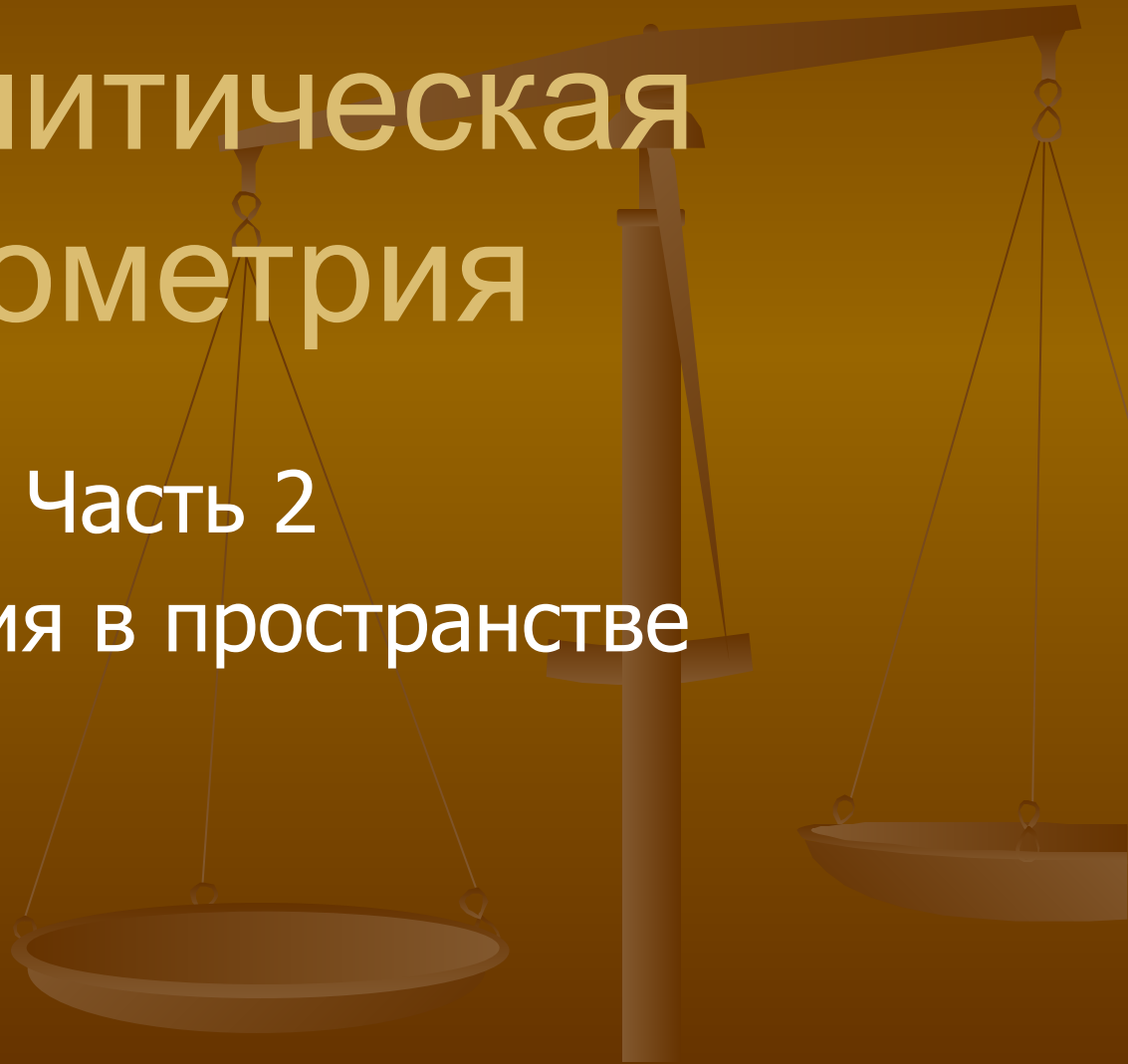


Аналитическая геометрия

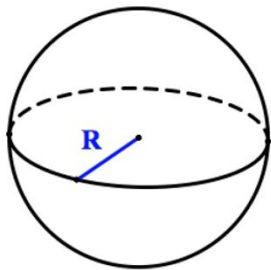
Часть 2

Геометрия в пространстве



Геометрический смысл уравнения с тремя переменными.

Подобно тому, как на плоскости Oxy уравнение $F(x,y)=0$ определяет линию, так и уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет в пространстве некоторую поверхность как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.



Пример

Вывод уравнения сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Сфера – это геометрическое место точек, равноудаленных от центра. Вычислим расстояние от произвольной точки $M(x, y, z)$ до центра $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

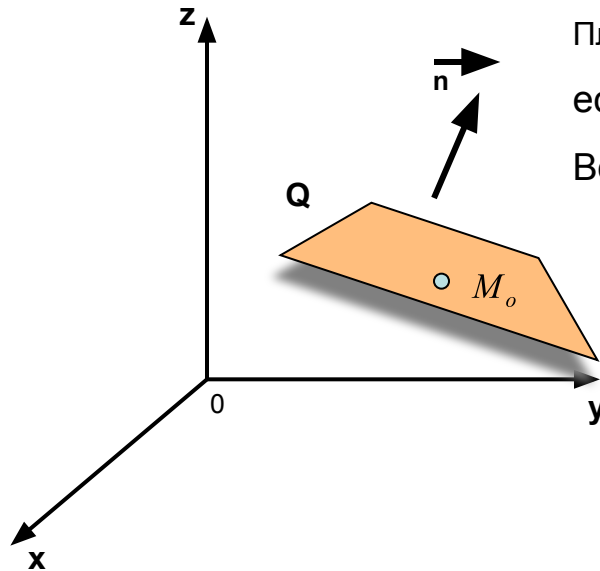
Приравняем его радиусу R и возведем в квадрат

$$|MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad - \text{уравнение сферы.}$$

Аналитическая геометрия в пространстве.

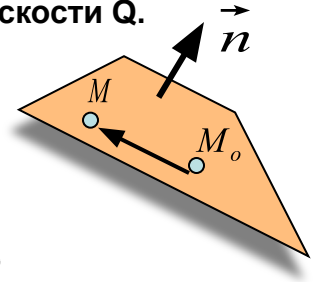
- Уравнения плоскости.



Плоскость Q определена единственным образом, если задана одна точка $M_o \in Q$ и вектор $\vec{n} \perp Q$. Вектор $\vec{n} \perp Q$ называют **нормальным** вектором.

Необходимое и достаточное условие того, что точка M принадлежит плоскости Q .

$$\overrightarrow{M_o M} \perp \vec{n}$$



$M(x, y, z)$

- 1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

- Заданы: точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$
- и нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$
- Уравнение плоскости.

