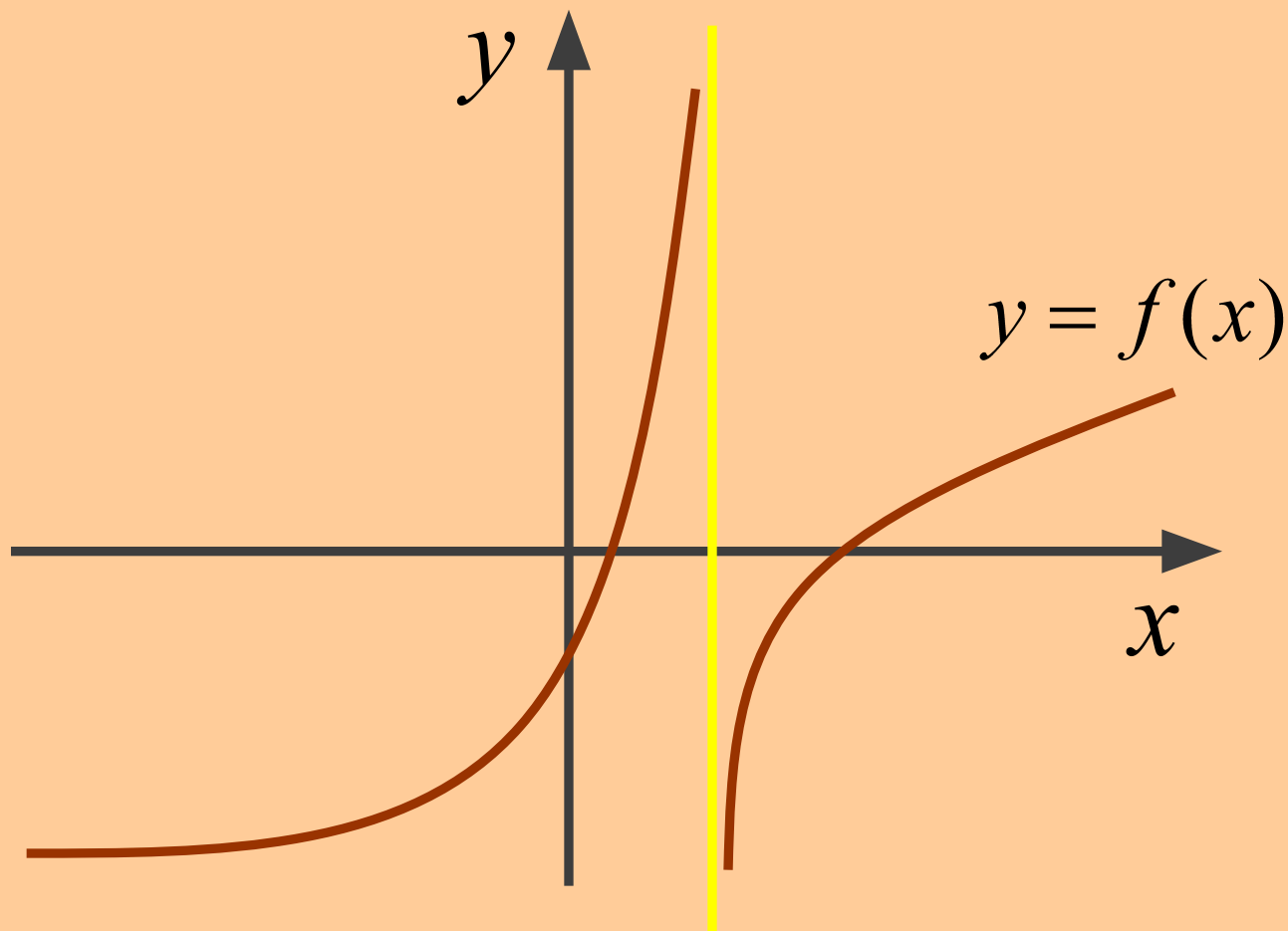
