

6. Нормальный закон распределения

Стандартный нормальный закон

Функция Лапласа

Вероятность попадания
нормальной СВ в заданный интервал

Правило «трех сигм»

Непрерывное распределение, которое занимает наиболее важное положение в теории и практике статистики – *распределение Гаусса*, или *нормальное распределение*

Это так,
и этот ЗР
действитель
но важен
вот почему:

«Нормальный» можно понимать как выражение нормы, некоторого стандарта, «образца поведения» СВ

to be continued

- 1) Чаще всех в практических задачах («приложениях»)
- 2) Им часто аппроксимируют другие законы

- 3) Является пределом для других ЗР при некотором $n \rightarrow \infty$ (биномиальный при ∞ числе испытаний)
- 4) Занимает центральное положение в семействе ЗР (моделей распределений), центр симметрии ($A, E = 0$)

Часто встречается в статистике, что

Примеры:

Случайная величина X распределена нормально, когда все ее значения x формируются под суммарным воздействием очень большого числа случайных факторов, эффекты каждого из них малы, сравнимы по величине и равновероятны по знаку

Ошибки измерений часто нормальны
(такие распределения обнаружили астрономы в 18 веке)

В статистике – распределение выборочного среднего стремится к нормальному, даже если отдельные наблюдения не нормальны

Некоторые характеристики живых организмов подчинены нормальному закону

В производстве и контроле качества – % брака, производительность, размеры деталей ...

В сфере финансов, рынка, в деловой практике – отношение «цена / доход», годовая зарплата ...

**СВ распределена по нормальному закону
если ее функция плотности равна**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Функция распределения нормальной величины определяется как

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] du$$

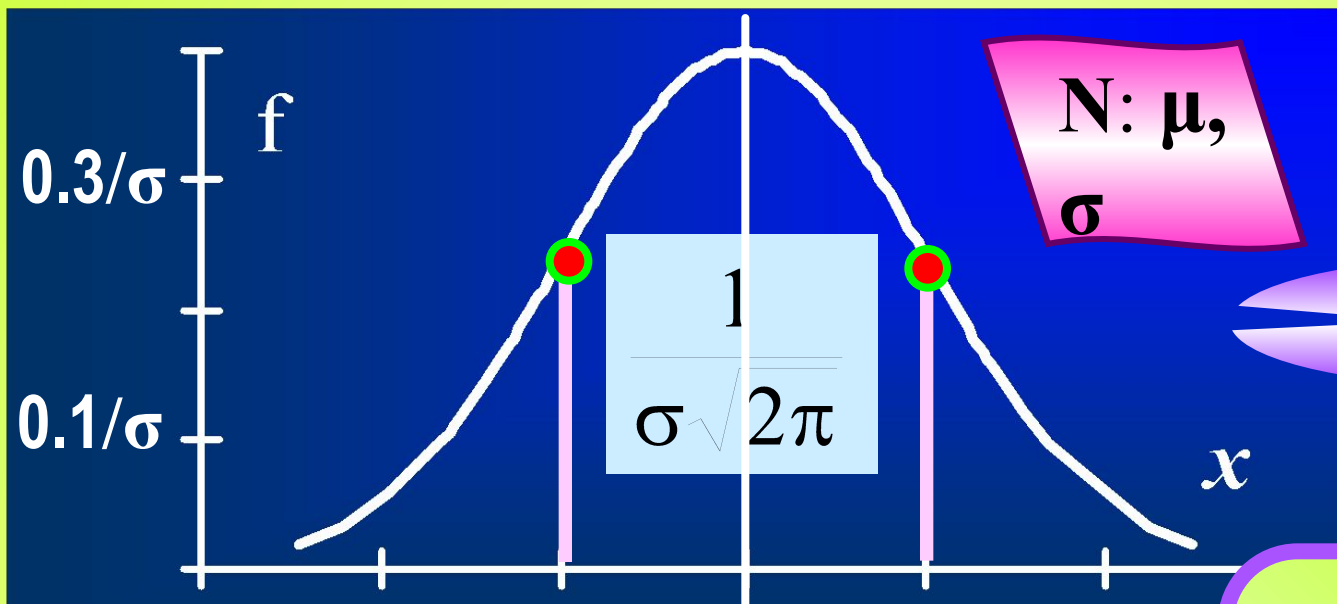
Параметры μ и σ^2 – матожидание и дисперсия