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

$$\overrightarrow{M_o M} = \{x - x_o, y - y_o, z - z_o\}$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in Q$
Тогда

$$\overrightarrow{M_o M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_o M} \cdot \vec{n} = 0$$



Общее уравнение плоскости

- Раскроем скобки в уравнении плоскости, проходящей через данную точку (полученном ранее):

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

$$Ax - Ax_o + By - By_o + Cz - Cz_o = 0$$

$$Ax + By + Cz - Ax_o - By_o - Cz_o = 0$$

Обозначим

$$D = -Ax_o - By_o - Cz_o$$

Получим

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- общее уравнение плоскости

Пример

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;2;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{4;1;3\}$

.

Решение

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

$$\vec{n} = \{A, B, C\} \quad M_o(x_o, y_o, z_o)$$

$$4 \cdot (x - (-1)) + 1 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0$$

$$4x + 4 + y - 2 + 3z - 15 = 0$$

$$4x + y + 3z - 13 = 0$$

Ответ:

$$4x + y + 3z - 13 = 0$$

Аналитическая геометрия в пространстве.

- 2. Общее уравнение плоскости.

- Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- называется **общим уравнением плоскости**.
- Коэффициенты **A, B, C** в уравнении определяют **координаты нормального вектора**:

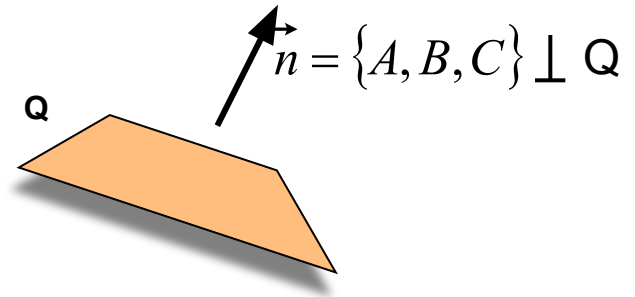
$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

Теорема.

Всякое уравнение первой степени с тремя переменными **x, y, z** вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

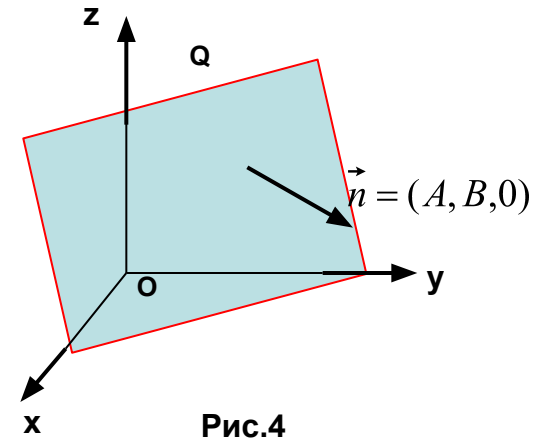
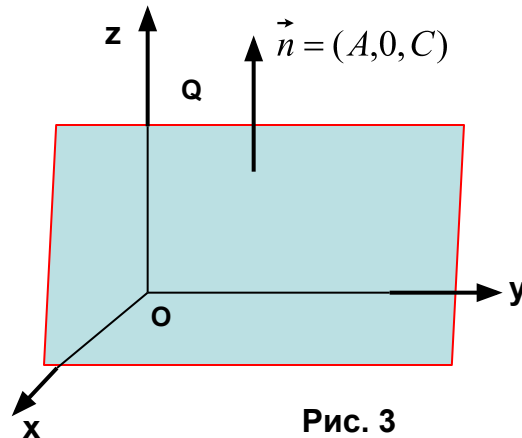
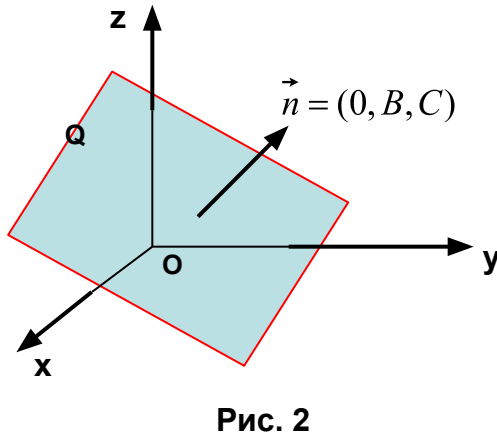
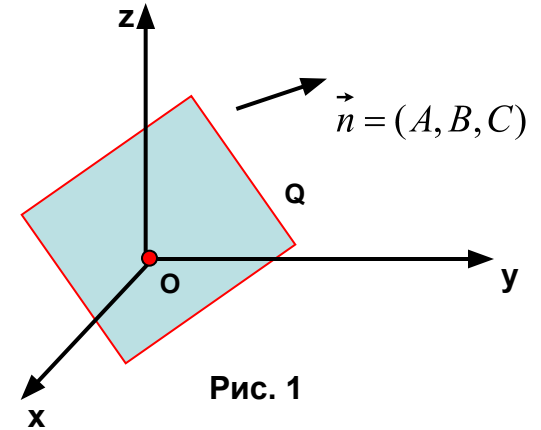
задает **плоскость** в пространстве
и наоборот, **всякая плоскость**
в пространстве может быть задана
уравнением с тремя переменными **x, y, z**
вида (1).



Аналитическая геометрия в пространстве.

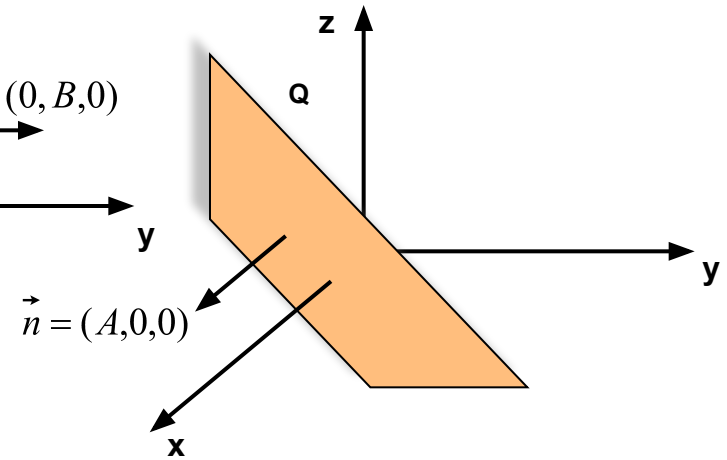
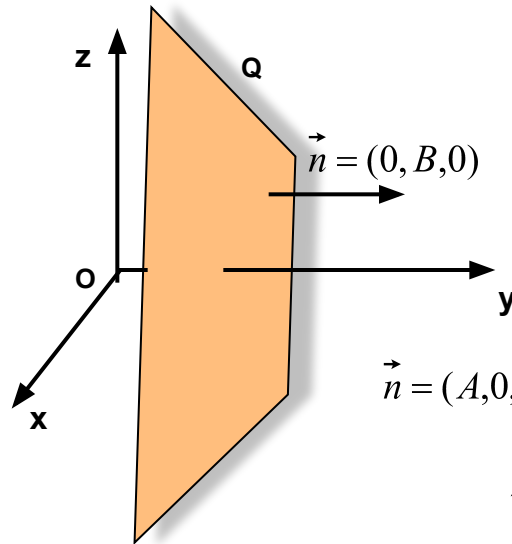
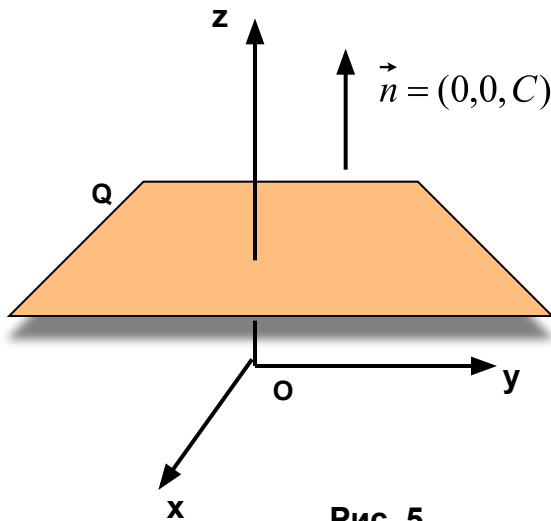
- 3. Исследование общего уравнения плоскости.