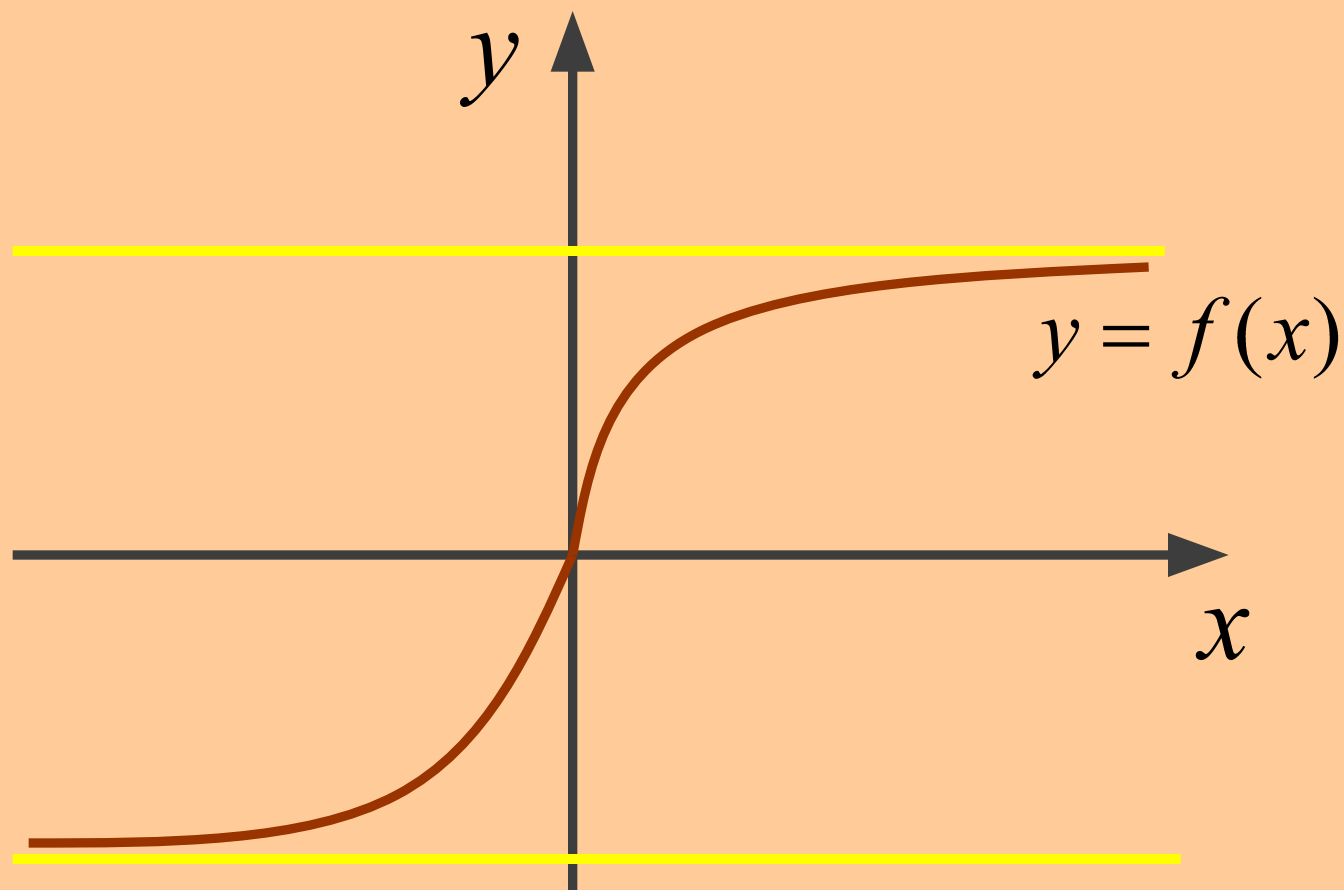


