Символы математической логики

Кванторы

$\forall$ - общности

$\exists$ - существования

Связки

$\wedge$ - конъюнкция (и)

$\vee$ - дизъюнкция (или)

$\rightarrow$ - импликация (если…, то…)

$\equiv$ - эквиваленция (если и только если…, то…

$\neg$ - отрицание (неверно, что…)

Понятие множества

Под ***множеством*** понимается совокупность некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются ***элементами*** или точками, этого множества.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными.

$a \in A$ - принадлежит

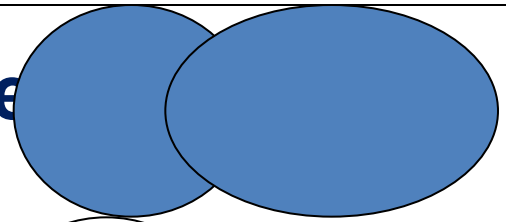
$a \notin A$ - не принадлежит

$A \subset B$ - подмножество

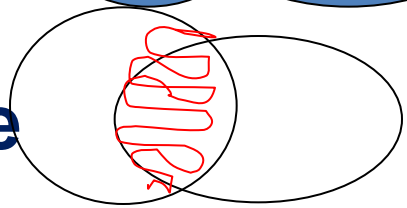
$\varnothing$ - пустое множество

Операции над множествами

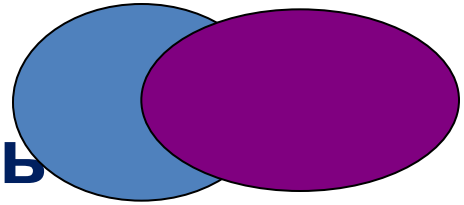
$A \cup B$-**объединение**



$A \cap B$ **-пересечение**



$A \setminus B$ **-разность**



Пример. Даны множества $A = \{1;3;6;8\} u\ B = \{2;4;6;8\}$

Найти объединение, пересечение и разность множеств $A u\ B.$

Последовательность. Предел последовательности.

- **Определение 1.** Если по некоторому закону каждому натуральному числу $n \in N$ поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что дана числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \ldots . a_n, \ldots$$

словами, числовая последовательность эта функция натурального аргумента $a_n = f(n).$

$a_1, a_2, \ldots . a_n, \ldots$ называются членами последовательности, а число a_n – общим членом.

Пример. $a_n = (-1)^n /(2n+1).$

- **Определение 2.** Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N, зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ справедливо $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{или} \quad a_n \to \infty \quad при\ n \to \infty.$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а в противном случае - расходящейся.

Функция. Способы задания функции.

- **Определение 3**. Если каждому элементу ***x*** из множества ***X*** по некоторому правилу соответствует единственный элемент ***y*** из множества ***Y*** , то говорят, что на множестве ***X*** задана функция $y = f(x)$ переменной x . При этом множество ***X*** называется областью определения функции, а множество ***Y –*** областью значений функции.

x- называется независимой переменной или аргументом, ***y*** **-** зависимой переменно, буква ***f –*** обозначает закон соответствия.

Существует несколько способов задания функции.

- **Аналитический способ,** если функция задана формулой вида $y = f(x)$.
- **Табличный способ,** если функция задана в виде таблицы.
- **Графический способ,** если функция изображена в виде в виде графика-множества точек (x, y) плоскости, абсциссой которых есть значения аргумента x , о ординаты - соответствующие им значения функции y .
- **Словесный способ,** если функция описана правилом ее составления, например функция Дирихле: $f(x) = 1,$ если $x -$ рационально; и $f(x) = 0,$ если $x -$ нерационально.

- Функция может быть задана программой, вычисляющей ее значения с помощью компьютера.

Основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любых значений x из любой области определения $f(-x) = f(x)$, и ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией ***общего вида***.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

- **2. Монотонность.** Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке ***X***, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

  Функции возрастающие или убывающие называются ***монотонными.***

- **3. Ограниченность.** $y = f(x)$ Функция называется ***ограниченной*** на промежутке ***X***, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

  В противном случае функция называется ***неограниченной.***

- **4. Периодичность.** Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x).$

Основные элементарные функции

- 1) ***Степенная функция***: $y = x^{\alpha}$, где

Ее область определения и множество значений зависят от α .