- 1. Коэффициент $D=0 \Rightarrow \text{точка } O(0,0,0) \in Q$ (рис. 1)
- 2. Коэффициент $A=0 \Rightarrow \vec{n} = (0, B, C) \perp OX \Rightarrow Q \parallel OX$ (рис. 2)
- 3. Коэффициент $B=0 \Rightarrow \vec{n} = (A, 0, C) \perp OY \Rightarrow Q \parallel OY$ (рис. 3)
- 4. Коэффициент $C=0 \Rightarrow \vec{n} = (A, B, 0) \perp OZ \Rightarrow Q \parallel OZ$ (рис. 4)



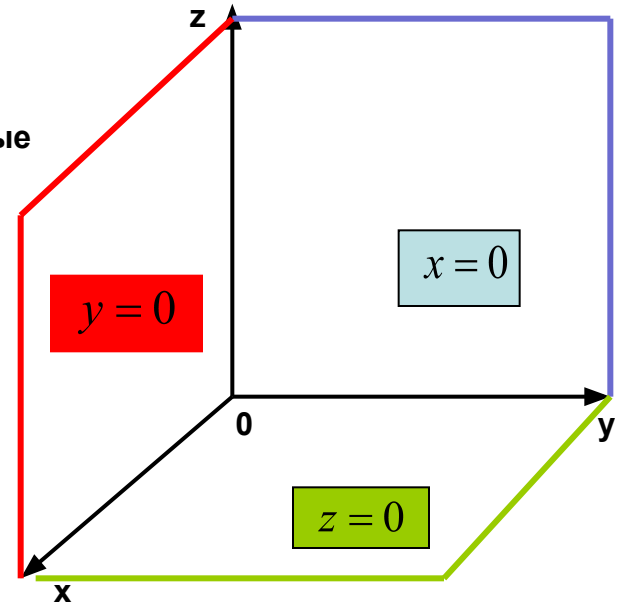
Аналитическая геометрия в пространстве.

- 5. Коэффициенты $A=B=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,0,C) \parallel OZ \Rightarrow Q \perp OZ$ (рис. 5)
- 6. Коэффициенты $A=C=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,B,0) \parallel OY \Rightarrow Q \perp OY$ (рис. 6)
- 7. Коэффициенты $B=C=0 \Rightarrow \vec{n} = (A,0,0) \parallel OX \Rightarrow Q \perp OX$ (рис. 7)



Аналитическая геометрия в пространстве.

- 8. Коэффициенты $A=B=D=0 \Rightarrow z=0$
 - 9. Коэффициенты $A=C=D=0 \Rightarrow y=0$
 - 10. Коэффициенты $B=C=D=0 \Rightarrow x=0$
- Координатные
плоскости

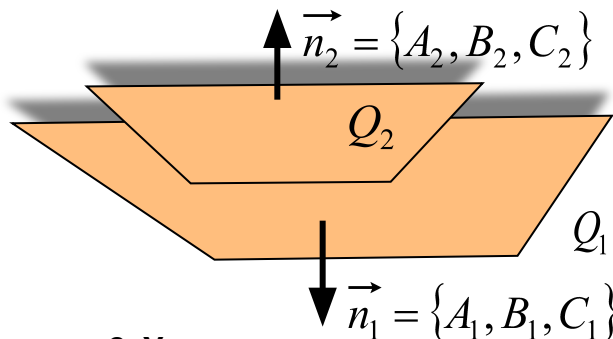


Аналитическая геометрия в пространстве.

- Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.

- 1. Условие параллельности плоскостей. $Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



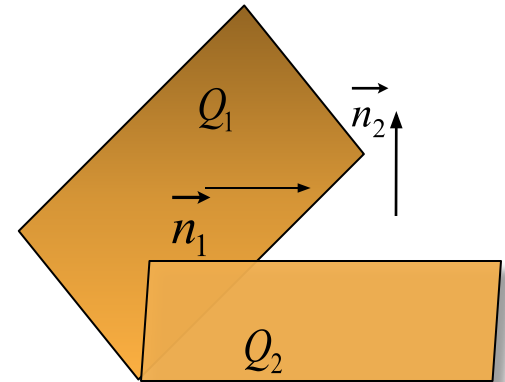
$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

- 2. Условие перпендикулярности плоскостей.

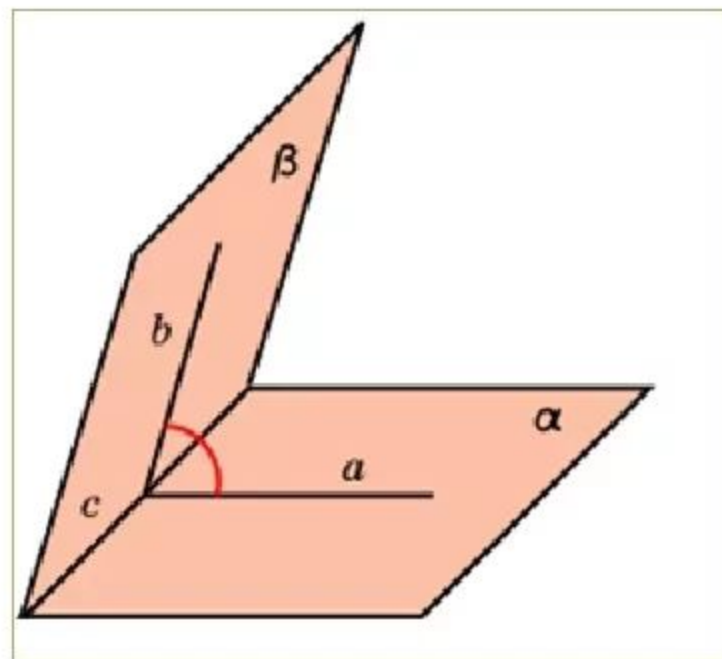
$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

