Математический анализ
1 семестр
Занятие №5

Замечательные пределы и следствия из них

Занятие 5. Тригонометрические функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \Rightarrow \quad \text{если} \;\; \alpha(x)\to 0, \;\; \text{то} \;\; \sin\alpha(x)=\alpha(x)+o(\alpha(x))$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{если} \;\; \alpha(x)\to 0, \;\; \text{то} \;\; \cos\alpha(x)=1-\frac{\alpha^2(x)}{2}+o(\alpha^2(x))$$

Алгоритм:

1. $\sin\alpha(x)$ *заменить на* $\alpha(x)+o(\alpha(x))$.
2. $\cos\alpha(x)$ *заменить на* $1-\dfrac{\alpha^2(x)}{2}+o(\alpha^2(x))$.
3. *Сократить числитель и знаменатель на младшую степень* $x-a$, *находящуюся в знаменателе.*
4. $\operatorname{tg}\alpha(x)$, $\operatorname{ctg}\alpha(x)$ *выражать через* $\sin$ *и* $\cos$.

Занятие 5. Разность кубических корней

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)-3x}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5+\dfrac{o(x)}{x}-3}{1+\dfrac{o(x)}{x}}=2$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{x}=5$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^n}=1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\cdot\sin 2x}=\dfrac{1}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x^3\sin 2x}=\dfrac{1}{8}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\dfrac{b^2-a^2}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos(x)}=\sqrt{2}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

Занятие 5. Замена переменных

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(3\pi+3z)}{\sin(2\pi+2z)}=$$

$$z=x-\pi,\quad x=\pi+z$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin 3\pi\cdot\cos 3z+\cos 3\pi\cdot\sin 3z}{\sin 2\pi\cdot\sin 2z+\cos 2\pi\cdot\sin 2z}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin 3z}{\sin 2z}=-\frac{3}{2}$$

Основные формулы:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Занятие 5. Замена переменных

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=2$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}=\dfrac{1}{2\pi}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x=1$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}=-\sqrt{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{4}-\sin\dfrac{x}{4}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=2$

Спасибо за внимание

Занятие окончено