Это двухпараметрический закон $\rightarrow$

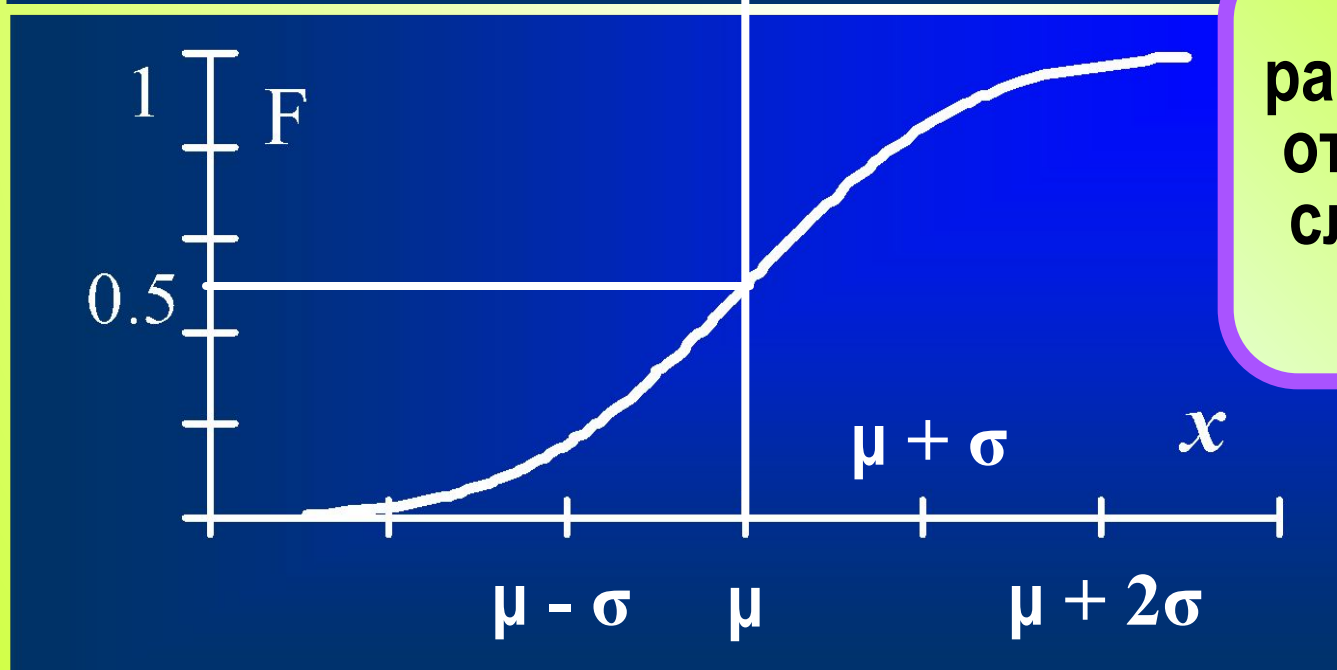
- 1) если известно, что распределение нормально, знание μ и σ дает полное описание СВ
- 2) все нормальные СВ отличаются только μ и σ