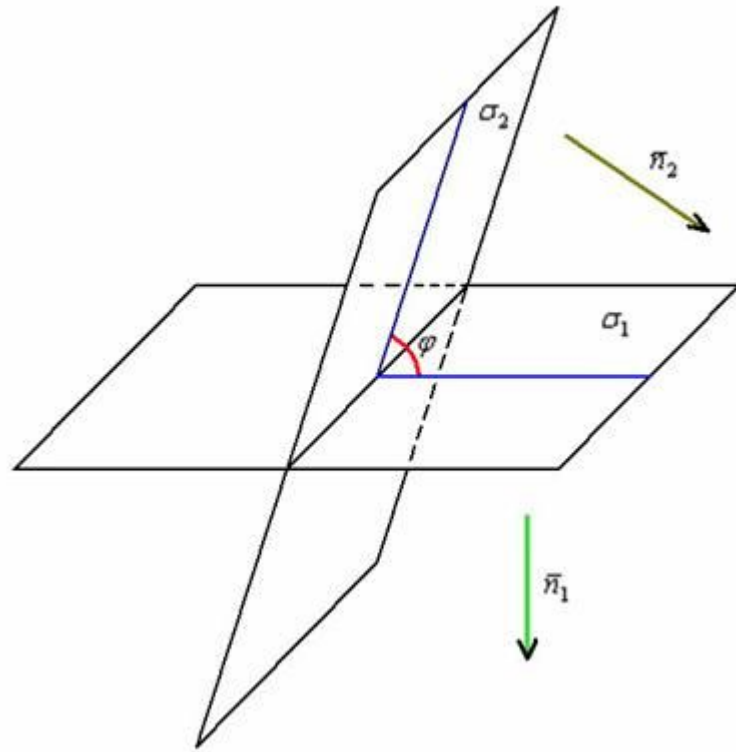
$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$



Определение:

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.





Угол между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Задание линий в пространстве

Линию, в том числе и прямую, будем рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если эти поверхности заданы уравнениями в виде $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, то линия пересечения определяется системой уравнений:

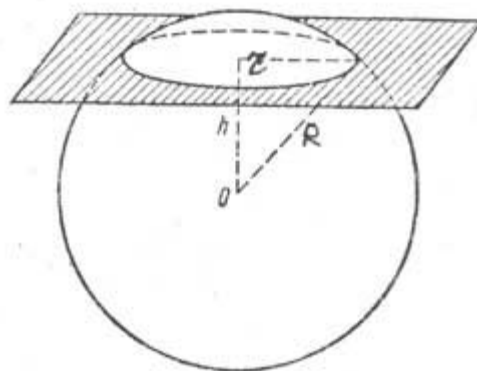
$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Пример

Рассмотрим линию, определяемую системой уравнений

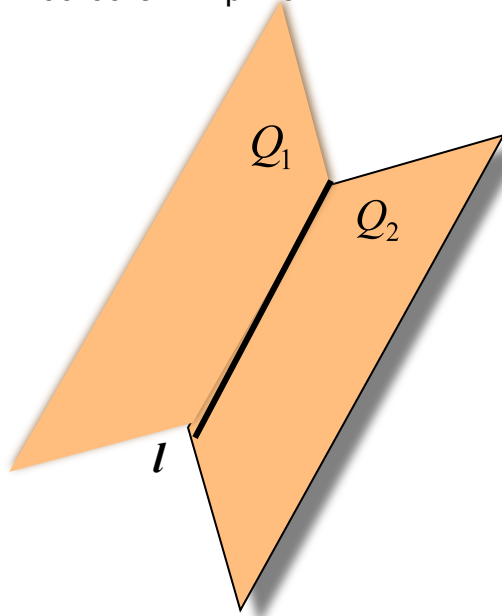
$$\begin{cases} \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = 25 \\ \mathbf{z} = 3 \end{cases}$$

$$R=5, h=3$$



Аналитическая геометрия в пространстве.

- Уравнения прямой в пространстве.
- 1. Общее уравнение прямой.
 - Аксиома: линия пересечения двух плоскостей – прямая.



$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (Q_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (Q_2) \end{cases} \quad (2)$$

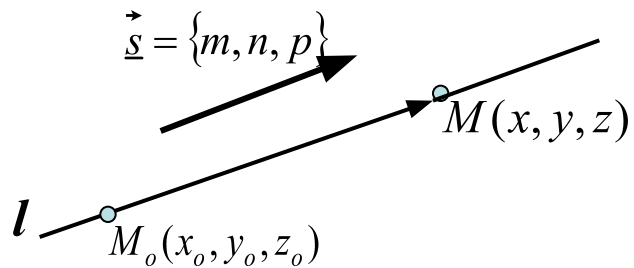
Теорема.

Система уравнений (2) определяет **прямую в пространстве** тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2

Система уравнений (2) называется **общим уравнением** прямой.

Аналитическая геометрия в пространстве.

- 2. Канонические уравнения прямой.

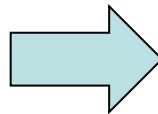


$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p} \quad (= \lambda)$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in l$.
Тогда $\overrightarrow{M_o M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_o M} = \lambda \vec{s}$

- 3. Параметрические уравнения прямой.

$$\begin{cases} \frac{x - x_o}{m} = \lambda \Rightarrow x = x_o + \lambda m \\ \frac{y - y_o}{n} = \lambda \Rightarrow y = y_o + \lambda n \\ \frac{z - z_o}{p} = \lambda \Rightarrow z = z_o + \lambda p \end{cases}$$



$$l: \begin{cases} x = x_o + \lambda m \\ y = y_o + \lambda n \\ z = z_o + \lambda p \end{cases}$$

$-\infty \leq \lambda \leq \infty$ — параметр

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-6;2)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-2;5;-7\}$

Требуется составить канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

Подставляем исходные данные

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-2}{-7}$$

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;-6;2)$ параллельно прямой
$$\begin{cases} x = -7t + 2 \\ y = 13t - 3 \\ z = 9t \end{cases}$$

Для все параллельных прямых можно использовать один направляющий вектор. Поэтому для искомой прямой имеем точку и направляющий вектор

$$\vec{s} = \{-7;13;9\}$$

Уравнения прямой

$$\frac{x-4}{-7} = \frac{y+6}{13} = \frac{z-2}{9}$$

13. Перейти от общего уравнения прямой к каноническому виду

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 4y - 5z + 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} N_1 = \{2; -1; 3\} \\ N_2 = \{1; 4; -5\} \end{matrix}$$

Как уже отмечалось, для перехода к каноническому виду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

