

Свойства точки, равноудалённой от вершин многоугольника

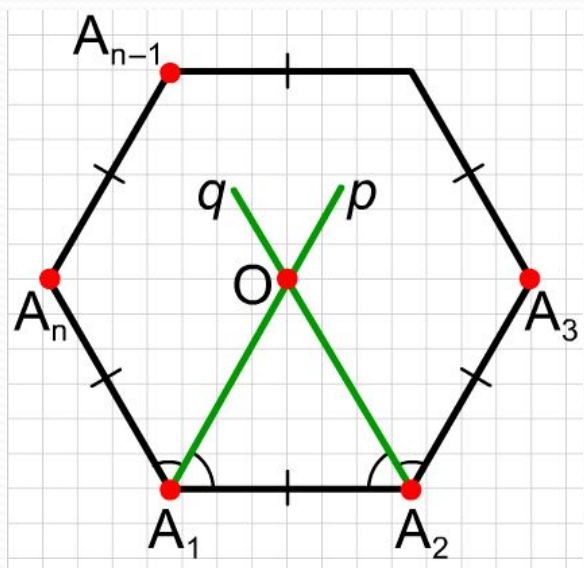
Подготовили:
ученики 10-Б класса
Колесник А., Козко А.,
Логвинов Д., Семерет
Д.

Виды правильных многоугольников



Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны. Центром правильного многоугольника называется точка, равноудаленная от всех его вершин и всех его сторон.

Теорема 1

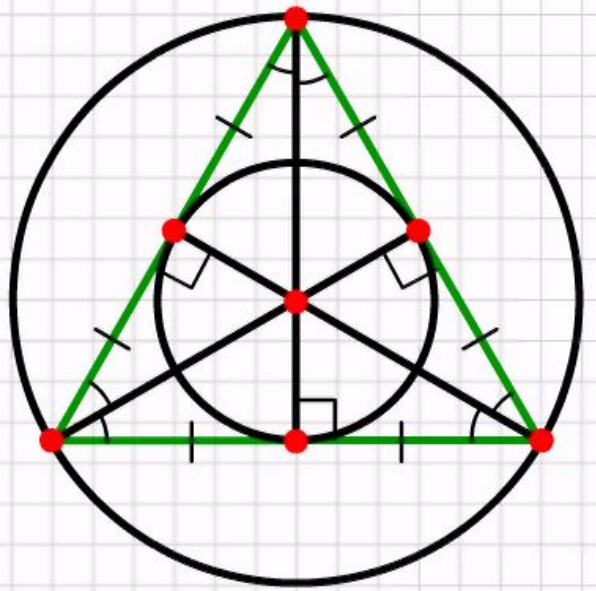


- В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин.

Доказательство:

Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — правильный n -угольник (т. е. $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ и $\angle A_1 = \angle A_2 = \dots = \angle A_n$). Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2 . Пусть $p \cap q = O$. Докажем, что точка O является центром правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$.