Например:

а) $y = x^2 : D(x^2) = (-\infty;+\infty), \quad E(x^2) = [0;+\infty)$

б) $y = \sqrt{x} : D(\sqrt{x}) = [0;+\infty), \quad E(\sqrt{x}) = [0;+\infty)$

в) $y = x^3 : D(x^3) = (-\infty;+\infty), \quad E(x^3) = (-\infty;+\infty).$

- **2. Показательная функция:** $y = a^x$, где

$$a > 0,\ a \neq 1;\quad D\left(a^x\right) = \left(-\infty;+\infty\right),\quad E\left(a^x\right) = \left(0;+\infty\right).$$

3) Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где

$$a > 0,\ a \neq 1;$$

4) Тригонометрические функции:

а) $y = \sin x$: $D(\sin x) = (-\infty;+\infty), E(\sin x) = [-1;1];$

б) $y = \cos x$: $D(\cos x) = (-\infty;+\infty), E(\cos x) = [-1;1];$

в) $y = tg\ x : D(tg\ x) = \left\{ x \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right\}, E(tg\ x) = R;$

г) $y = ctg\ x : D(ctg\ x) = \{ x \mid x \neq \pi n, n \in Z \}, E(ctg\ x) = R.$

- **5) *Обратные тригонометрические функции*:**

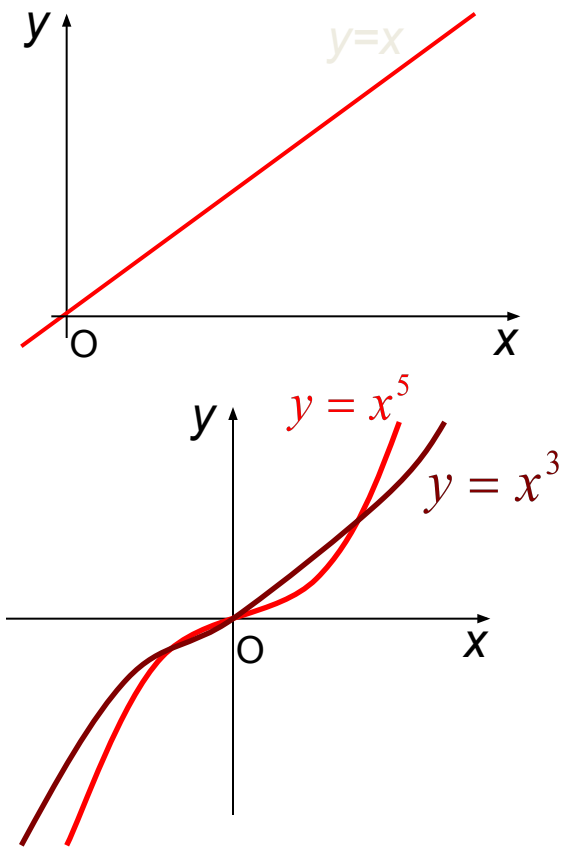
а) $y = \arcsin x$: $D(\arcsin x) = [-1;1]$ $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

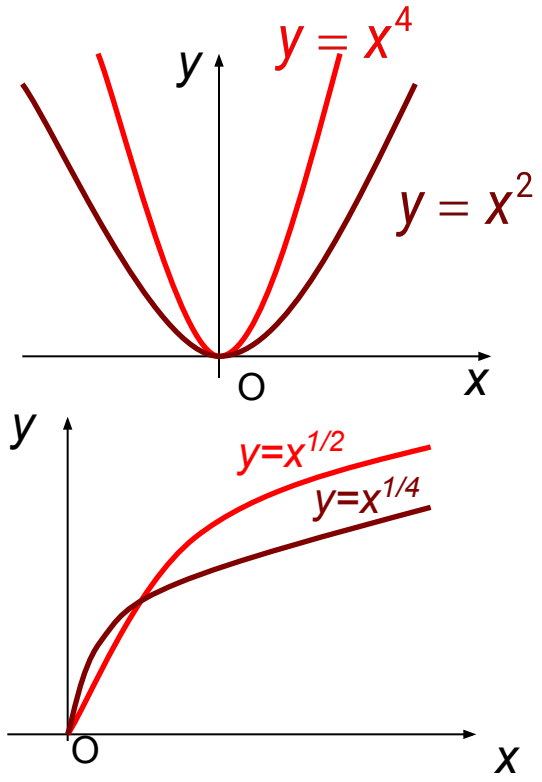
б) $y = \arccos x$: $D(\arccos x) = [-1;1]$ $E(\arccos x) = [0;\pi]$;