нужно знать точку на прямой и направляющий вектор

а) Находим направляющий вектор

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 13\vec{j} + 9\vec{k}$$

Итак, направляющий вектор

$$\vec{s} = \{-7; 13; 9\}$$

б) Находим точку на прямой. Для этого можно положить в системе уравнений одну из координат равной нулю. Итак, $z = 0$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$$

Решая ее, найдем

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = -3 \end{matrix}$$

Точка $M(2; -3; 0)$

и канонические уравнения

$$\frac{x - 2}{-7} = \frac{y + 3}{13} = \frac{z}{9}$$

Получим параметрические уравнения

$$\frac{x - 2}{-7} = \frac{y + 3}{13} = \frac{z}{9} = t \quad \begin{cases} x = -7t + 2 \\ y = 13t - 3 \\ z = 9t \end{cases}$$

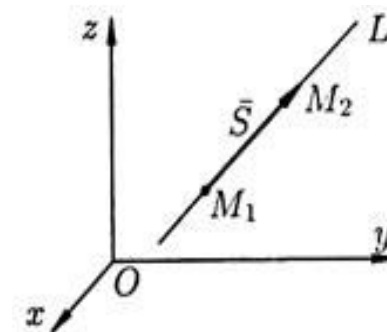
Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

- Пусть прямая L проходит через две заданные точки:

$$\cos \theta = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

- Тогда за ее направляющий вектор можно взять

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$$



- Получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Пример

- Даны две точки, через которые проходит прямая:

$$M_1(2; -3; 4), M_2(1; 3; 5)$$

- Составить уравнения этой прямой.

• Решение.

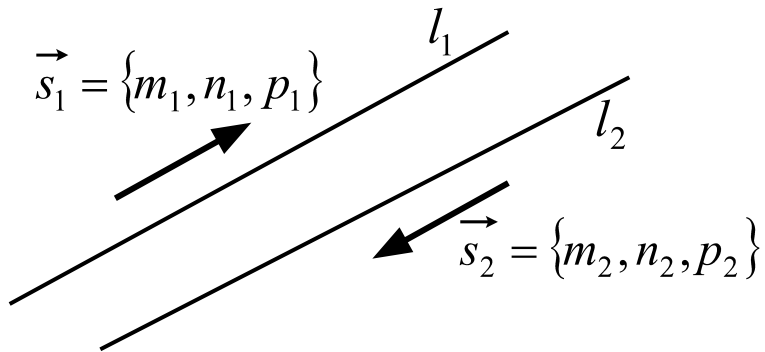
- Подставляя в предыдущую формулу координаты точек, получим:

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y + 3}{3 + 3} = \frac{z - 4}{5 - 4}$$

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 3}{6} = \frac{z - 4}{1}$$

Аналитическая геометрия в пространстве.

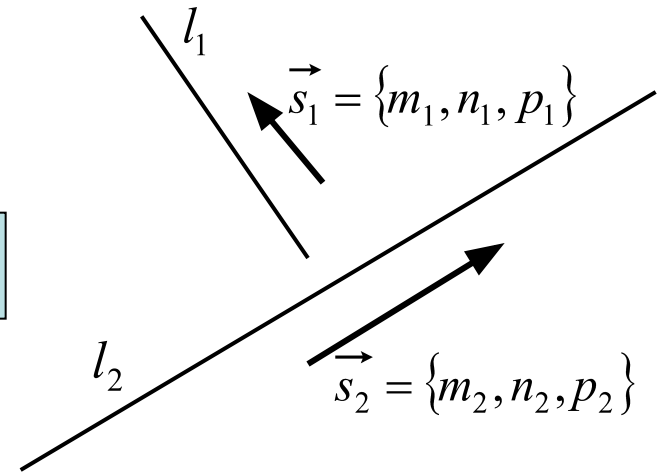
- 3. Условие параллельности прямых.



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

- 4. Условие перпендикулярности прямых.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$



Угол между двумя прямыми

Угол между двумя пересекающимися прямыми – это острый угол между ними.

Даны направляющие векторы прямых:

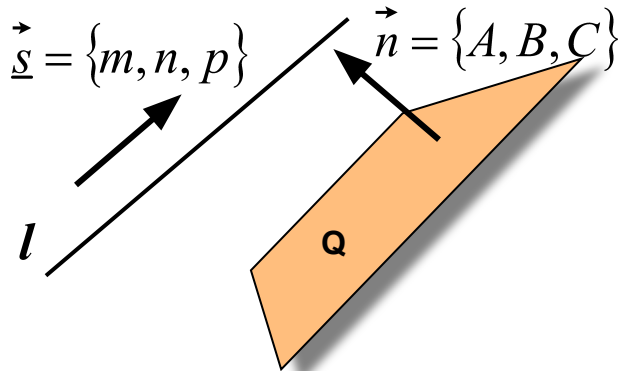
$$\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}, \vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$

В координатной форме написать самостоятельно.

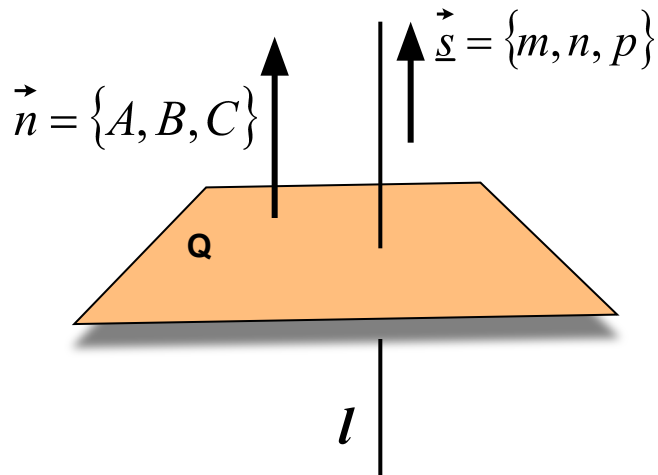
Аналитическая геометрия в пространстве.

- 5. Условие параллельности прямой и плоскости.