Используют специальное обозначение нормальных величин – N: μ, σ

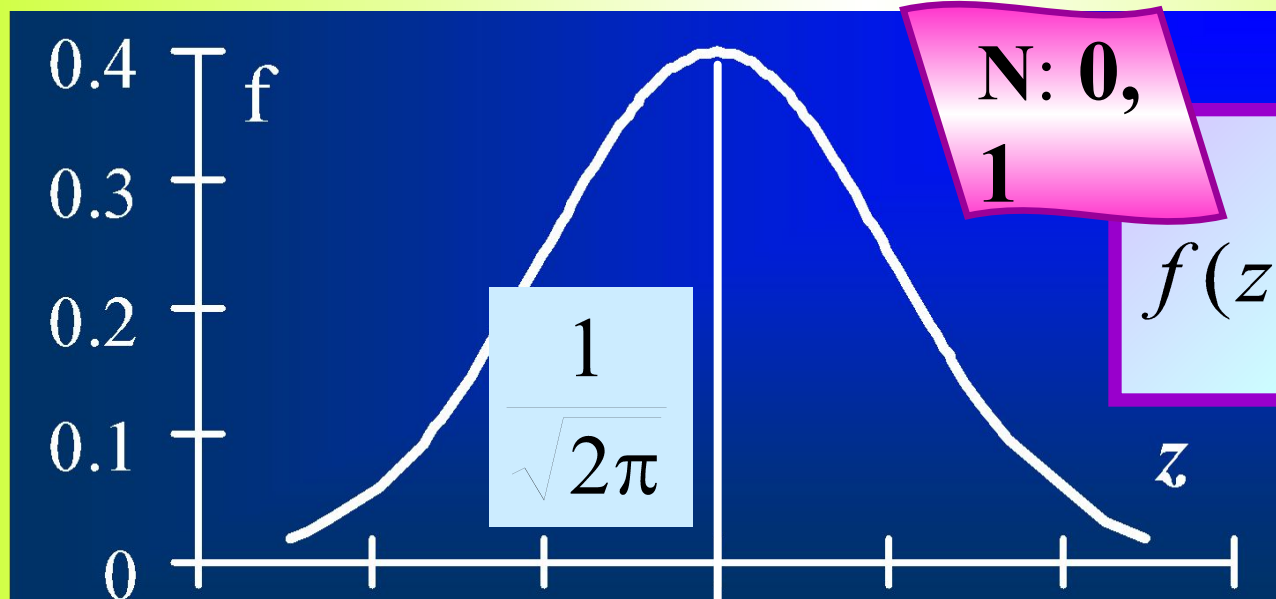


NB!



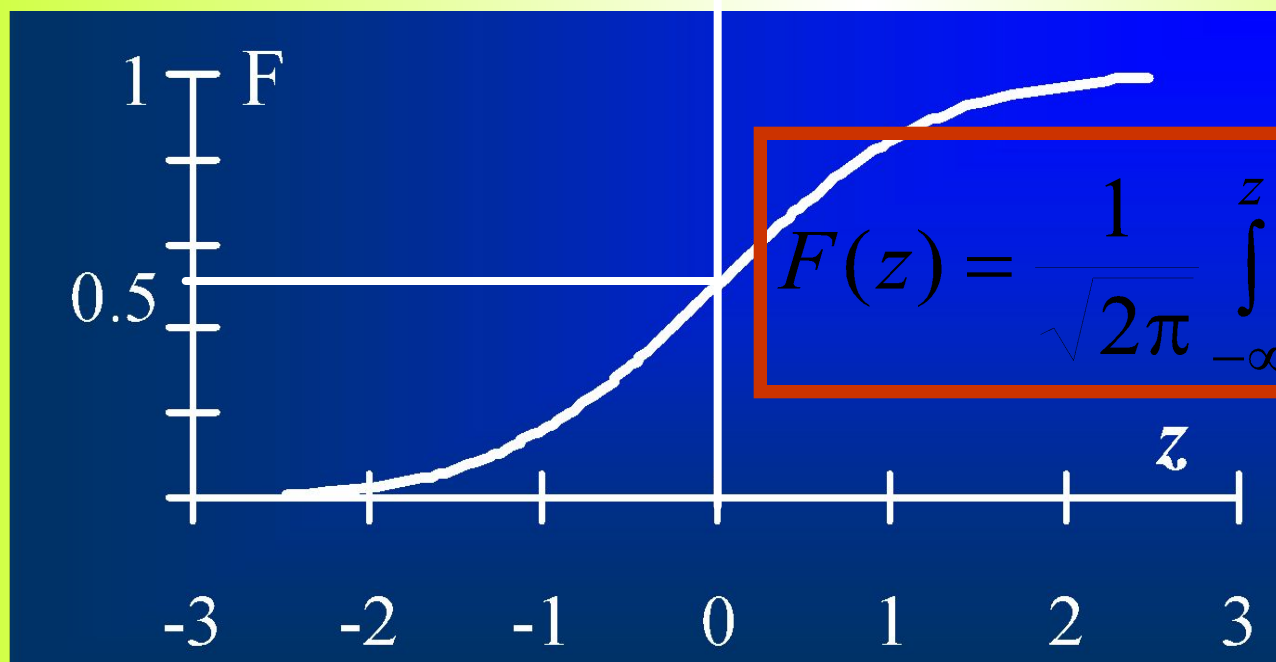
Чем это
распределение
отличается от
следующего?