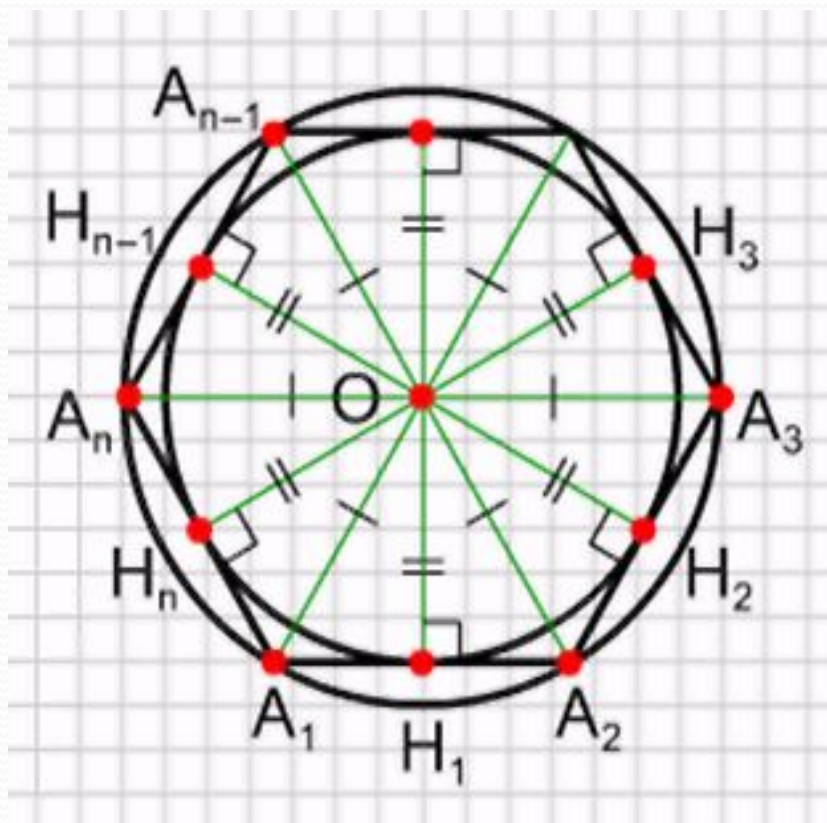
Центр правильного многоугольника



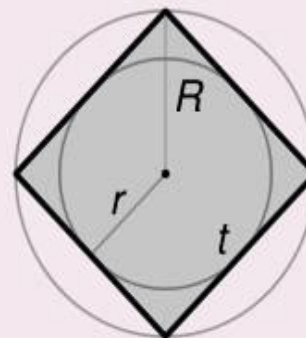
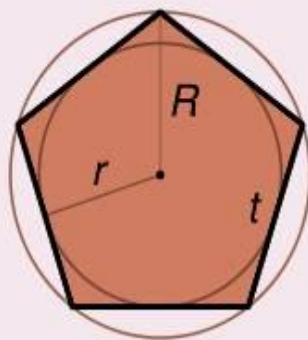
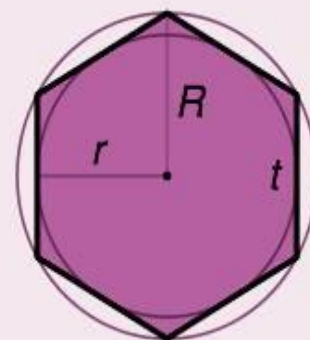
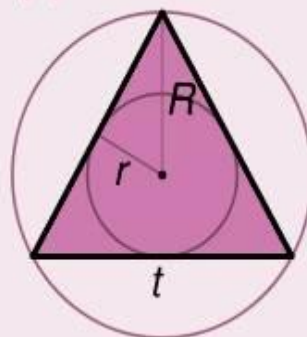
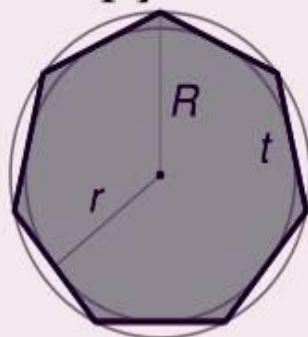
Точка, которая равноудалена от всех вершин и от всех сторон правильного многоугольника, является центром правильного многоугольника.

Например, у равностороннего треугольника на рисунке такой точкой является центр вписанной и описанной окружности (это одна точка, т. к. у равностороннего треугольника все биссектрисы, медианы и высоты совпадают, следовательно, совпадают и точка пересечения биссектрис с точкой пересечения серединных перпендикуляров). Докажем, что центр существует у каждого правильного многоугольника.