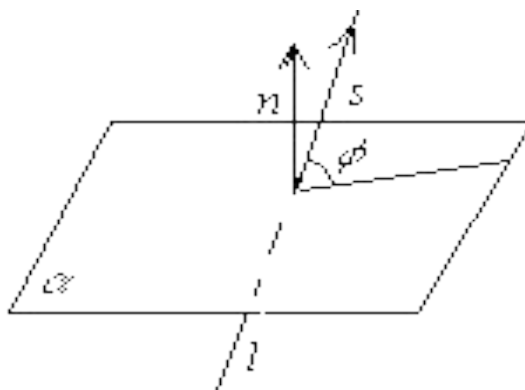
$$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{s} \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \boxed{Am + Bn + Cp = 0}$$

- 6. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.



$$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}}$$

Угол между прямой и плоскостью



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{\hat{s}}}{|\mathbf{\hat{n}}| |\mathbf{\hat{s}}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{\mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{\hat{s}}}{|\mathbf{\hat{n}}| |\mathbf{\hat{s}}|}$$

Пример

- Найти угол между прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+7}{3}$
- и плоскостью $5x + 3y - 4z + 8 = 0$

Угол между прямой и плоскостью находим по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{N} \cdot \vec{s})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$\vec{N} = \{5; 3; -4\}$$

- вектор нормали плоскости

$$\vec{s} = \{4; -1; 3\}$$

- направляющий вектор прямой

Подставляем в формулу

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|(\vec{N} \cdot \vec{s})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \\ &= \frac{|20 - 3 - 12|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{26}} = \frac{5}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{52}} = \frac{1}{2\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Пример

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{1}$$

$$y + 5z + 6 = 0$$

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 5t \\ z = t + 2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$5t + 5(t + 2) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10t + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -1.6$$

Подставим в уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1.6) + 1 \\ y = 5 \cdot (-1.6) \\ z = -1.6 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3.8 \\ y = -8 \\ z = 0.4 \end{cases} \Rightarrow K(-3.8; -8; 0.4)$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

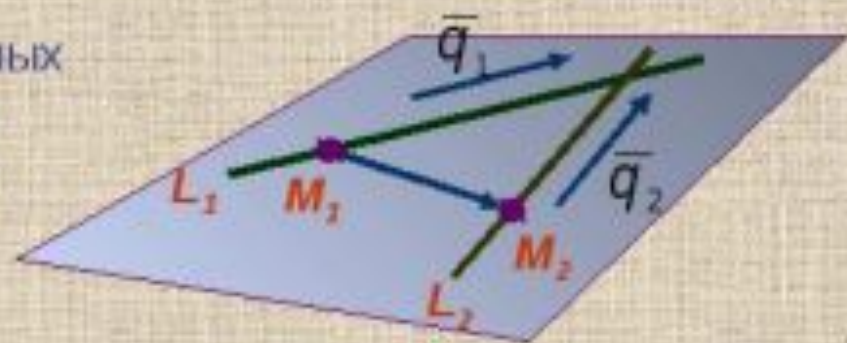
$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Для принадлежности двух прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора:

$$\bar{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$$

$$\bar{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \quad \text{были компланарны.}$$



$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие
принадлежности
двух прямых одной
плоскости

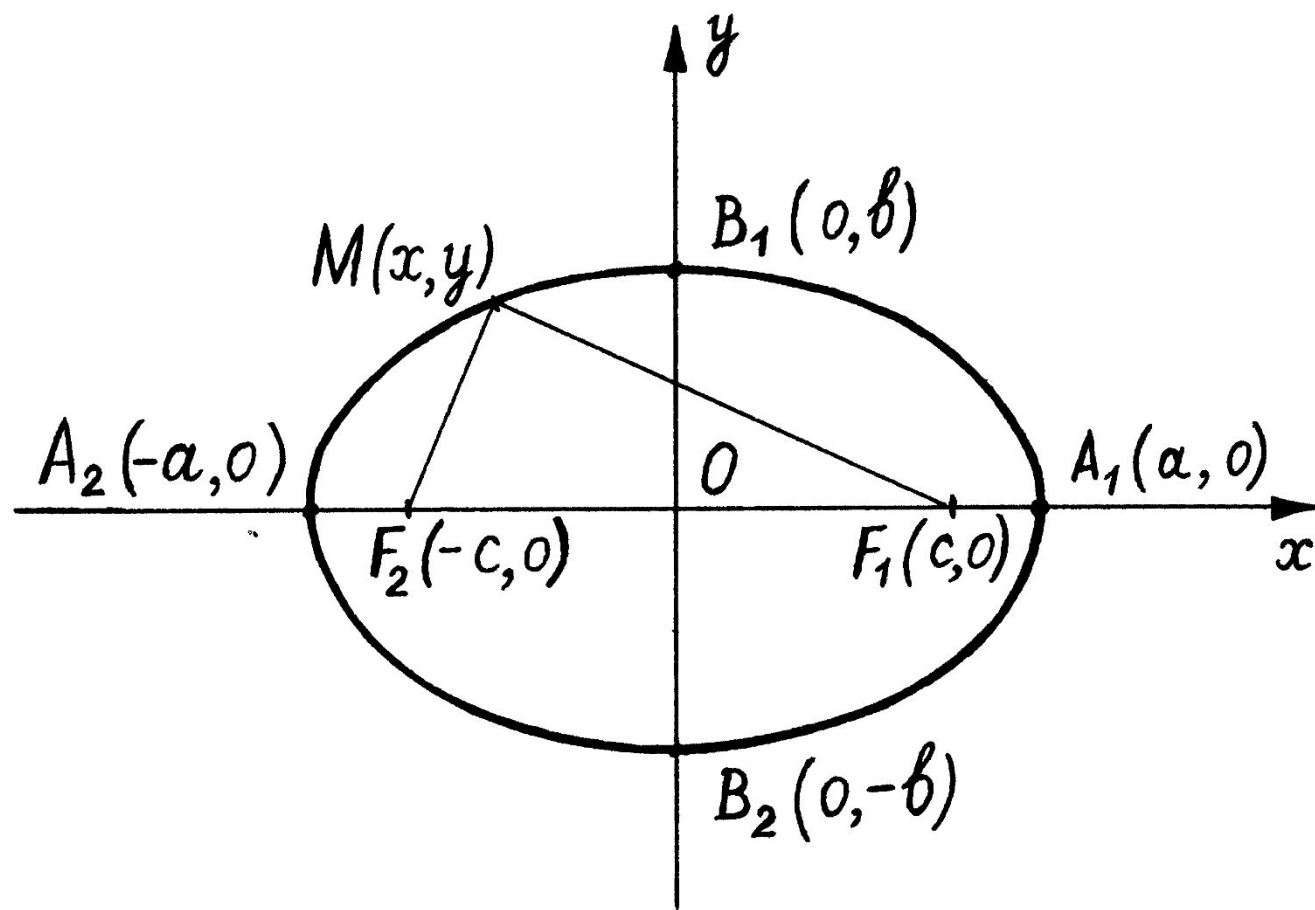
Кривые второго порядка

Окружность



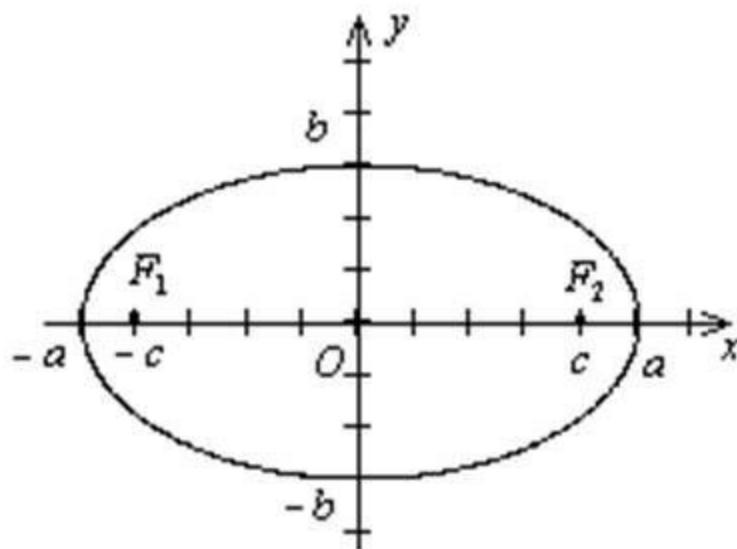


Эллипс



Эллипсом называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



Гипербола

Построение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Для построения гиперболы удобно пользоваться вспомогательными построениями.