в) $y = arctg\ x$: $D(arctg\ x) = (-\infty;+\infty)$ $E(arctg\ x) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

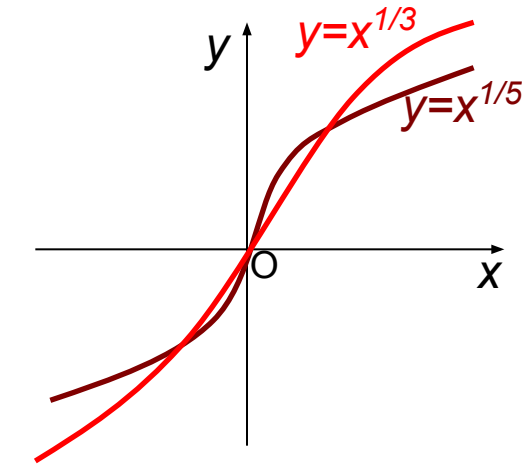
г) $y=arcctg\ x$: $D(arcctg\ x) = (-\infty;+\infty)$, $E(arcctg\ x) = (0;\pi)$.

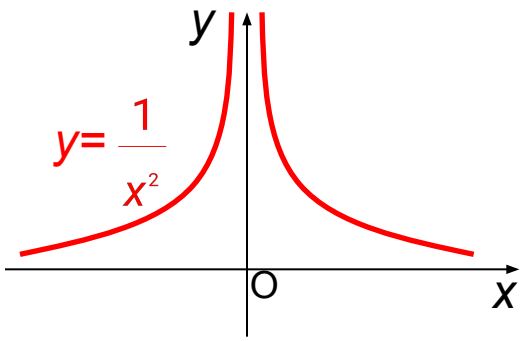
- **Графики основных элементарных функций:**

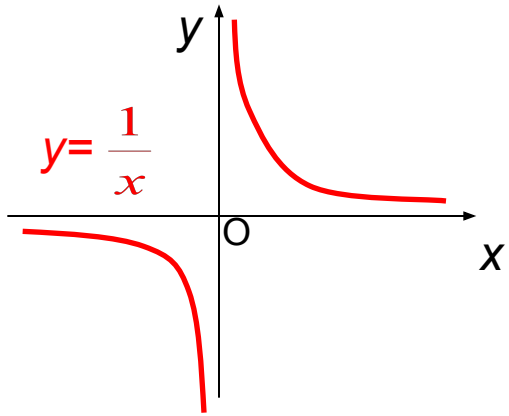


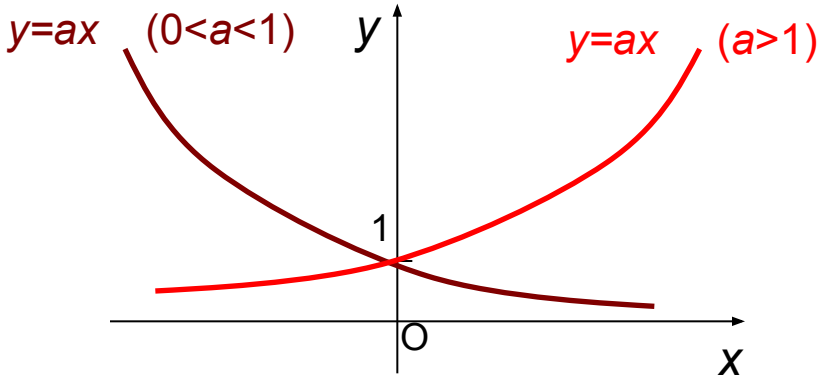


- Графики основных элементарных функций:



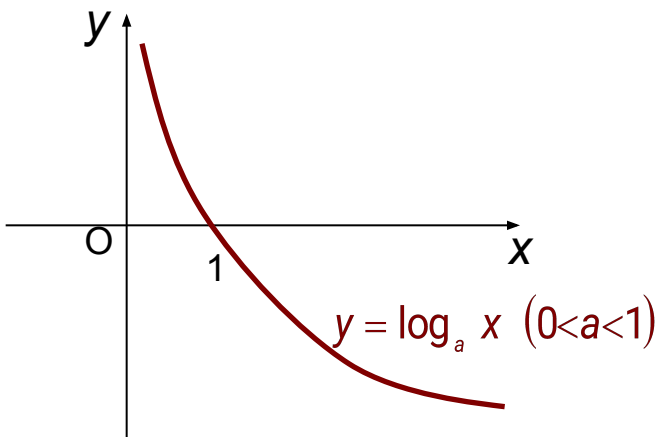


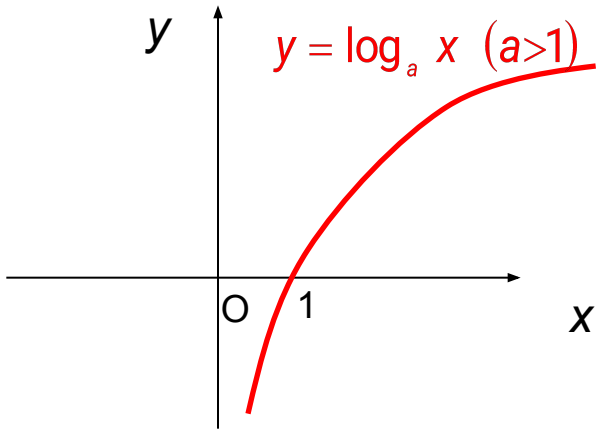


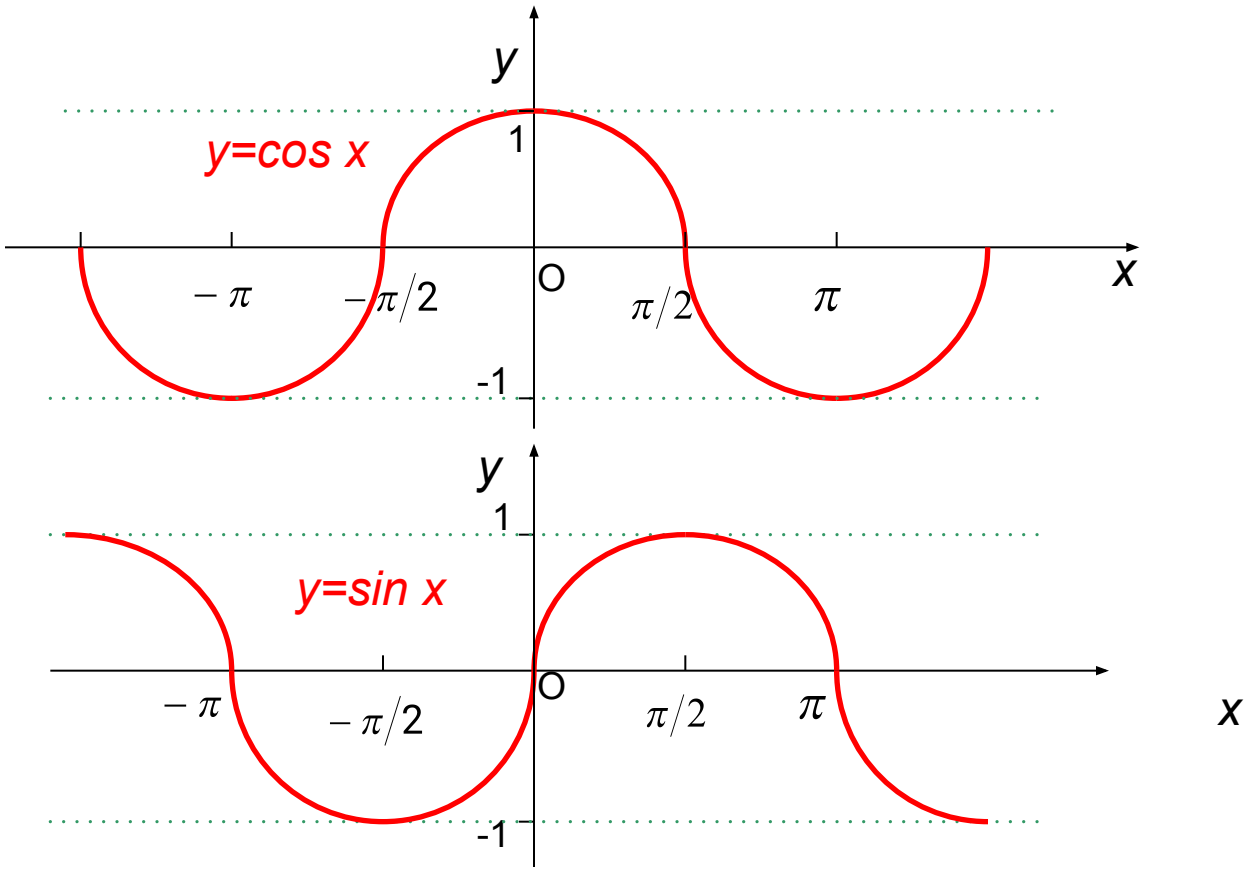


