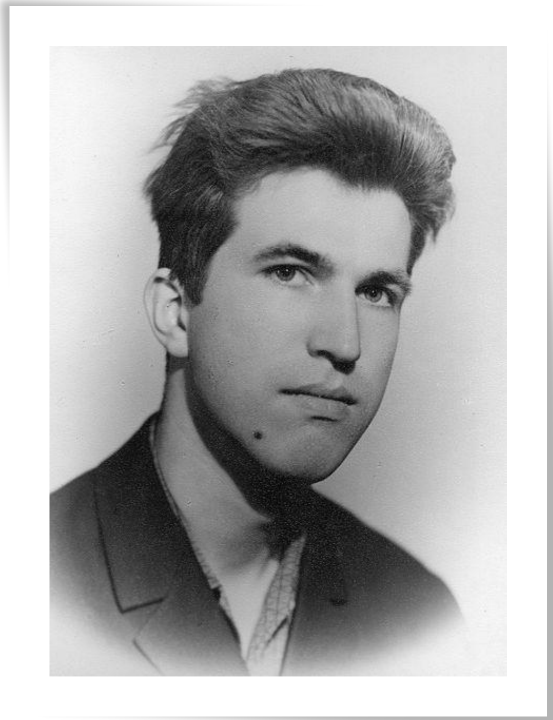
Гипотеза Робинсон

Для этого достаточно построить конкретное уравнение

$$P(a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

- недопускающее решение с $a>b^b$
- для каждого k имеющее решение с $a>b^k$

Что сделал Ю.В. Матиясевич?



Юрий Владимирович Матиясевич род .в 1947г.

Именно такого рода уравнение удалось построить 22-летнему аспиранту Юрию Матиясевичу. в начале 1970 года…

…обратившись к рассмотрению последовательности Фибоначчи.

Числа Фибоначчи , бесконечная последовательность , которая определяется рекуррентной формулой:

$$\psi_{n+1}=\psi_{n-1}+\psi_n$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

$$P(a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

- недопускающее решение с $a>b^b$
- для каждого ***k*** имеющее решение с $a>b^k$

Ю.В. Матиясевич заметил, что если:

1) за $\boldsymbol{a}$ взять половину номера четного члена последовательности Фибоначчи, *а за* $\boldsymbol{b}$ — сам член, то неравенство $\boldsymbol{a>b^b}$ будет всегда неверно;
2) для любого k можно найти такой четный член последовательности, что неравенство $\boldsymbol{a>b^k}$ будет верно.

Номер члена последовательности	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Член последовательности *v*	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
Половина номера четного члена последовательности *u*	0		1		2		3		4		5		6		7
u^u	1		1		4		27		64		3125		47256		823649
u^0	1		1		1		1		1		1		1		1
u^1	0		1		2		3		4		5		6		7
u^2	0		1		4		9		16		25		36		49
u^3	0		1		8		27		64		125		216		343

Ю.В. Матиясевич рассмотрел последовательность, задаваемую соотношениями:

$$\varphi_0=0,\ \varphi_1=1,\ \phi_{n+1}=3\phi_n-\phi_{n-1}$$

Получилось в точности последовательность из четных членов первоначальной последовательности:

$$\phi_0=0,\ \phi_1=1,\ \phi_2=3,\ \phi_3=8,\ \phi_4=21,\ \phi_5=55,\ \phi_6=144,\ \phi_7=377\ldots$$

Приняв теперь за a номер члена последовательности, а за b — член последовательности с номером a, т. е. ϕ_a, мы получаем, что снова выполняется требуемое свойство для a и b.

- Осталось построить уравнение $\boldsymbol{P(a, b, x_1, \ldots, x_k)=0}$, которое имело бы натуральное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{b} = \phi_{\mathbf{a}}$

- Для этого достаточно было построить систему диофантовых уравнений $\boldsymbol{P_1 = 0, \ldots, P_n = 0}$ в переменных $\mathbf{a}, \boldsymbol{b, x_1 \ldots , x_n}$, имеющую решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{b} = \phi_{\mathbf{a}}$— ведь такая система имеет в точности те же решения, что и единственное уравнение

$$\boldsymbol{P^2_1 + .. + P^2_n = 0}$$

Литература

1. Болибрух А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя). / [Текст] . М., МЦМНО, 1999.

2. Варпаховский Ф.П., Колмогоров А.Н. О решении десятой проблемы Гильберта // Квант.-1970.-№7.-с.39-44

3. Демидов С. Проблемы Гильберта и советская математика // Квант, 1977, №11, с. 31-33

4. Матиясевич Ю.В. Десятая проблема Гильберта. М.: Физматлит. 1993

5. http://www.goldenmuseum.com/1612Hilbert_rus.html

Спасибо за внимание !!!

Теорема о четырёх квадратах (Лагранж, 1772)

Жосеф Луи Лагранж (1736 - 1813)

Диофантово уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a$$

имеет решение в целых x_1, x_2, x_3, x_4 при любом неотрицательном целом a.