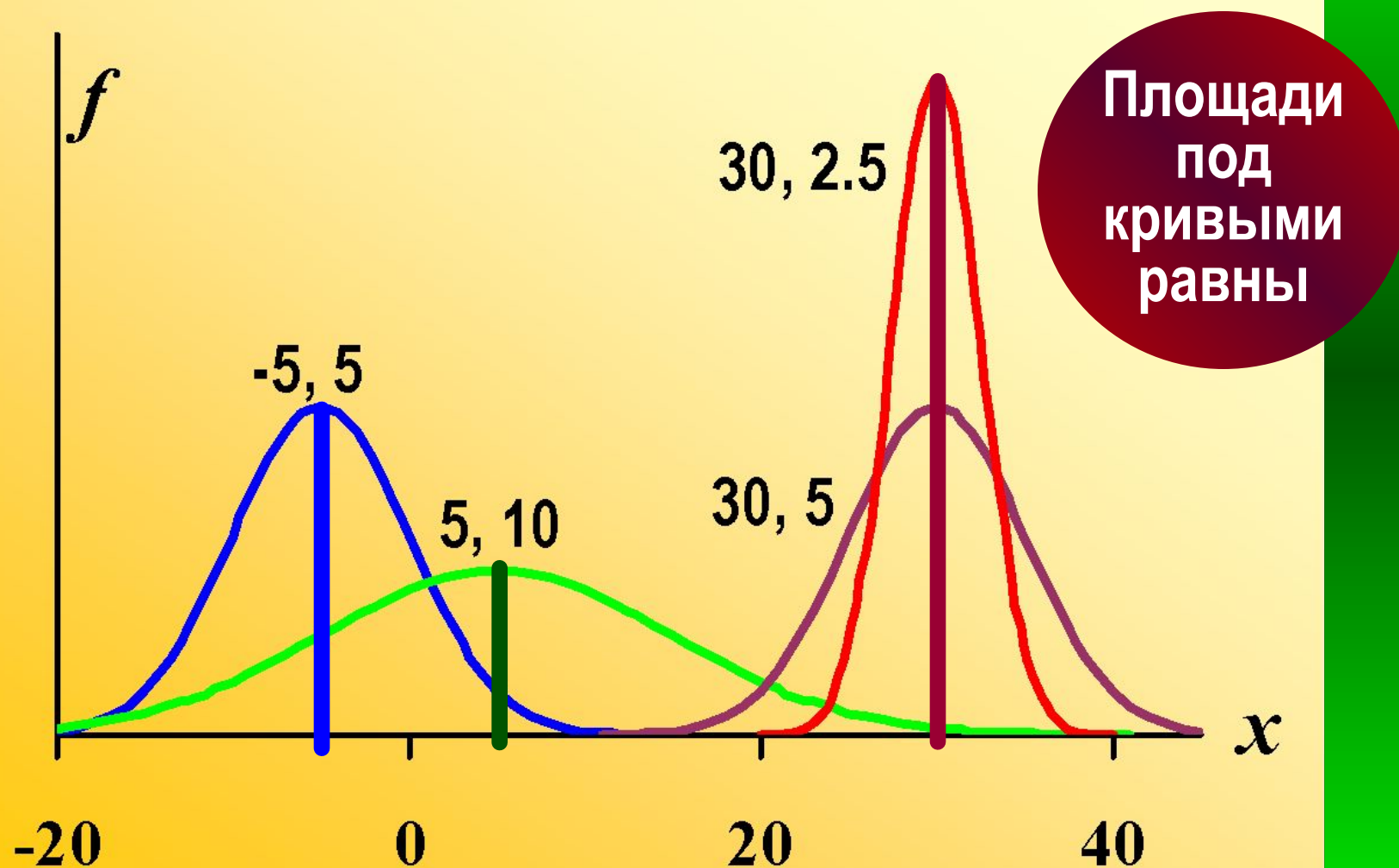
**N: 0,
1**

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Коллекция нормальных распределений



У нормальных распределений с разными μ и σ

Различия:

- привязаны к разным точкам μ числовой оси
- чем $< \sigma$, тем $>$ площадь под кривой вблизи μ , $>$ вероятность значений вблизи центра

- * колоколообразная форма кривой, с точкой перегиба на расстоянии σ от μ

Общее:

- * унимодальные, высшая ордината в точке $\mu = M_o = M_e$, хвосты $\rightarrow 0$ в обоих направлениях
(ПР $\rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$)
- * симметричные, равноудаленные от μ меньшие и большие x имеют равные p

Стандартный нормальный закон

Это N: 0, 1 – нормальный закон с $\mu = 0$ и $\sigma = 1$

Будучи
стандартом
для других ЗР,
нормальное
распределение
имеет свой

Узнаете
стандартизованное
(единичное) отклонение?
Измеряет в «сигмах»
отклонения x от центра
распределения

Любое нормальное распределение
можно записать
в стандартной форме с помощью
нормализованной переменной

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Зачем нужна
нормализация и
стандартный
нормальный ЗР?

Смысл есть,
весьма
утилитарный!

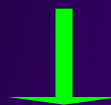
Дело
в том,
что

Из $x = \sigma z + \mu$  $f(z)/\sigma$, $dx = \sigma dz$

и !

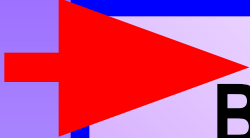
$$F(x) = F(z)$$

Тогда