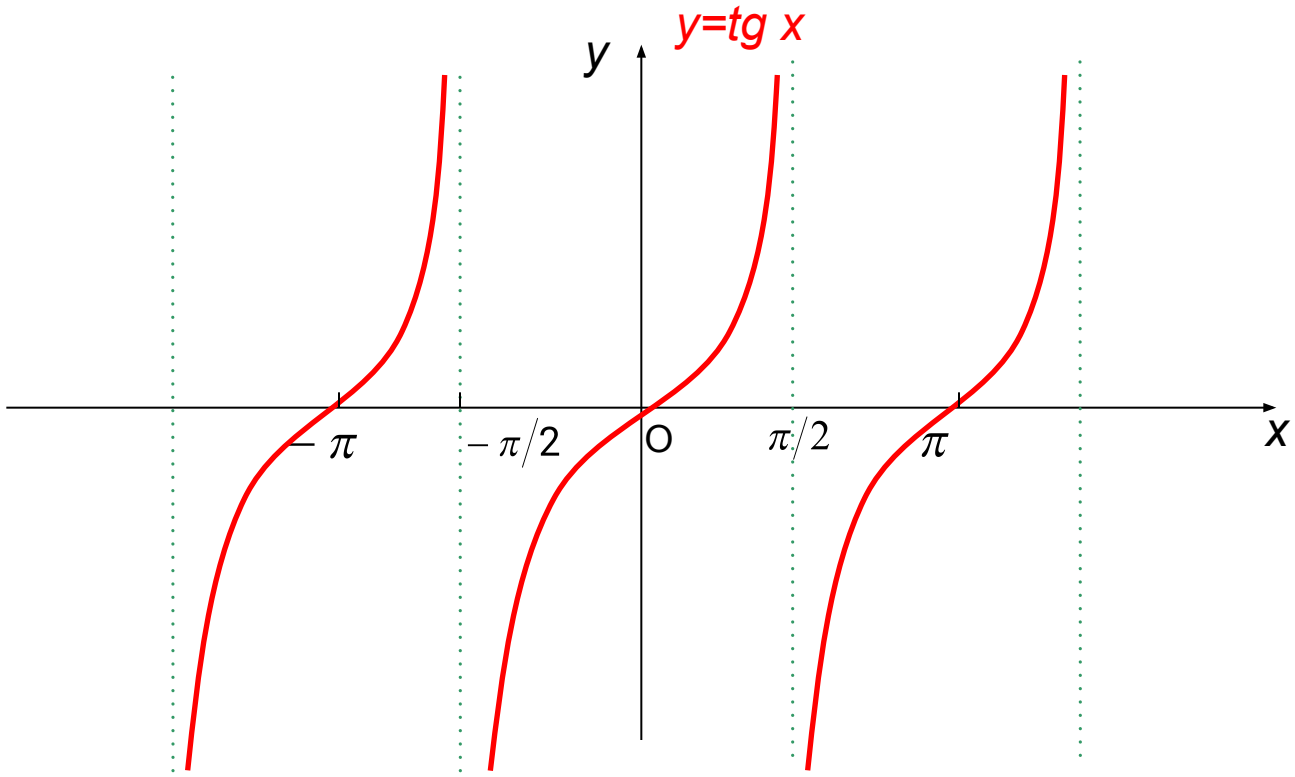
2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