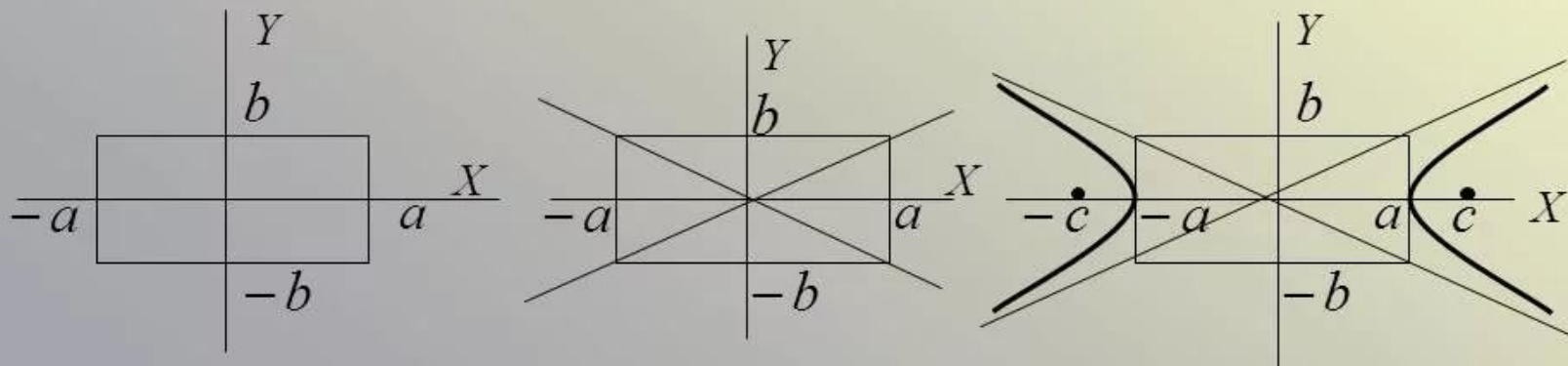
1. В системе координат строим прямоугольник с размерами $2a \times 2b$ на осях OX и OY соответственно.

2. Проводим диагонали этого прямоугольника.

Уравнения диагоналей – это уравнения асимптот гиперболы

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$

3. На действительной оси отмечаем вершины гиперболы и от них ведем ветви гиперболы к асимптотам.



Каноническое уравнение гиперболы

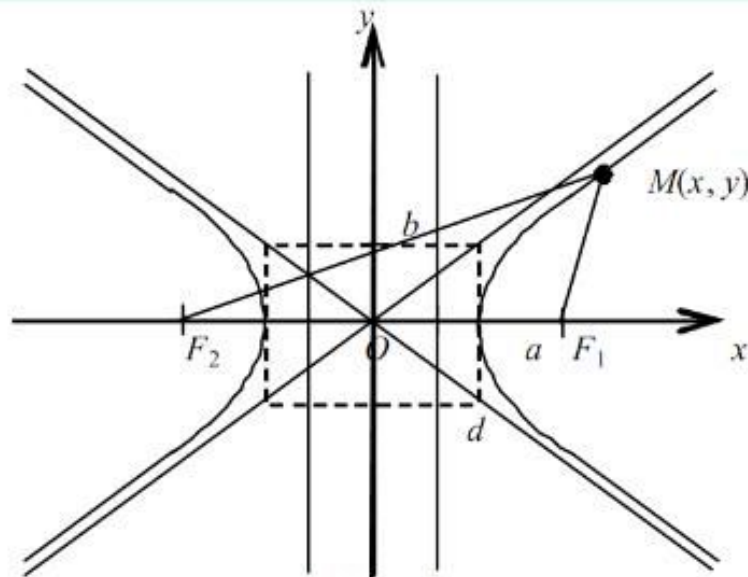


Рис. 3.43

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Сопряженные гиперболы

Гипербола, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

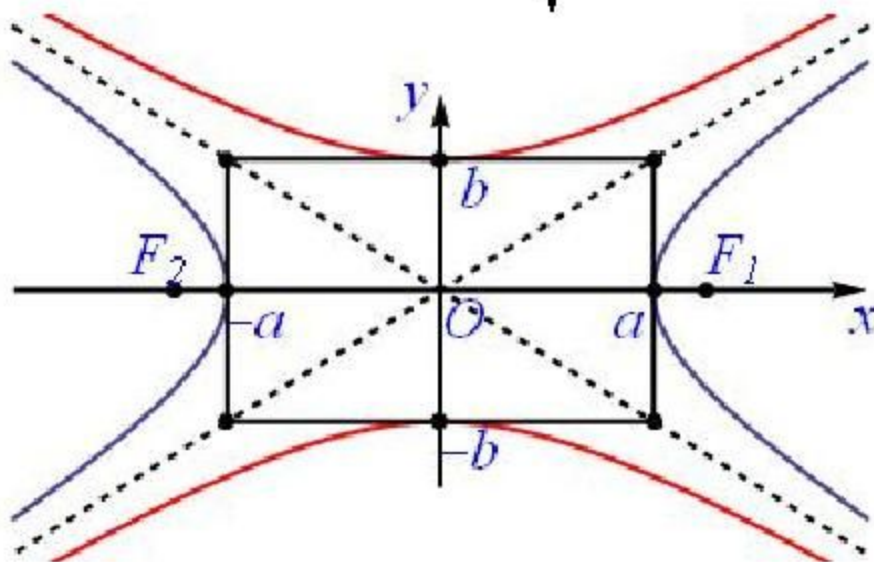
называется сопряженной по отношению к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$