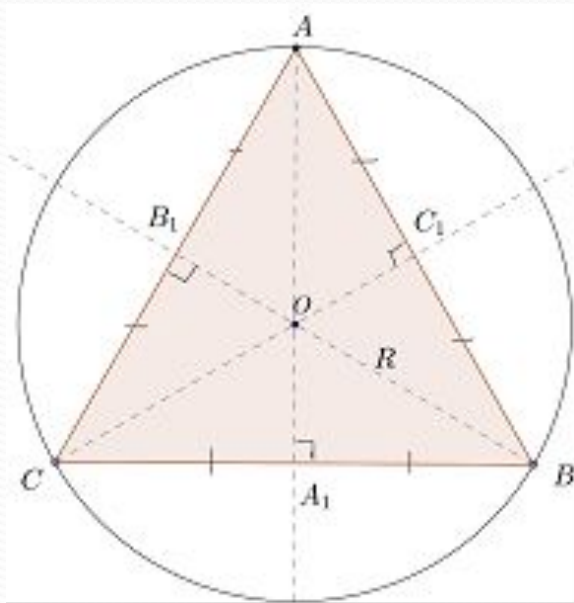
Следствие. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.



- ⊙ Правильный многоугольник является **вписанным** в окружность и **описанным** около окружности, причем центры этих окружностей **совпадают**.

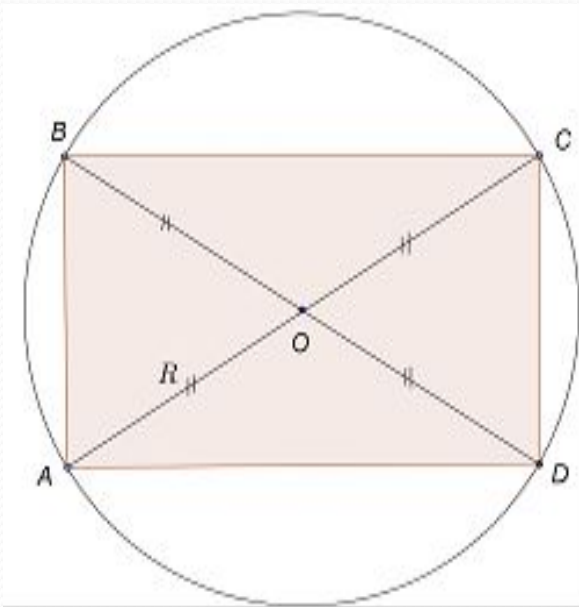


Пример 1



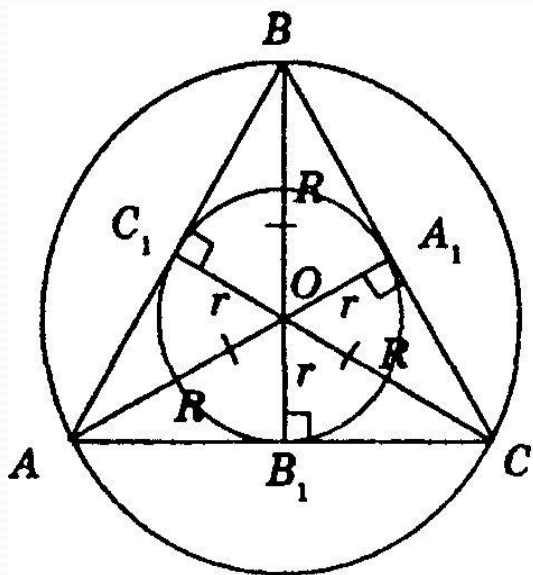
- Правильный треугольник ($n = 3$)
- Известно, что около любого треугольника ABC , в том числе правильного, можно описать окружность. Ее центр лежит на пересечении серединных перпендикуляров. В случае правильного треугольника на серединных перпендикулярах лежат и биссектрисы, и медианы, и высоты. Точка O равноудалена от всех вершин треугольника

Пример 2



- Дан пример окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O , равноудаленной от его вершин, при этом расстояние от этой точки до любой вершины равно радиусу окружности:
- $OA = OB = OC = OD = R$.