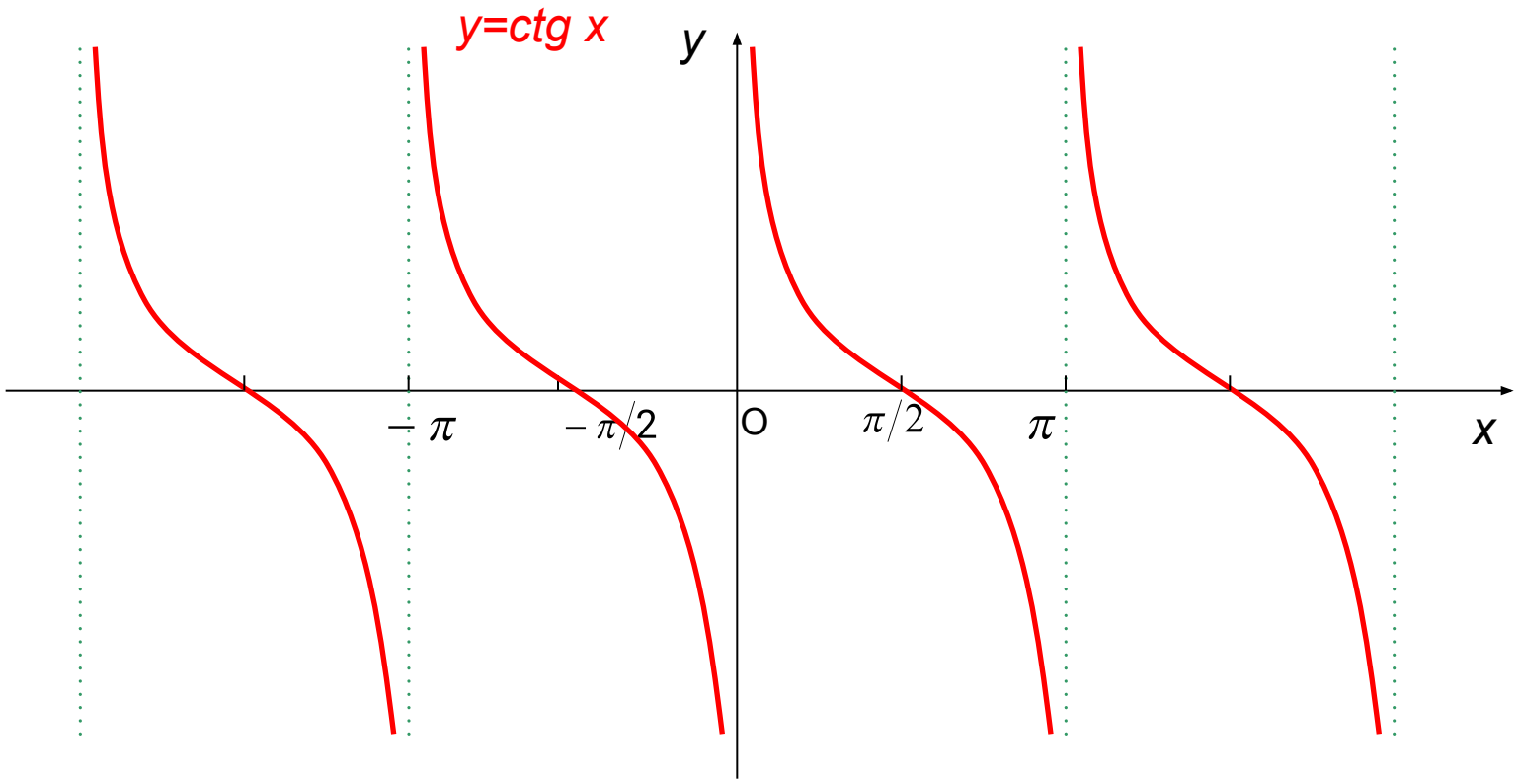
- Графики основных элементарных функций:

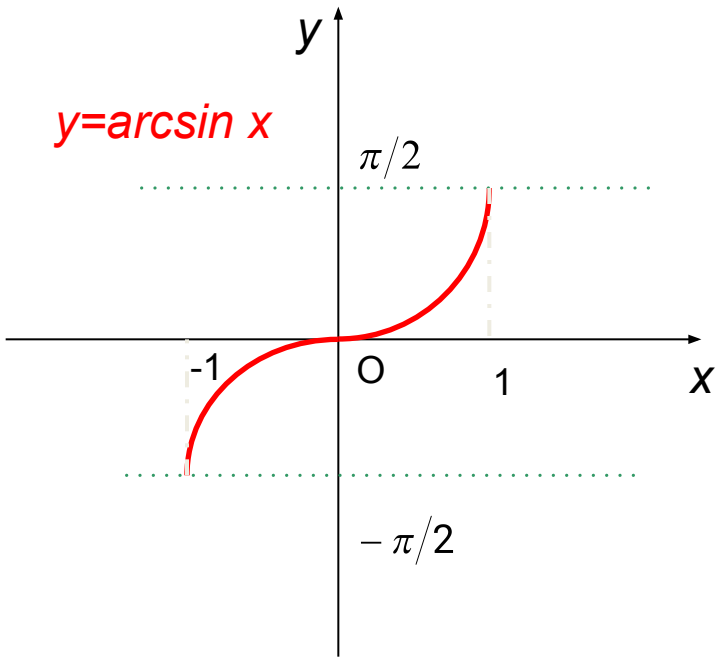


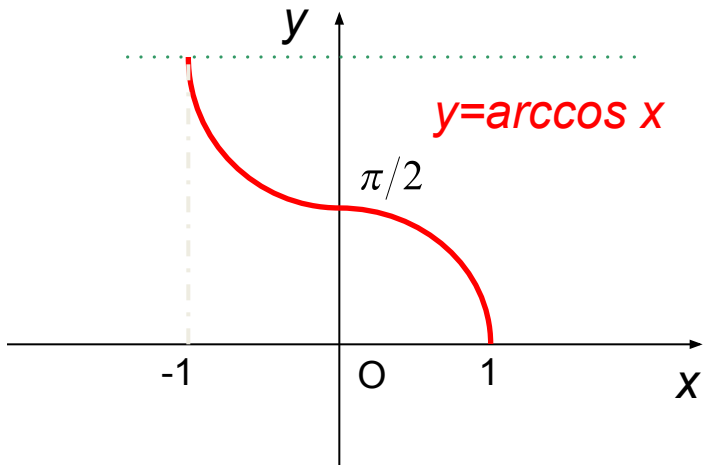


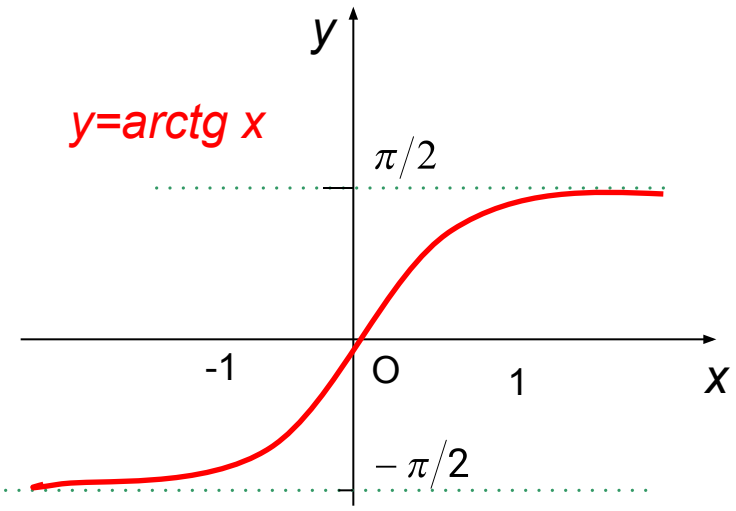

y
y=cos x
1
O
x
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
-1
y
1
y=sin x
O
x
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
-1

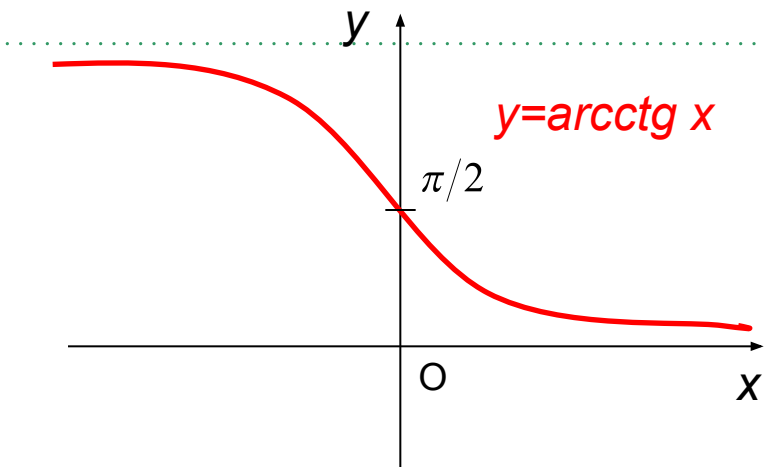

y=tg x
y
x
O
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π


y=ctg x
y
x
O
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π


y
y=arcsin x
π/2
-1
O
1
x
−π/2


y
y=arccos x
π/2
-1
O
1
x


y
y=arctg x
π/2
-1
O
1
x
– π/2


y
y=arcctg x
π/2
O
x