$$P\{X < x\} = P\{Z < z\} = F[z = (x - \mu) / \sigma]$$

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F[z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma] - F[z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma]$$



Вместо расчета интегралов всякий раз для разных μ и σ , можно использовать раз и навсегда рассчитанные значения стандартной нормальной ФР

?

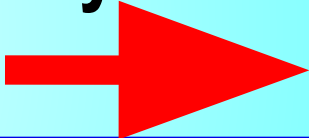
называется
интеграл
вероятности

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Однако,
есть таблицы
значений

обычно при расчете вероятностей значений нормальной величины в том или ином интервале

вместо интеграла вероятности используется
функция Лапласа



$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp(-\frac{u^2}{2}) du$$

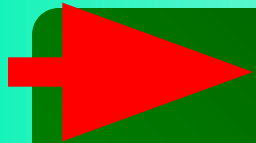
У нее следующие свойства:

$$\Phi(0) = 0; \quad \Phi(\infty) = 0.5;$$

это нечетная функция, $\Phi(-z) = -\Phi(z)$

Поскольку $F(z) = 0.5 + \Phi(z)$, то

$$\otimes P\{x_1 < X < x_2\} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \otimes$$



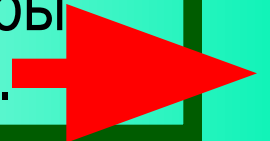
Удобное практическое правило

Вероятность того, что нормальная величина примет значение из некоторого интервала равна разности значений функции Лапласа для нормализованных верхней и нижней границ этого интервала

Пример

Производительность за смену (Y) распределена нормально, $\mu = 160$ изд., $\sigma = 20$.