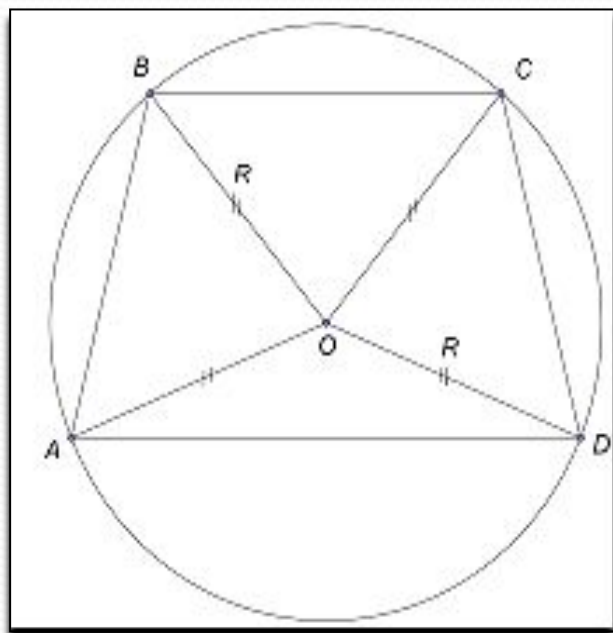
Пример 3. Равносторонний треугольник



Точка O равноудалена от вершин треугольника: A, B, C, т. к. точка O – центр вписанной и описанной окружностей

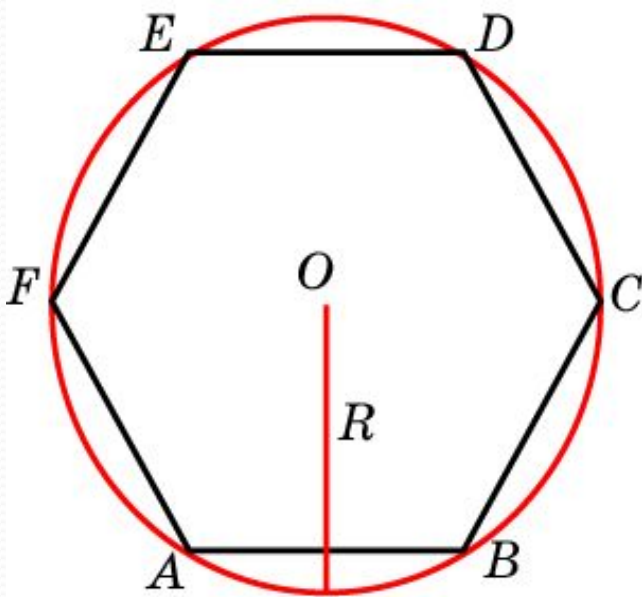
$$OA=OB=OC=R$$

Пример 4. Равнобедренная трапеция



- Следующий пример – равнобедренная трапеция $ABCD$. Как известно, около такой трапеции можно описать окружность, т. е. существует такая точка O , которая равноудалена от всех вершин трапеции:
- $OA = OB = OC = OD = R$.

Пример 5. Шестиугольник



Точка O равноудалена от вершин шестиугольника: A, B, C, D, E, F, т. к. точка O – центр вписанной и описанной окружности

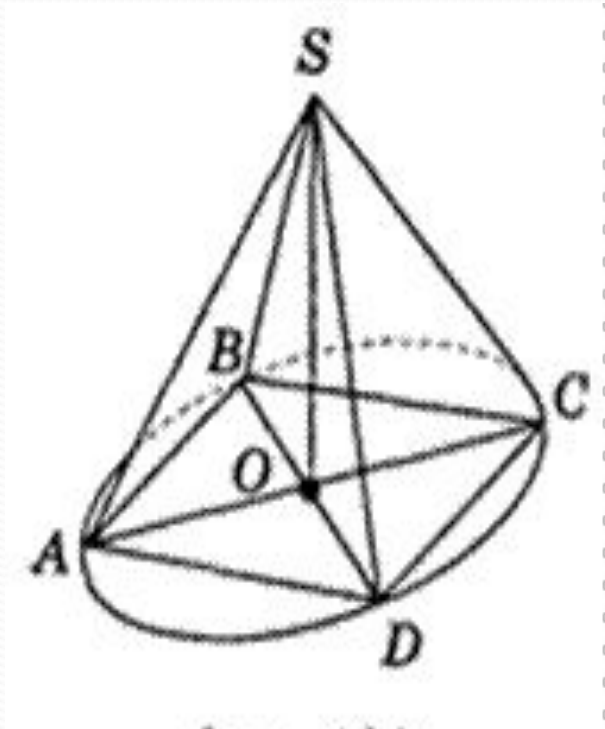
$$OA=OB=OC=OD=OE=OF=R$$

Свойство точки, равноудаленной от вершины многоугольника

Теорема 2.

