

Самофокусировка света: физическая картина

Для кубической восприимчивости вида $\chi^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, \omega)$

поляризация $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(3)} = \left(\chi^{(1)} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}_\omega \mathbf{E}_\omega \right) \mathbf{E}_\omega$

показатель преломления $n(\mathbf{r}, t) = \sqrt{1 + 4\pi \left(\chi^{(1)} + \chi^{(3)} |E_\omega|^2 \right)} \approx n_0 + n_2 |E_\omega|^2$

где $n_0 = \sqrt{1 + 4\pi\chi^{(1)}}$, $n_2 = \frac{2\pi\chi^{(3)}}{n_0}$

Запишем волновое уравнение с зависящим от напряженности показателем преломления:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(n_0 + \Delta n)^2 E \right] = 0$$

- среда изотропна,
- волна поперечна
- отклик мгновенный

$\Delta n > 0$ - в центре пучка показатель преломления больше, скорость меньше, волновой фронт искажается внутрь, фокусировка

$\Delta n < 0$ - в центре пучка показатель преломления меньше, скорость больше, волновой фронт искажается вперед, дефокусировка

- баланс фокусировки и дисперсионного расплывания

Самофокусировка света: феноменология

Запишем волновое уравнение с зависящим от напряженности показателем преломления:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(n_0 + \Delta n)^2 E \right] = 0$$

! Уравнение трехмерно, поперечными производными пренебрегать нельзя

В приближении ММА в координатах $\xi = t - z / v_g$ и

$$E = E_0(r, z, \xi) \exp(ikz - i\omega t)$$

волновое уравнение редуцируется к уравнению для амплитуды

$$\left(i2k \frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 \right) E_0 = -2k^2 \frac{\Delta n}{n_0} E_0$$

- пучок распространяется вдоль оси z
- профиль пучка имеет круговую симметрию

Самофокусировка света и дифракция

Записав амплитуду волны в виде $E_0 = E_0(r, z, \xi) = Ae^{i\varphi}$,
уравнение запишется в виде двух:

$$k \frac{\partial}{\partial z} A^2 = -\nabla_{\perp} \cdot (A^2 \nabla_{\perp} \varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \frac{k}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + \frac{2\Delta n}{n_0} \right) = 0$$

первое уравнение описывает временную и пространственную зависимость интенсивности пучка

поскольку фаза $\varphi(r, z, \xi)$ задает волновой фронт пучка, второе уравнение описывает траекторию пучка

$2\Delta n / n_0$ - влияние самофокусировки

$\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A}$ - влияние дифракции

Самофокусировка света: самоканалирование

при условии баланса самофокусировки и дифракции:

$$\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + \frac{2\Delta n}{n_0} = 0$$

волновой фронт становится плоским - $\nabla_{\perp} \varphi = 0$

а пара уравнений сводится к виду $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 0$

Это условие самоканалирования света

Самофокусировка гауссовых пучков

В параксиальном (безабберационном) приближении гауссов пучок при самофокусировке остается гауссовым:

$$A(r, z) = A_0 \frac{a_0}{a(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{2a^2(z)} \right]$$

a_0 , a - радиус пучка вначале и в точке рассмотрения

Рассмотрим добавку в показатель преломления в виде $\Delta n = n_2 |E|^2$

Мощность лазерного пучка запишем в виде

$$P = \frac{n_0 c}{2\pi} \int_0^\infty A^2 2\pi r dr = \frac{n_0 c a_0^2 A_0^2}{2}$$

Введем еще одну величину размерности мощности

$$P_0 = \frac{c \lambda^2}{8\pi^2 n_2}$$

Длина самофокусировки

Зависимость размера пучка от пройденного расстояния в нелинейной среде

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \frac{2z^2}{k^2 a_0^4} + \left(1 + \left(\frac{da}{dz}\right)_0 \frac{z}{a_0}\right)^2$$

Если исходная расходимость пучка мала,

$$\frac{k}{2} \left(\frac{da}{dz}\right)_0^2 \ll \frac{1}{\lambda}$$

то при $P = P_0$ $a = a_0$, т.е. реализуется самоканалирование

условие фокуса, $a = 0$, достигается на длине самофокусировки

$$z_f^2 = \frac{k^2 a_0^4}{2(P/P_0 - 1)}$$