Экономическая целесообразность требует, чтобы выпускалось не более 200 и не менее 150 шт.



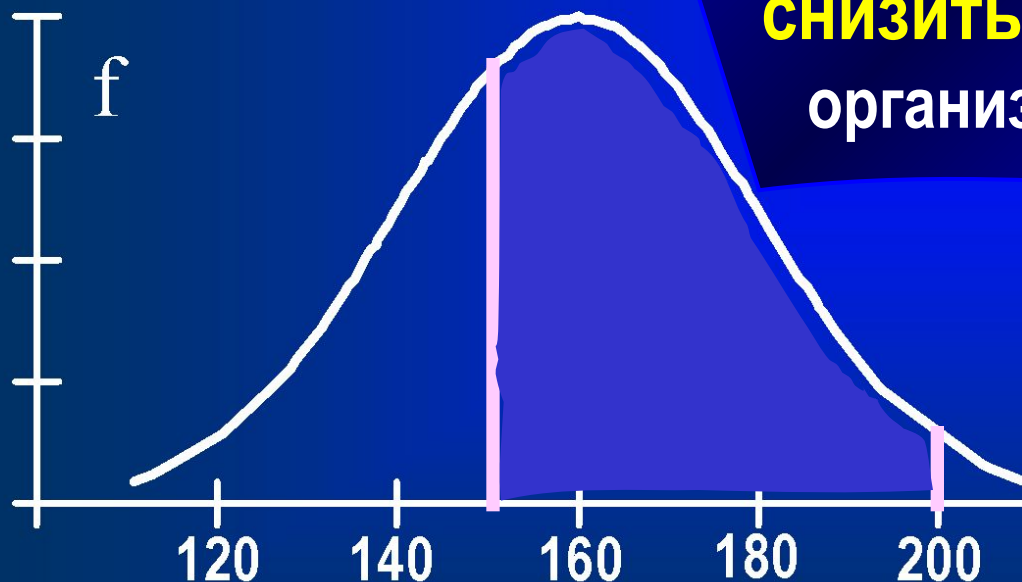
$$P\{150 < Y < 200\}$$

$$\Phi[z_2] - \Phi[z_1]$$

$$\Phi(2) - \Phi(0.5) =$$

Для более надежного
выполнения
требований
необходимо:
статистически ? —
**увеличить μ ,
снизить σ !**
организационно ???

только 67%
производственных
ситуаций
отвечают
требованиям



Производительность (шт)