Если через центр окружности, описанной вокруг многоугольника, проведено прямую, перпендикулярную к плоскости многоугольника, то каждая точка этой прямой равноудалена от вершин многоугольника.

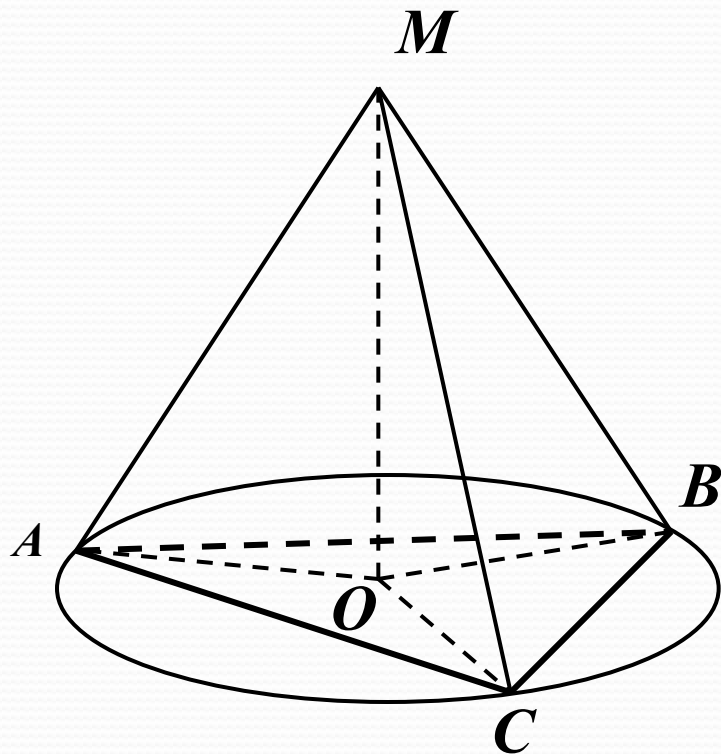
Доказательство теоремы



Пусть ABCD - данный четырехугольник, для точки S пространства $SA = SB = SC = SD$ и $SO \perp ABC$. Докажем, что точка O - центр окружности, описанной вокруг ABCD.

1. $\triangle ASO = \triangle BSO = \triangle CSO = \triangle DSO$ (из равенства гипотенузы и катета: SO - совместный, $AS = BS = CS = DS$ - по условию).
2. Из равенства треугольников следует, что $AO = BO = CO = DO$, т. е. точка O - центр окружности, описанной вокруг четырехугольника ABCD.

Свойство точки, равноудаленной от вершин многоугольника



Если точка, не лежащая в плоскости выпуклого многоугольника, равноудалена от вершин многоугольника, то основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, является центром окружности, описанной около многоугольника.

Если прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника, проходит через центр описанной около многоугольника окружности, то каждая точка этой прямой равноудалена от вершин многоугольника.

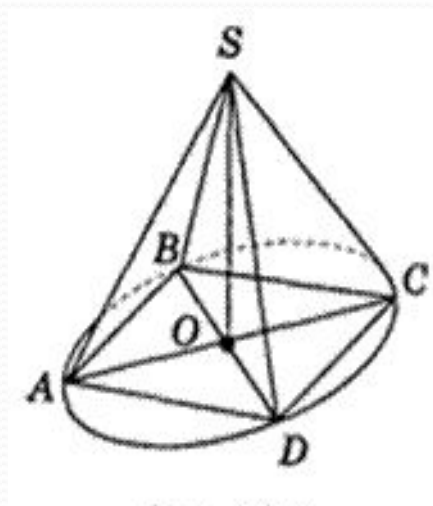
Доказательство теоремы

Пусть $ABCD$ - четырехугольник, вокруг которого описана окружность с центром в точке O , и $OS(ABC)$.