9.5. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

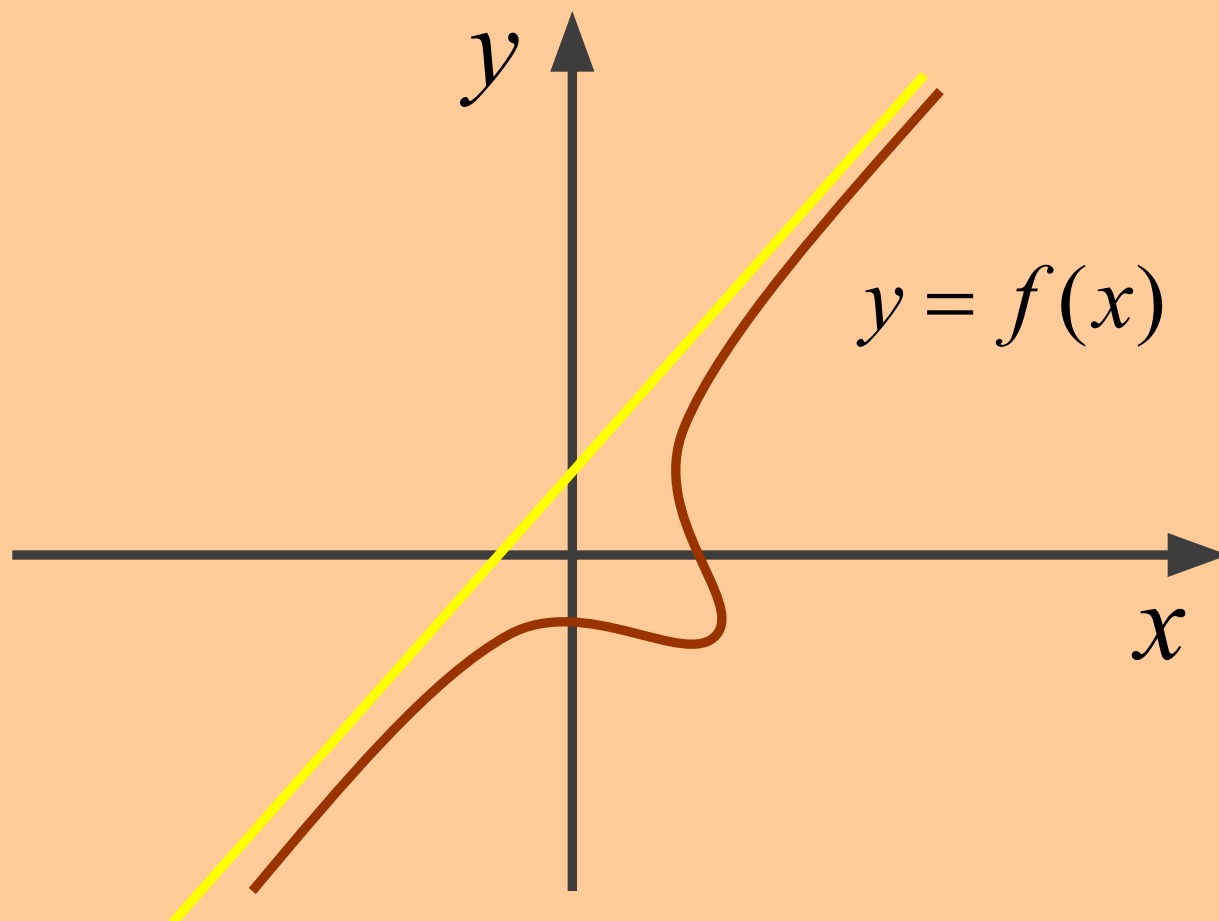
Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, такая что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении точек графика от начала координат.



вертикальная асимптота



горизонтальные асимптоты



наклонная асимптота

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, может быть, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при

$$x \rightarrow x_0 - 0 \quad (\text{слева})$$

или

$$x \rightarrow x_0 + 0 \quad (\text{справа})$$

равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$$

*Тогда прямая $x=x_0$ является
вертикальной асимптотой графика
функции $y=f(x)$.*

Очевидно, что прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0 , т.к. в этом случае

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Следовательно, вертикальные асимптоты $x=x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y=f(x)$ или на концах ее области определения (a,b) , если a и b – конечные числа.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Тогда прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

ТЕОРЕМА 3.

Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x) = b$$

Тогда прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Пример.

Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Решение:

1

Функция не имеет точек разрыва, следовательно вертикальных асимптот у нее нет.

2

Найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \infty$$

Предел равен бесконечности, следовательно горизонтальных асимптот нет.

3

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} : x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

**Следовательно, прямая $y = x$
является наклонной асимптотой.**