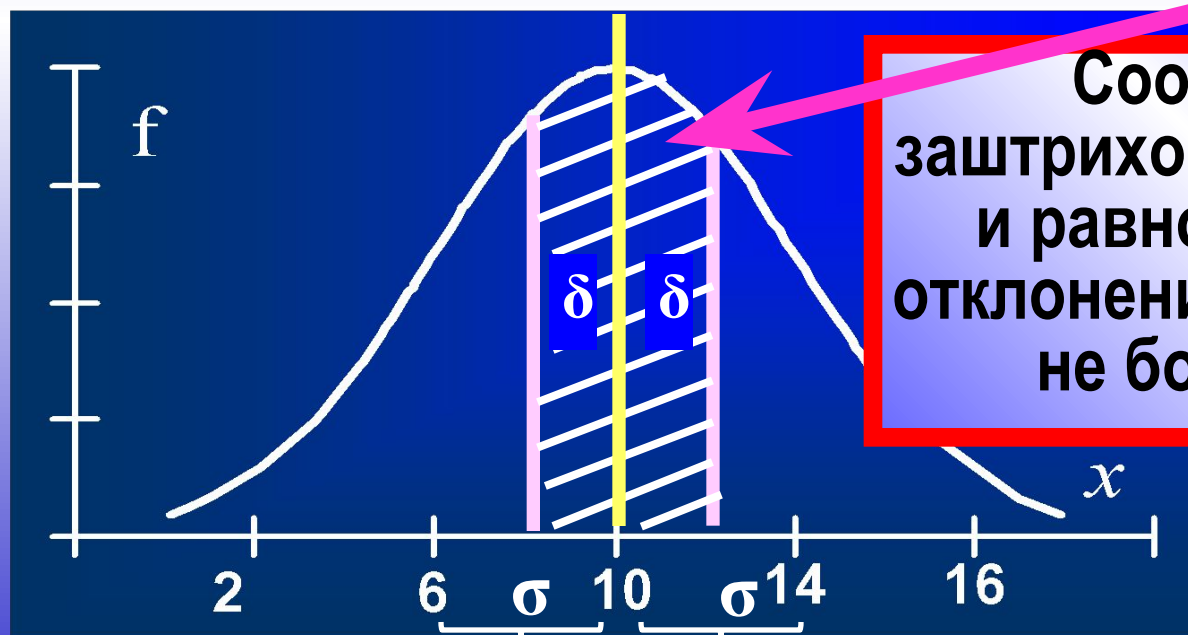
Важный пример – с обобщением

т.е., вероятности
попасть в интервал
симметричный
относительно μ

на нормально, $\mu = 10$, $\sigma = 4$

$$P(8 \leq X \leq 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{4}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{4}\right) =$$

$$P(2 \leq (X - \mu) / \sigma) = 2 \cdot 0.1915 = 0.383$$



Соответствует
заштрихованной площади
и равно вероятности
отклонений от μ
не более, чем на $\delta = 2$

?

Общее правило

$$P(\mu - \delta < X < \mu + \delta) =$$

$$P(|X - \mu| < \delta) = 2\Phi(z = \frac{\delta}{\sigma})$$

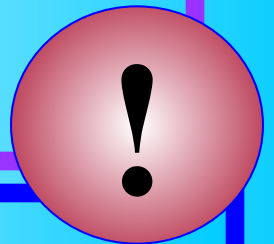
Вероятность того, что
(при измерении, управлении, производстве ...)
отклонение от μ
(неизвестного истинного, предписанного ... значения)
в обоих направлениях не превысит
максимально допустимого δ
равна удвоенному значению функции Лапласа
от « δ / σ стандартных отклонений»

Очевидно!

$$P(|X - \mu| > \delta) = 1 - 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

определяет !!!