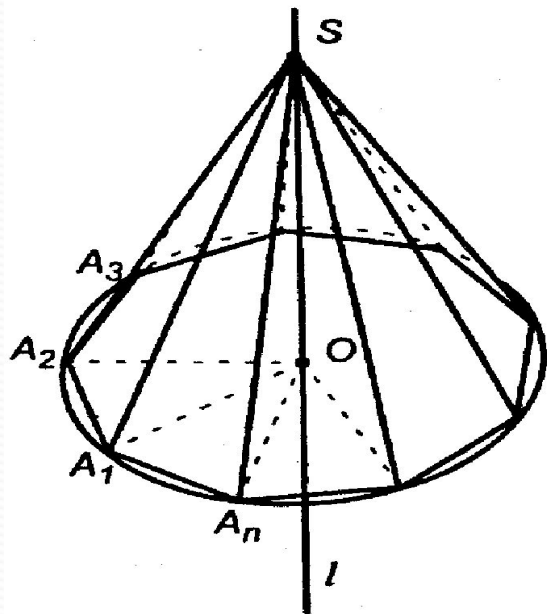
Докажем, что $SA = SB = SC = SD$.

$\triangle ASO = \triangle BSO = \triangle CSO = \triangle DSO$ (за двумя катетами: SO - общая, $AO = BO = CO = DO$).

Из равенства треугольников следует, что $SA = SB = SC = SD$.



Свойство точки, равноудаленной от вершины многоугольника

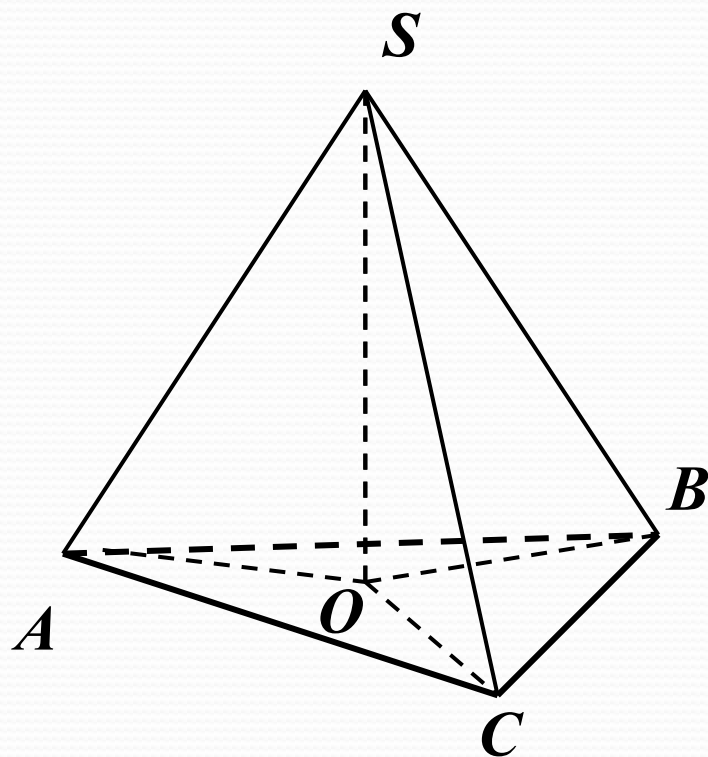


Теорема

Если некоторая точка равноудалена от вершин многоугольника, то основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника, совпадает с центром окружности, описанной вокруг многоугольника.

Задача 1.