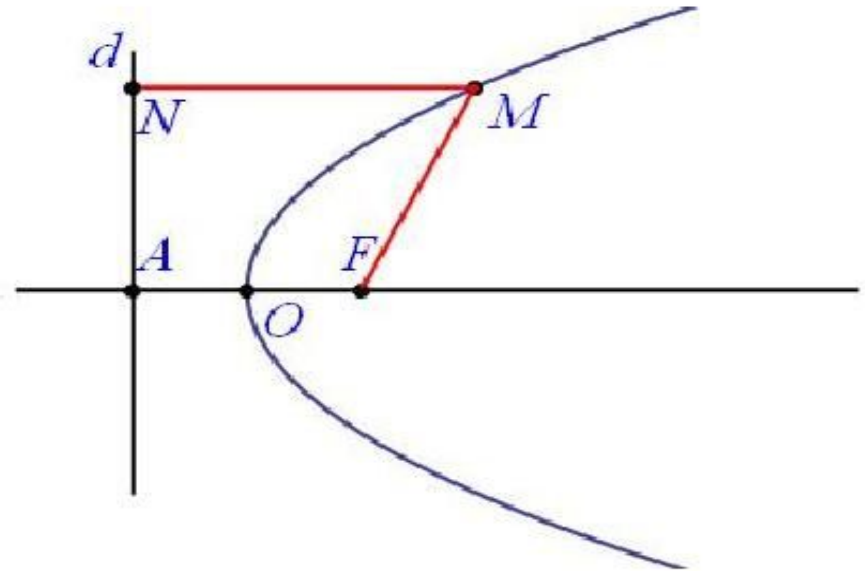
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$
$$\varepsilon = \frac{c}{b}.$$



Парабола

Парабола, основные определения

- **Парабола** – геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки и от фиксированной прямой.
- Фиксированную точку F называют **фокусом параболы**, а прямую d – **директрисой параболы**.
- Парабола симметрична относительно прямой, перпендикулярной директрисе и проходящей через фокус параболы. Эту прямую называют **осью параболы**.
- Парабола пересекает свою ось в единственной точке O , которую называют **вершиной параболы**.

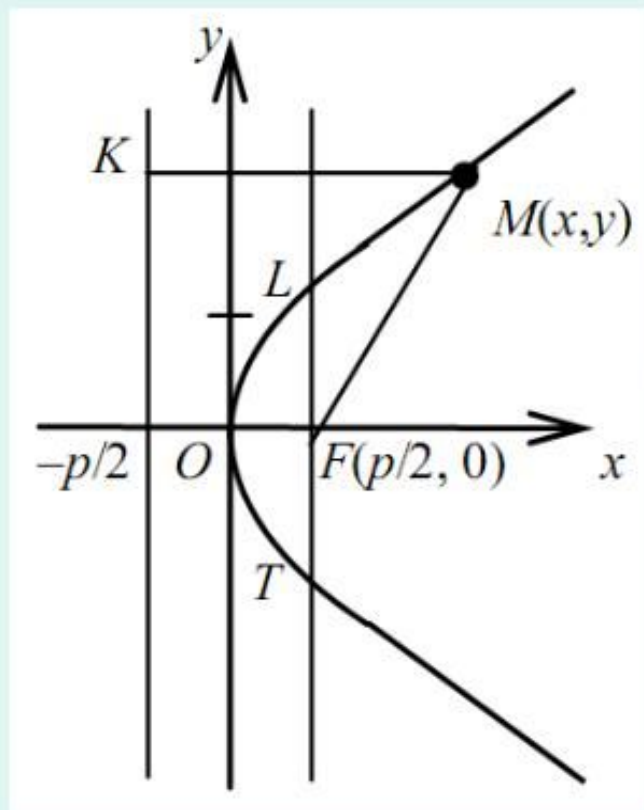


$$MF = MN,$$

$$AO = OF.$$



Каноническое уравнение параболы

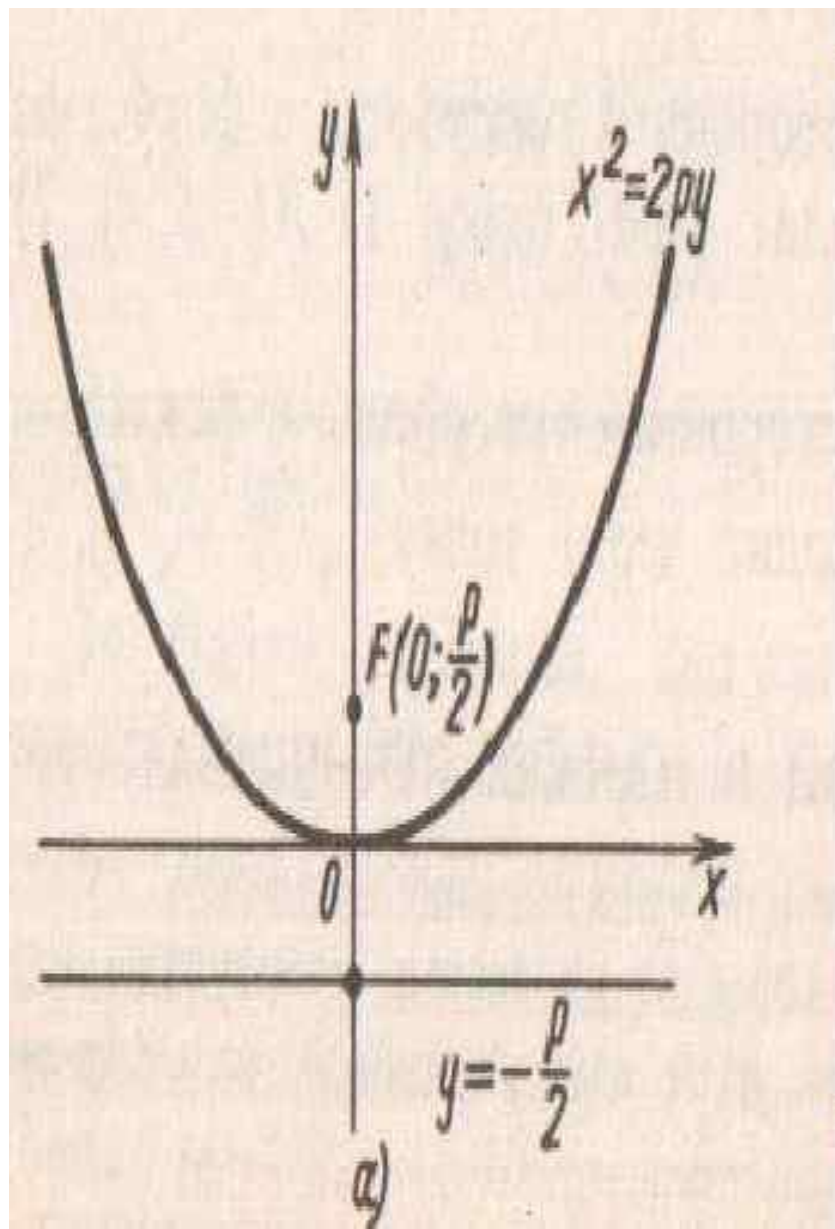


$$KM = MF.$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2}.$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$$y^2 = 2px$$



Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oy и ветви направлены вверх, имеет вид

$$x^2 = 2py \quad (p > 0)$$

Уравнение ее директрисы

$$y = -\frac{p}{2}$$