**шансы отклонений,
превышающих заданное δ**



риск выйти за нормативные границы

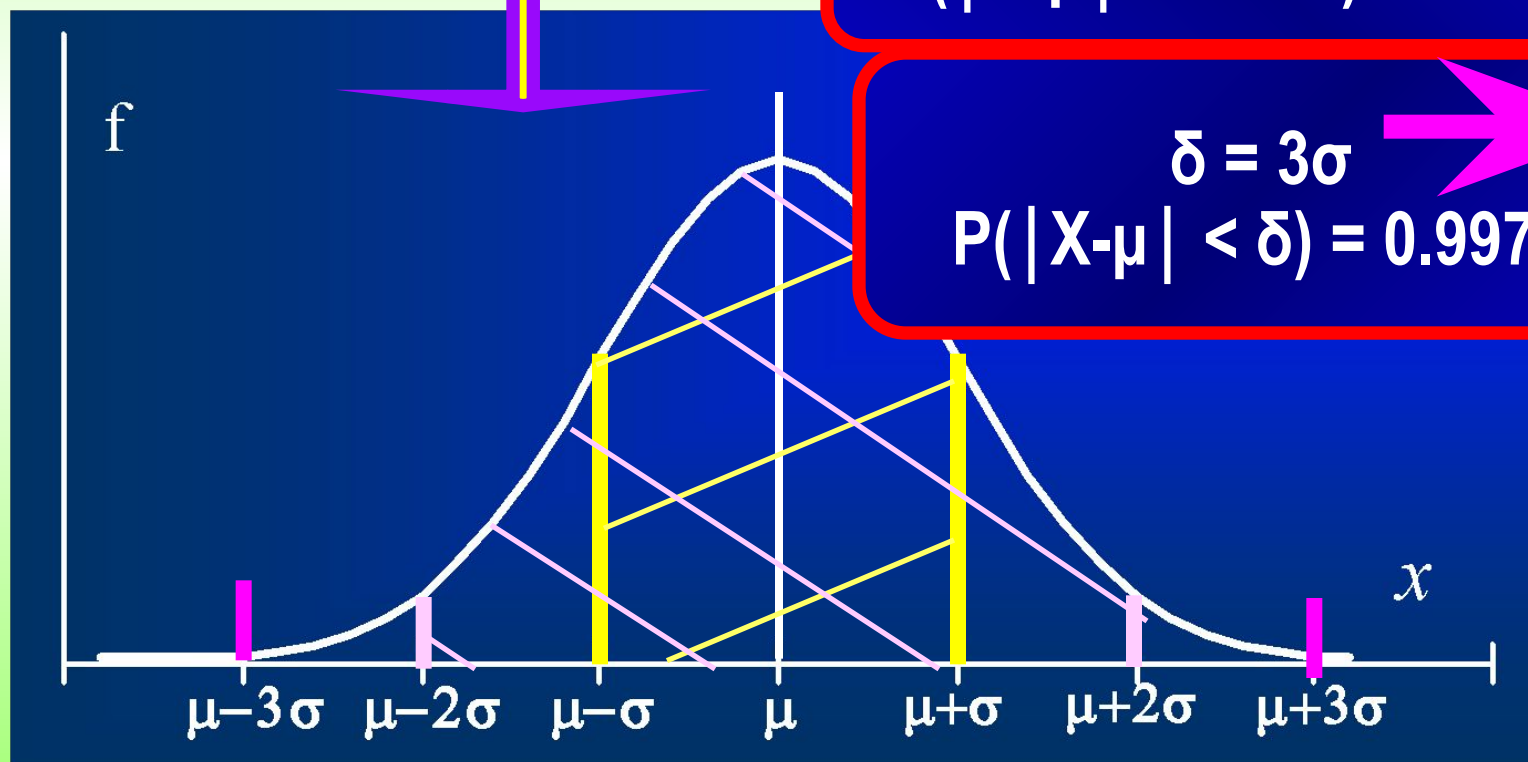
Примеры с важным обобщением

$$\delta = \sigma \rightarrow z = \delta / \sigma = 1 \rightarrow 2\Phi(1) = 0.6826$$

68.3% значений величины X
в интервале $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$

$$\delta = 2\sigma \rightarrow z = 2 \rightarrow P(|X - \mu| < \delta = 2\sigma) = 0.9545$$

$$\delta = 3\sigma \rightarrow P(|X - \mu| < \delta) = 0.9973$$



99.7% значений нормально распределенной величины попадают в интервал $(\mu \pm 3\sigma)$

Тогда

$$P(|X - \mu| > 3\sigma) = 1 - 0.9973 = 0.0027$$

**Вспомнив про
уровень значимости,
можно считать это
невозможным
событием**

**только 27 из 10000
можно ожидать
дальше от
среднего, чем
 3σ**

Th

«1»

Th

Если СВ норм
ее отклонен

e

En

В примере с производительностью:

количество производимой за смену продукции
может находиться в пределах
от 100 до 220 шт.