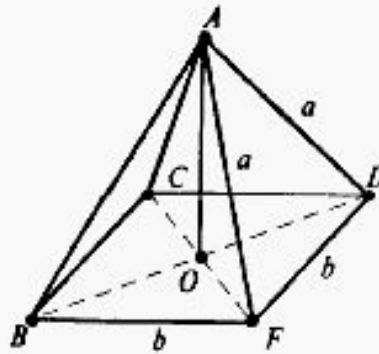
Точка O равноудалена от вершин правильного треугольника со сторонами 6 см и удалена от плоскости треугольника на 8 см. Найдите расстояние от точки O до вершины треугольника S .



Задача сводится к нахождению высоты правильной треугольной пирамиды. Вершина проектируется в центр основания, т.е. в точку пересечения медиан. По теореме Пифагора находится расстояние, как величина гипотенузы в прямоугольном треугольнике, где один катет - это высота пирамиды, а второй катет равен $\frac{2}{3}$ высоты основания. Ответ: 5

Задача 2

- Расстояние от точки A до вершин квадрата равны a . найти расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b .



Пусть AO перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость квадрата. Поскольку $AB = AC = AD = AF$, то и $OB = OC = OD = OF$ и, значит, O — точка пересечения диагоналей. Тогда

$OF = \frac{1}{2} CF = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Далее треугольник AOF — прямоугольный. Так

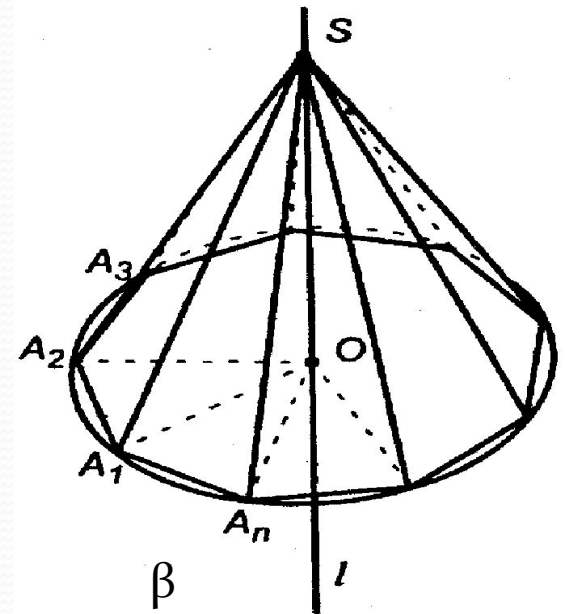
что

$$AO = \sqrt{AF^2 - OF^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}.$$

Задача 3

Пусть $SO L$ а - данная прямая, а β - плоскость многоугольника

Пусть на плоскости β имеется вписанный в окружность n -угольник (не обязательно правильный n -угольник); т. O - центр описанной окружности.



Решение задачи

Рассмотрим $\triangle A_1OS$, $\triangle A_2OS$, ..., $\triangle A_nOS$. Они - прямоугольные, $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$ - как радиусы окружности, SO - общий катет. Все треугольники равны, поэтому наклонные SA_1 , SA_2 , ..., SA_n тоже равны. Это суть утверждение задачи.

Рассмотрим $\triangle A_1OS$, $\triangle A_2OS$, ..., $\triangle A_nOS$.

Они - прямоугольные, $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$ - как радиусы окружности, SO - общий катет. Все треугольники равны, поэтому наклонные SA_1 , SA_2 , ..., SA_n тоже равны. Это суть утверждение задачи.

Задача 4

Дано:

Точка М равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (угол C=90 градусов). AC=BC=4см. Расстояние от точки М до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки Е - середины стороны АВ - до плоскости BMC.

Решение задачи

Поскольку треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, то $AE = CE = BE$, а это значит, что E - это проекция точки M на плоскость ABC и $ME = 2\sqrt{3}$.

Пусть D - середина BC.

Искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра EH, опущенного из точки E к MD.

$$ED = AC/2 = 2.$$

$$\text{Отсюда } MD = \sqrt{ME^2 + ED^2} = \sqrt{12 + 4} = 4.$$

Прямоугольные треугольники EHD и MED подобны (угол D общий), значит,

$$ED/MD = EH/ME.$$

Отсюда

$$EH = ME/2 = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$